

Multilineare Determinantenfunktion

$D(v_1, \dots, v_n)$ Spaltenvektoren

$D(z_1, \dots, z_n)$ Zeilenvektoren

$$\det A = \det A^T$$

$A_{n,n}$

Berechnung der Determinante:

GAUSS'SCHES ELIMINATIONSVERFAHREN

Vertauschung von zwei Spalten respektive zwei
Spalten ändert sich das Vorzeichen

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{nn} \end{pmatrix} = c_{11} \cdot \dots \cdot c_{nn} = \prod_{i=1}^n c_{ii}$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} \cdot d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22} \cdot d_{22} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & c_{nn} \cdot d_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det (C \cdot D) = \prod (c_{ii} \cdot d_{ii}) = \prod c_{ii} \cdot \prod d_{ii} =$$

$$= \det C \cdot \det D$$

gilt allgemein:

$$A, B \in L_{n,n}$$

$$\text{or gilt: } \det (A \cdot B) = \det (A) \cdot \det (B)$$

Multiplikationssatz für Determinanten

$n=2$:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$n=3$: Regel von SARRUS

~~$D(z_1, \dots, z_n)$~~

$D(z_1, \dots, z_n)$

a_{ij}

$$z_i = a_{i1} \cdot w_1 + a_{i2} \cdot w_2 + \dots + a_{in} \cdot w_n$$

$$D = \begin{aligned} & a_{i1} \cdot D(z_1, \dots, w_1, \dots, z_n) + \\ & + a_{i2} \cdot D(z_1, \dots, w_2, \dots, z_n) + \\ & \dots \\ & + a_{in} \cdot D(z_1, \dots, w_n, \dots, z_n) \end{aligned}$$

$$D(z_1, \dots, w_j, \dots, z_n)$$

↑
i-te Zeile

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— i-te Spalte

j-te Spalte

~~$\det(A) =$~~

$$\det(\dots) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{--- } i\text{-te Zeile} \\ \text{--- } j\text{-te Spalte} \end{matrix}$$

A_{ij} : das algebraische Komplement des Elements a_{ij}

$$D = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}$$

Entwicklung der Determinante D nach den Elementen der i -ten Zeile

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & d & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{\tilde{\pi} \in \mathcal{S}_3} \operatorname{sgn} \tilde{\pi} \cdot a_{\tilde{\pi}(1)} \cdot a_{\tilde{\pi}(2)} \cdot a_{\tilde{\pi}(3)} =$$

$$= \sum_{\substack{\tilde{\pi} \in \mathcal{S}_3 \\ \tilde{\pi}(3)=3}} \operatorname{sgn} \tilde{\pi} \cdot a_{\tilde{\pi}(1)} \cdot a_{\tilde{\pi}(2)} \cdot 1 =$$

$$\tilde{\pi}(3)=3$$

$$= \sum_{\tilde{\pi}' \in \mathcal{S}_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline \tilde{\pi}'(1) & \tilde{\pi}'(2) & 3 \end{array} \right)$$

$$\Delta(\tilde{\pi}) = \Delta(\tilde{\pi}')$$

$$\operatorname{sgn} \tilde{\pi} = \operatorname{sgn} \tilde{\pi}'$$

$$= \sum_{\tilde{w}' \in \tilde{\gamma}_2} \operatorname{sgn} \tilde{w}' \cdot a_{1\tilde{w}'(1)} \cdot a_{2\tilde{w}'(2)} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Unterdeterminante

2. Zeile und 2. Spalte gestrichen

$$A_{22} = D_{22}$$

$$A_{32} = \det \begin{pmatrix} p & 0 & q_1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} p & q_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -D_{32}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

$n \times n$

$(n-1) \times (n-1)$

Berechnung der algebraischen Komplemente mittels Unterdeterminanten

$$D = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & x & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} \cdot A_{ij} =$$

algebraische Komplemente der Elemente der i -ten Zeile

i -te Stelle

$$= a_{k1} \cdot D(z_1, \dots, w_1, \dots, z_n) + \dots$$

$$+ a_{kn} \cdot D(z_1, \dots, w_n, \dots, z_n) =$$

$$= D(z_1, \dots, z_k, \dots, z_n) = 0$$

$k \neq i$: ~~Ben~~ an

z_k an i -ter Stelle = z_i an k -ter Stelle

\Rightarrow also 0

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} \cdot A_{ij} = \det A \cdot \delta_{ki} \quad (k, i = 1, \dots, n)$$

KRONECKER-DELTA

$$\delta_{ki} = 1, \text{ wenn } k = i$$

$$\delta_{ki} = 0, \text{ wenn } k \neq i$$

Matrix (δ_{ij})

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{kj} = \begin{cases} \det A & k=i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

$$C = (c_{ik}) = \det A \cdot E$$

$$C = A \cdot C = (a_{ij}) \cdot (c_{ks}) = (c_{ik})$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}$$

$$(A_{ns})^T = (A_{sr})$$

$$B_{jk} = A_{kj}$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot B_{jk} = \begin{cases} \det A & i=k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

$$A \cdot (B_{jk}) = A \cdot (A_{kj})^T = \det A \cdot E$$

Matrix der algebraischen Komplemente: $\text{adj } A$
 Adjungierte von A

$$A \cdot (\text{adj } A)^T = \det A \cdot E$$

$\det A = 0$ (Bemerkung: A singular)

$$\rightarrow A \cdot (\text{adj } A)^T = 0$$

ABER: $\det A \neq 0$ A regulär (A^{-1} existiert)

$$A \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\det A} \cdot \text{adj } A \right)^T}_{A^{-1}} = E$$

$$A^{-1} = (f_{ij}) \quad f_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A} = \frac{(-1)^{i+j} \cdot D_{ji}}{\det A}$$

Entwicklung der Determinante nach den Elementen der k -ten Spalte:

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ik} = \det A$$

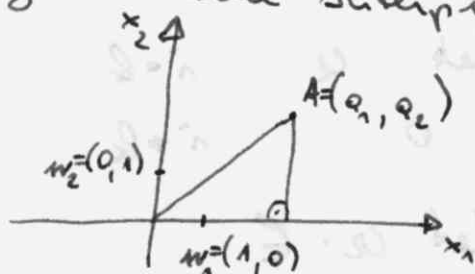
Bemerkung: Schreibweise

Matrix $A = (a_{ij})$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

K^n kanonische Basis w_1, \dots, w_n
 (speziell: $K = \mathbb{R}$)

$n=2$: geometrische Interpretation

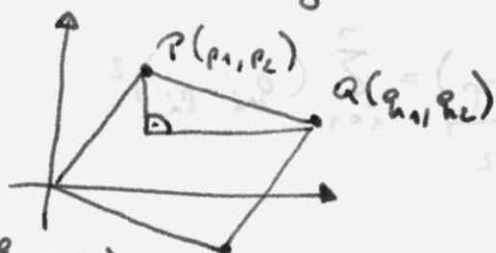


$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$a^2 = a^T \cdot a = a_1^2 + a_2^2 = \overline{OA}^2$$

euklidische Geometrie
Pythagoreischer Lehrsatz

P, Q:



$$q - p = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$$

$$(q - p)^2 = (q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 = \overline{PQ}^2$$

Distanz (Abstand) zwischen Punkten P und Q

$$\overline{PQ} = d(P, Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$$

Besondere Eigenschaften der Längen von Strecken (der Abstand zwischen zwei Punkten)

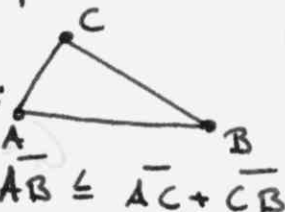
1, $d(P, Q) \geq 0$; reelle Zahl

speziell: $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$

2, $d(P, Q) = d(Q, P)$

3, Dreiecks-

ungleichung:



$$d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$$

Verallgemeinerung auf beliebiges $n: (K = \mathbb{R})$

$$P(p_1, \dots, p_n); Q(q_1, \dots, q_n)$$

$$q-p = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix}$$

$$(q-p)^2 = (q-p)^T \cdot (q-p) = \sum_{i=1}^n (q_i - p_i)^2$$

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (q_i - p_i)^2}$$

n -dimensionaler Raum

Eigenschaften 1-3

lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$y = A \cdot x$$

$$p' = A \cdot p$$

$$q' = A \cdot q$$

$$q' - p' = A \cdot (q - p)$$

$$(q' - p')^2 = (q' - p')^T \cdot (q' - p') =$$

$$= (A \cdot (q - p))^T \cdot (A \cdot (q - p)) =$$

$$= (q - p)^T \cdot A^T \cdot A \cdot (q - p)$$

$$(q - p)^T \cdot G \cdot (q - p)$$

$$G = A^T \cdot A$$

Bildraum = Urbildraum

d'

d

Frage: Für welche Matrizen A (für welche Abbildungen A) gilt f.a. P, Q :

$$d(P', Q') = d(P, Q)$$

metrische Abbildungen

$$Q = \alpha^T \cdot \alpha = E$$

 α ist regulär; $\alpha^{-1} = \alpha^T$

$$\alpha = (\delta_1, \dots, \delta_n)$$

$$\alpha^T = \begin{pmatrix} \delta_1^T \\ \vdots \\ \delta_n^T \end{pmatrix}$$

$$\delta_i^T \cdot \delta_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$a, b \in K^n$$

$$\alpha^T \cdot b \in K$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i$$

inneres Produkt $a \cdot b = (a, b)$

skalares Produkt

kommutativ: $a \cdot b = b \cdot a$

$$K^n \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$x^T \cdot y = x \cdot y = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

1x1-Matrix; interpretiert als Element aus K skalares (inneres) Produkt von x und y : $x \cdot y$

Eigenschaften des skalaren Produkts:

1, (x, y) linear in x :

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 \cdot (x_1, y) + \lambda_2 \cdot (x_2, y)$$

analog auch linear in y \rightarrow Bilinearität

2, Symmetrie: $(x, y) = (y, x)$
(Produkt kommutativ)

Spezialfall: $y = x$
 $(x, x) = x^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$

quadratisches Polynom

quadratische Form

Bilinearform

Spezialfall: $K = \mathbb{R}$ ($K \subseteq \mathbb{R}$)

$$(x, x) = \sum x_i^2 \geq 0$$

$$(x, x) \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$x^2 = \sum x_i^2$ Längenquadrat des Vektors x
 $|x|^2 = x^2$

$$|\lambda \cdot x| = |\lambda| \cdot |x| \geq 0$$

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

$$|x| \quad d(P, Q) = |q-p| = \sqrt{(q-p)^2}$$

$$(q-p)^2 = (q-p)^T \cdot (q-p) = (q^T - p^T)(q-p) =$$

$$= q^T \cdot q - p^T \cdot q - q^T \cdot p + p^T \cdot p$$

$$p^T \cdot q = (p^T q)^T = q^T (p^T)^T = q^T \cdot p$$

$$(q-p)^2 = q^2 - 2qp + p^2$$

Es gilt sogar:

$$(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y)$$

$$(x, y)^2 \leq x^2 \cdot y^2$$

$$0 \leq |v \cdot y| \leq |v| \cdot |y|$$

x oder $y = 0$

\rightarrow alles 0

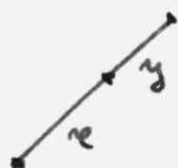
$$v, y \neq 0 \quad |v|, |y| \neq 0$$

$$-1 \leq \frac{v \cdot y}{|v| \cdot |y|} \leq 1$$

$$v = y \quad \text{bzw.} \quad y = \lambda \cdot v \quad \lambda = 0; \lambda > 0$$

$$\frac{v \cdot (\lambda \cdot v)}{|v| \cdot |\lambda \cdot v|} = \frac{\lambda \cdot v^2}{|v| \cdot \underbrace{|\lambda \cdot v|}_{=\lambda \cdot |v|}} = \frac{\lambda \cdot v^2}{\lambda \cdot v^2} = +1$$

$$\text{analog: } \lambda < 0 \rightarrow -1$$



Winkel: 0 (bzw. 180°)

$$\cos 0 = 1$$

$$\cos 180 = -1$$

Definition:

$$\angle(v, y) = \varphi$$

$$(v, y + \pi)$$

$$\cos \varphi = \frac{v \cdot y}{|v| \cdot |y|} \left(= \frac{v \cdot y}{\sqrt{v^2} \cdot \sqrt{y^2}} \right)$$

Spezialfall:

$$v \cdot y = 0 \Leftrightarrow \varphi = 90^\circ$$

Bemerkung: Wir hatten $K = \mathbb{R}$

K beliebig: $v \cdot y = 0 \in K$

Definition: Dann heißen v, y orthogonal

Achtung: Es ist möglich, dass $v \cdot v = v^2 = 0$

$$\text{z.B.: } 1, K = \mathbb{C}; \quad n=2; \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$v^2 = v \cdot v = 1^2 + i^2 = 0$$

$$2, K = \mathbb{Z}_2; n=2; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v^2 = 1^2 + 1^2 = 0$$

$$v^T \cdot y = v \cdot y$$

$$v=y: v^T \cdot v = v^2 = |v|^2$$

$$(v \cdot y) \cdot z$$

skalares
Produkt

$$v \cdot (y \cdot z)$$

skalares
Produkt

$$(v \cdot y)$$

$n \times 2$ -Matrix

$$(v \cdot y)^T$$

$2 \times n$ -Matrix

$$(v \cdot y)^T \cdot (v \cdot y)$$

$$\begin{pmatrix} v^T \\ y^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix}$$

Zeilenvektoren Spaltenvektoren

$$= \begin{pmatrix} v^2 & v \cdot y \\ v \cdot y & y^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v^T \cdot v & v^T \cdot y \\ y^T \cdot v & y^T \cdot y \end{pmatrix} =$$

2×2

Definition:

$$v_1, \dots, v_k \in K^n$$

$$(v_1 \dots v_n)^T (v_1 \dots v_k)$$

Spaltenvektoren Spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_k^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_k \end{pmatrix}$$

Zeilenvektoren Spaltenvektoren

$$= \begin{pmatrix} v_1^2 & \dots & v_1 \cdot v_k \\ \vdots & & \vdots \\ v_k \cdot v_1 & \dots & v_k^2 \end{pmatrix} = G(v_1, \dots, v_k)$$

GRAM-SCHMIDT'sche

Matrix der Vektoren v_1, \dots, v_k

$n=1$: $G(v_1) = v_1^T \cdot v_1$
 1×1 -Matrix

$$\det G(v_1) = v_1^L \in K$$

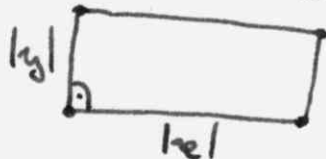
$$K = \mathbb{R}: \det G(v_1) = |v_1|^2$$

$$\det G(v_1) = r(v_1)$$

$n=2$: $v \perp y \quad (v \cdot y = 0)$

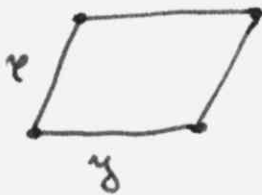
$$G(v, y) = \begin{pmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma(v, y) = v^2 \cdot y^2 = (|v| \cdot |y|)^2$$



(Flächeninhalt)²

$\Gamma(v, y) = F^2$ F Flächeninhalt des von v und y aufgespannten Parallelogramms



$\Gamma(v_1, \dots, v_k) = V^2$ k -dimensionales Parallelepiped

(v, y) skalares, inneres Produkt

$| \quad K^n$

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

$$K = \mathbb{R} \quad (\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R})$$

$$\varphi = \angle(v, y) \quad \cos \varphi = \frac{(v, y)}{|v| \cdot |y|}$$

$$|v|^2 = (v, v) = v^2$$

$$|v| \quad \text{---} \quad d(P, Q) = |q - p| = |p - q| = \sqrt{(p - q)^2}$$

$$1, \quad d(P, Q) \geq 0 \quad |v| \geq 0$$

$$d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$$

$$|v| = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

$$2, \quad d(P, Q) = d(Q, P) \quad |v| = |-v|$$

$$|\lambda \cdot v| = |\lambda| \cdot |v|$$

$$3, \quad \text{Dreiecksungleichung} \quad |v + y| \leq |v| + |y|$$

$$A: K^n \rightarrow K^n \quad (K = \mathbb{R})$$

α bezüglich der kanonischen Basis

$$v \rightarrow \alpha \cdot v$$

$$(v, y) = v^T \cdot y \rightarrow (\alpha \cdot v)^T \cdot (\alpha \cdot y) =$$

$$= v^T (\alpha^T \cdot \alpha) \cdot y = v^T \cdot G \cdot y$$

$$G = (g_{ij})$$

$$g_{ij} = b_i^T \cdot b_j = (b_i, b_j)$$

$$\alpha = (b_1, \dots, b_n) \quad b_j = A(w_j)$$

$$G^T = G \quad \text{symmetrisch}$$

$$g_{ii} = b_i^2 > 0 \quad \text{falls } A \text{ bijektiv ist}$$

$$b_1, \dots, b_n \text{ l.m.}$$

$$(b_1, b_2)^T (b_1, b_2) = \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 \\ b_1 b_2 & b_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 \\ b_1 b_2 & b_2^2 \end{pmatrix} = b_1^2 b_2^2 - (b_1 b_2)^2 = F^2 > 0$$

$\Delta_2 > 0$

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

$$g_{11} > 0 \rightarrow \Delta_1 > 0$$

$$\Delta_3 \det((b_1, b_2, b_3)^T (b_1, b_2, b_3)) = V^2 > 0$$

$$\dots$$

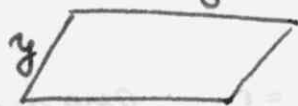
$$\Delta_i > 0$$

Hauptminoren

Bemerkung: $\Delta_2 > 0$

$$b_1^2 b_2^2 - (b_1 b_2)^2 > 0$$

allgemein: $x^2 y^2 - (x, y)^2 = F^2(x, y) \geq 0$



$$|x||y| \geq |(x, y)|$$

CAUCHY-SCHWARZ(-BUNYAKOWSKI)-Ungleichung

$$x^T \cdot G \cdot x = (A(x))^2$$

$$(q-p)^T \cdot G \cdot (q-p) = d(A(q), A(p))^2$$

Abstand der Bilder (Eigenschaften 1-3)

übernehmen:

Definition: $d'(P, Q) = d(A(P), A(Q))$

neuer „Abstand“ im alten Vektorraum (Hilbertraum)
 \mathbb{R}^n

„inneres Produkt“ : bilinear, kommutativ (symmetrisch)

inneres Produkt x mit x : quadratisch ; ≥ 0

und $= 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$B(x, y) = \sum_{i,j} g_{ij} \cdot x_i \cdot y_j$$

Bilinearform $g_{ij} = g_{ji}$

→ symmetrische Bilinearform

$$[x^T \cdot G \cdot y] \quad G^T = G$$

$$y = x \quad x^T \cdot G \cdot x$$

$$F(x) = B(x, x) = \sum_{i,j} g_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

$$g_{ij} = g_{ji}$$

quadratische Form

$$F(x) \geq 0 \quad \text{f.ä. } x \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{und } F(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$d(P, Q)^2 = F(q - p)$$

$$F(x) \geq 0; \quad F(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{quadratische Form}$$

positiv definit (pos. def. ; p.d.)

$$(F(x) \leq 0; \quad F(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{negativ definit})$$

$$F(x) \geq 0; \quad F(x) = 0 \text{ auch für } x \neq 0$$

positiv semidefinit

$$F(x) \leq 0; \quad F(x) = 0 \text{ auch für } x \neq 0$$

negativ semidefinit

ansonsten indefinit

Ist $F(x)$ eine positiv definite quadratische Form,
 so liefert $d(P, Q) = \sqrt{F(q-p)}$ eine Abstandsfunktion
 für die Punkte P und Q .

$$F(x) = x^T G \cdot x$$

$$(B(x, y) = x^T \cdot G \cdot y \\ \text{symmetrisch: } G^T = G)$$

$F(x)$ ist pos. def. $\Leftrightarrow G$ hat die Eigenschaft:
 alle Eigenwerte positiv

$$G = (g_{ij}) \quad G^T = G \quad (g_{ij} = g_{ji})$$

$$B(x, y) = x^T \cdot G \cdot y = (x, y)_g$$

$$F(x) = x^T \cdot G \cdot x = (x, x)_g$$

Abstandsfunktion

$$d(P, Q) = \sqrt{(q-p, q-p)_g}$$

g ?

Ist $F(x)$ eine positiv definite quadratische Form,
 so liefert $d(P, Q) = \sqrt{F(q-p)}$ eine Abstandsfunktion
 für die Punkte P und Q .

$$F(x) = x^T G \cdot x$$

$$(B(x, y) = x^T \cdot G \cdot y$$

symmetrisch: $G^T = G$)

$F(x)$ ist pos. def. $\Leftrightarrow G$ hat die Eigenschaft:
 alle Hauptminoren positiv

$$G = (g_{ij}) \quad G^T = G \quad (g_{ij} = g_{ji})$$

$$B(x, y) = x^T \cdot G \cdot y = (x, y)_g$$

$$F(x) = x^T \cdot G \cdot x = (x, x)_g$$

Abstandsfunktion

$$d(P, Q) = \sqrt{(q-p, q-p)_g}$$

\mathbb{R}^n inneres (skalares) Produkt

symmetrische Bilinearform $B(x, y) = x^T \cdot G \cdot y$

quadratische Form: $F(x) = B(x, x)$

positiv definit

Abstandsfunktion $d(P, Q) = \sqrt{F(q-p)}$

Metrik

Eigenschaften der Metrik (einer Metrik) auf \mathbb{R}^n :

$$1, \quad d(P, Q) \geq 0; \quad d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$$

$$2, \quad d(P, Q) = d(Q, P)$$

3, Dreiecksungleichung:

$$d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$$

Spezialfall: $G = \mathbb{E}_n$ $B(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
 $F(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$

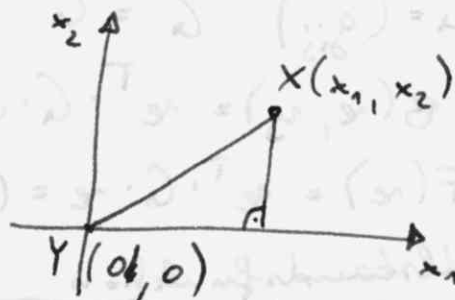
euklidische Geometrie
 euklidische Metrik auf \mathbb{R}^n

$n=1$: $d(x, y) = x, y \in \mathbb{R}$

$$= \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|$$

$n=2$: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$; $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$



Ebene: Gauß'sche Zahlenebene

$$z = x_1 + i \cdot x_2$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$\mathbb{C} = \{x_1 + i \cdot x_2 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$x_1 + i \cdot x_2 = y_1 + i \cdot y_2 \Leftrightarrow x_1 = y_1 \text{ und } x_2 = y_2$$

Körper der komplexen Zahlen

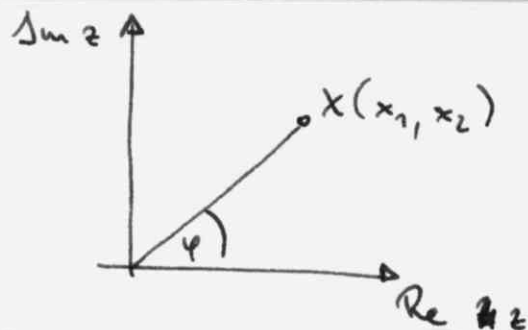
$$z_1 + z_2 = (x_1 + i \cdot x_2) + (y_1 + i \cdot y_2) = (x_1 + y_1) + i \cdot (x_2 + y_2)$$

Realteil Imaginärteil

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + i \cdot x_2) \cdot (y_1 + i \cdot y_2) = (x_1 y_1 - x_2 y_2) + i \cdot (x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Spezialfall: $z_2 = x_1 - i \cdot x_2 = \bar{z}_1$

$$z_1 \cdot \bar{z}_1 = x_1^2 + x_2^2 + i \cdot 0$$



$$d(0, X) = d(0, z) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{z_1 \bar{z}_1} = |z_1|$$

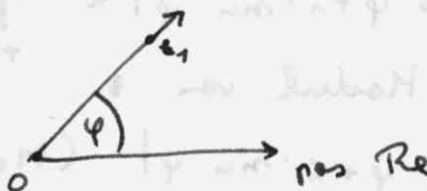
$$z_1 = x_1 + i \cdot x_2$$

im Bereich \mathbb{C} ebenfalls Metrik

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) &= \sqrt{(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)} = \sqrt{(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)} = \\ &= |z_1 - z_2| \end{aligned}$$

Argument: $\arg z_1 = \varphi$

$$0 \leq \varphi < 2\pi \text{ (360°)}$$



$$\text{Re: } x_1 = |z_1| \cdot \cos \varphi$$

$$\text{Im: } x_2 = |z_1| \cdot \sin \varphi$$

$$z = x + i \cdot y \quad ; \quad r = |z|$$

$$\varphi = \arg z$$

$$[r, \varphi] \quad r \geq 0 \quad ; \quad r = 0 \Rightarrow z = 0 \quad (\varphi \text{ beliebig})$$

$$r > 0 \quad ; \quad \varphi \text{ beliebige Zahl aus } \mathbb{R}$$

$$[r, \varphi_1] = [r, \varphi_2]$$

gleiche komplexe Zahl

$$r = 0 \quad ; \quad \varphi_1, \varphi_2 \text{ beliebig}$$

$$\begin{aligned} r > 0 \quad r \cdot \cos \varphi_1 + i \cdot r \cdot \sin \varphi_1 &= \\ &= r \cdot \cos \varphi_2 + i \cdot r \cdot \sin \varphi_2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow r \cdot \cos \varphi_1 = r \cdot \cos \varphi_2$$

$$r \cdot \sin \varphi_1 = r \cdot \sin \varphi_2$$

$$\Leftrightarrow \cos \varphi_1 = \cos \varphi_2$$

$$(r > 0) \quad \sin \varphi_1 = \sin \varphi_2$$

$\cos x, \sin x$: periodisch mit Periode 2π (360°)

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\varphi_2 \equiv \varphi_1 \pmod{2\pi}$$

$$z = x + i \cdot y = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) =$$

$$= |z| \cdot (\cos(\arg z) + i \cdot \sin(\arg z))$$

$$|\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$$

$|z|$ Modul von z

$|\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi|$ (Modul 1): unimodular

in \mathbb{R} : $x = |x| \cdot \operatorname{sgn} x$

$[r, \varphi]$ trigonometrische Darstellung von z

algebraische Darstellung: $x, y \in \mathbb{R}$

$$|z| = r \Rightarrow x + i \cdot y$$

$$z_1, z_2 \quad z_1 = [r_1, \varphi_1]$$

$$z_2 = [r_2, \varphi_2]$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot ((\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) + \\ &\quad + i \cdot (\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1)) = \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

$$z = z_1 \cdot z_2$$

$$z = [r_1, \varphi] = [r_1, r_2, \varphi_1 + \varphi_2]$$

$$\lambda = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

$$(\lambda > 0 \Rightarrow \varphi \equiv \varphi_1 + \varphi_2 \pmod{2\pi})$$

$$\Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$z_1 = z_2$$

$$z_1^2$$

$$z_1 \in [\lambda_1, \varphi_1]$$

$$z_1^2 \in [\lambda_1^2, 2\varphi_1]$$

$$z_1^n \in [\lambda_1^n, n \cdot \varphi_1]$$

$$\sqrt[n]{z_1} = \omega \Leftrightarrow \omega^n = z_1$$

$$[g, \varphi]$$

$$\omega^n: [g^n, n \cdot \varphi]$$

$$g^n = \lambda_1$$

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow g = 0$$

$$\sqrt[n]{0} = 0; \varphi \text{ beliebig}$$

$$\lambda_1 > 0: n \cdot \varphi \equiv \varphi_1 \pmod{2\pi}$$

d.h. es existiert $k \in \mathbb{Z}$, sodass $n\varphi - \varphi_1 = 2k\pi$

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n}$$

$$k=0: \varphi = \frac{\varphi_1}{n}$$

$$k=1: \varphi = \frac{\varphi_1 + 2\pi}{n}$$

\vdots

$$k=n-1: \varphi = \frac{\varphi_1 + 2(n-1)\pi}{n}$$

$$k=n: \varphi = \frac{\varphi_1 + 2n\pi}{n} = \frac{\varphi_1}{n} + 2\pi$$

$\Rightarrow n$ paarweise verschiedene Werte für $\sqrt[n]{z_1}$

$$|z_1 + z_2| \stackrel{?}{=} |z_1| + |z_2|$$

Welcher Zusammenhang zwischen LS und RS existiert tatsächlich?

Metrik:

Bsp.: \mathbb{R}^n positiv definite quadratische Form

$$F(v) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \cdot x_i \cdot x_j =$$

$$= v^T \cdot G \cdot v$$

Spezialfall: $F(v) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ $G = E_n$

euklidische Metrik

\mathbb{C}, \mathbb{R}^2 analog zu \mathbb{R}

$$d(0, z) = |z|$$

Definition: X ($\neq \emptyset$) Menge

Abstandsfunktion $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

mit Eigenschaften:

M1) $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
f.a. $x, y \in X$

M2) $d(x, y) = d(y, x)$ f.a. $x, y \in X$

M3) Dreiecksungleichung

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

$$\text{f.a. } x, y, z \in X$$

d heißt auch Metrik auf X

$\langle X, d \rangle$ heißt dann metrischer Raum

Sei X eine beliebige Menge ($X \neq \emptyset$)

$$x, y \in X$$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

Diskrete Metrik

KRONECKER-Delta : $\delta_{ab} = \begin{cases} 1 & a=b \\ 0 & a \neq b \end{cases}$

$$d(x, y) = 1 - \delta_{xy}$$

Metriken: M1) ✓ M2) ✓

M3) $d(x, y) = 0 \quad d(x, y) = 1$

$$LS \in \{0, 1\}$$

$$RS \in \{0, 1, 2\}$$

Die Dreiecksungleichung höchstens falsch, wenn

$$LS=1, RS=0$$

$$d(x, z) = 0; d(z, y) = 0$$

$$\Rightarrow x=z \text{ und } z=y$$

$$\Rightarrow x=y$$

$$\Rightarrow LS=0$$

M3 erfüllt

$$Y = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \quad \text{Spezialfall: } X_i = X$$

$$\Rightarrow Y = X^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in X_{(i)}\}$$

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)$$

M1) ✓

M2) ✓

M3) ✓

$$\text{Wenn } d_i(x_i, y_i) = \begin{cases} 0 & x_i = y_i \\ 1 & x_i \neq y_i \end{cases}$$

$$\text{dann } d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \text{Anzahl der Indizes } i \text{ mit } x_i \neq y_i$$

= Anzahl der Stellen, an denen sich das n -tupel (x_1, \dots, x_n) vom n -tupel (y_1, \dots, y_n) .

HAMMING-Distanz

Siehe Ebene, \mathbb{R}^3 , ...

euklidische Metrik: Kreisklinie $(M, r) =$

$$= \{x \mid d(M, x) = r\}$$

Mittelpunkt

Radius

Kreisscheibe: $\{x \mid d(M, x) \leq r\}$ (mit Rand)

(anschaulich: das Innere und der Rand)

Kreisscheibe ohne Rand: $\{x \mid d(M, x) < r\}$
(offene Kreisscheibe)

abgeschlossene Kreisscheibe

Kreisumgebung um M mit Radius r

$$\mathbb{R}^2 \quad F(x) = ax^2 + bxy + cy^2$$

$$a > 0$$

$$ac - b^2 > 0$$



Ellipse

$$F(x) = 1$$

Definition: Sei $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum,

es heißt $k(x, r) = \{y \mid d(x, y) < r\}$

offene Kugelumgebung um x mit Radius r .

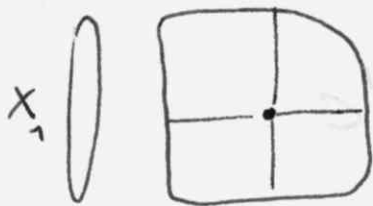
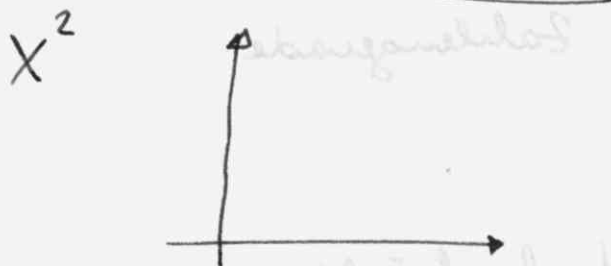
$$\bar{k}(x, r) = \{y \mid d(x, y) \leq r\}$$

abgeschlossene Kugelumgebung

Bsp.: X beliebige Menge
d. diskrete Metrik

$$x \in X \quad k(x, 1) = \{y \mid d(x, y) < 1\} = \\ = \{y \mid d(x, y) = 0\} = \{x\} =$$

$$x > 1: \quad k(x, 2) = X$$



HAMMING-Distanz
0, 1, 2

$$k(x, 1) = \{x\}; \quad 1 \leq 1$$

$$k(x, 1) = \quad 1 < 1 \leq 2$$

$$x > 2$$

$$k(x, 2) = \bar{k}(x, 1)$$

$$k(x, 3) = \bar{k}(x, 2) = X$$

Metrischer Raum

$\langle X, d \rangle$

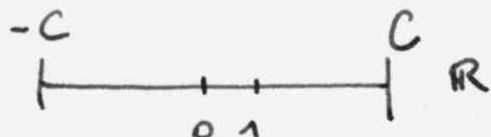
$\neq \emptyset$ Distanzfunktion
Metrik

Musterbeispiele: 1, X beliebig, d_D diskrete Metrik

2, \mathbb{R}^n , d_E euklidische Metrik

Spezialfall $n=1$: \mathbb{R} $d(x, y) = |x - y|$

($n=2$): \mathbb{C} \mathbb{R}^2 $d_E(z, w) = |z - w|$



Zahlengerade

A Teilmenge von \mathbb{R}

2 Möglichkeiten:

f. a. $x \in A$ gilt: $|x|$ beschränkt

d. h. es existiert $C > 0$

so dass f. a. $x \in A$ $|x| < C$

$\{y \mid -C < y < C\}$ Spezialfall von:

$\Delta(a, b) = \{y \mid a < y < b\}$

offenes Intervall a, b

$\Delta(-C, C)$; $C > 0$

$|x| = d(0, x)$

$k(0, C) = \{x \mid d(0, x) < C\} = (-C, C)$; $C > 0$

Beschränktheit von A: es existiert ein C , so dass die Abstände von $x \in A$ zum Punkt $0 < 0$

es existiert ein C , so dass $A \subseteq k(0, C)$

Wir sollten sagen: beschränkt bezüglich 0

beliebiger metrischer Raum $\langle X, d \rangle$

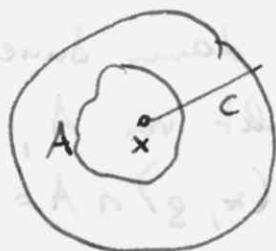
Definition: $A \subseteq X$, n heißt A bezüglich $x \in X$ beschränkt, wenn ein $C > 0$ existiert, so dass

$$A \subseteq k(x, C)$$

Behauptung: Wenn A bezüglich x beschränkt ist, so auch bezüglich beliebigem $y \in X$.

Beweis: Es gilt: es existiert $C > 0$, so dass $A \subseteq k(x, C)$

Behauptung: Es existiert $D > 0$, so dass $A \subseteq k(y, D)$
 $\forall z \in A: d(z, y) \leq d(y, x) + d(x, z) < d(y, x) + C = D$

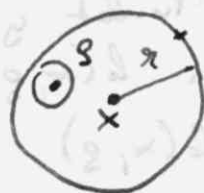


$\langle X, d \rangle$ diskreter Raum

jede Menge $A \subseteq X$ ist beschränkt

also X selbst beschränkt

Trivial: A beschränkt; $B \subseteq A \rightarrow B$ beschränkt



Speziell: euklidische Geometrie der Ebene

$$k(z, s) \subseteq k(x, r)$$

$$\text{f. a. } z \in k(x, r) = \{z \mid d(x, z) < r\}$$

offen $\frac{d(x, z) + 1}{2}$

Beweis: $d(x, z) < r$

$$s = \frac{r - d(x, z)}{2} > 0$$

$$d(x, z) + s < r$$

$$y \in k(z, s) \text{ ist } d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < d(x, z) + s < r$$

$$k(x, \varepsilon) \subseteq k(x, \varepsilon)$$

Definition: Sei $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum:

$$A \subseteq X$$

- 1, $x \in X$ heißt innerer Punkt von A , wenn eine Kugelumgebung $k(x, \varepsilon)$ existiert, die ganz in A liegt, d.h. es existiert $\varepsilon > 0$, sodass $k(x, \varepsilon) \subseteq A$
es folgt $x \in k(x, \varepsilon) \subseteq A \rightarrow x \in A$

$A^\circ = \{x \mid x \text{ innerer Punkt von } A\}$ dann Inneres von A

- 2, $x \in X$ heißt äußerer Punkt von A , wenn $k(x, \varepsilon)$ existiert, sodass $k(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$

$\{x \mid x \text{ äußerer Punkt von } A\}$ das Äußere von A
 $x \notin A$

- 3, $x \in X$ heißt Randpunkt von A , wenn für jedes $k(x, \varepsilon)$:

$k(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ (es existiert Punkt $y \in A$ in $k(x, \varepsilon)$)

es existiert Punkt $y \notin A$ in $k(x, \varepsilon)$
 $y \in C(A)$

$$k(x, \varepsilon) \cap C(A) \neq \emptyset$$

Menge der Randpunkte von A heißt Rand von A : $\text{Rol } A = \text{Rol } (A)$

Bemerkung: 1, das Äußere von A

$$k(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset \Leftrightarrow k(x, \varepsilon) \in C(A)$$

also auch $x \in C(A)$

also folgt, dass das Äußere von $A =$
 $=$ Inneres von $C(A) = C(A)^\circ$

2, $X = A^\circ$ oder $X = \text{Rd } A$ oder $X = C(A)$

Zerlegung von X in (höchstens) 3 Mengen
 (paarweise disjunkt)

3, $A^\circ \subseteq A \subseteq A^\circ \cup \text{Rd}(A) = \bar{A}$

Abschluss von A

4, Definition: A heißt offene Menge, wenn $A = A^\circ$

A heißt abgeschlossene Menge wenn $A = \bar{A}$
 $A \cap \text{Rd}(A) = \emptyset$
 $\text{Rd}(A) \subseteq A$

$\Rightarrow C(A)$ offen

metrischer Raum $\langle X, d \rangle$ $A \subseteq X$

Inneres von A A°
Rand von A $Rd(A)$
Äußeres von A $C(A)^\circ$

$\left. \begin{array}{l} A^\circ \\ Rd(A) \end{array} \right\} \bar{A}$ Abschluss von A

A ist eine offene Menge: $A = A^\circ$

A ist eine abgeschlossene Menge: $Rd(A) \subseteq A$

A offen: $Rd(A) = Rd(C(A))$

A offen $\Leftrightarrow C(A)$ abgeschlossen

$A = X = X^\circ$ offene Menge

\emptyset : abgeschlossene Menge

$Rd \emptyset$

$x \in Rd \emptyset \Leftrightarrow$ für jedes $k(x, r)$ gilt:

$$k(x, r) \cap \emptyset \neq \emptyset$$

$$\text{und } k(x, r) \cap C(\emptyset) \neq \emptyset \quad \underline{\text{Widerspruch}}$$

d.h. $Rd \emptyset = \emptyset$

$\emptyset = \emptyset^\circ$ da für jedes $x \in \emptyset$

existiert $k(x, r) \subseteq \emptyset$

genauer: es existiert kein $x \in \emptyset$ für das
dies nicht gilt

also \emptyset offen

$X = C(\emptyset)$ abgeschlossen

$Rd X = \emptyset$

\emptyset, X gleichzeitig offen und abgeschlossen

weitere offene Mengen z.B. offene $K(x, \varepsilon)$

$\langle X, d \rangle$ Menge der offenen Mengen von X

$$\{\emptyset, X\} \in \mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

7

Topologie auf X

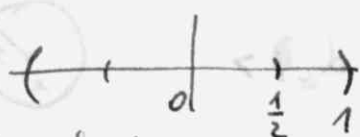
offene Mengen: 1, \emptyset , X offen

2, Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

3, Der Durchschnitt endlich vieler offener Menge ist offen.

Bsp.: für unendlich viele offene Mengen, deren Durchschnitt nicht offen ist

$$\mathbb{R}, |y-x|$$



$$K(0, \frac{1}{n})$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K(0, \frac{1}{n}) = \{0\} = A$$

$$A^\circ = \emptyset$$

$$\text{Rd } A = \{0\}$$

$\langle X, d_0 \rangle$ diskrete Metrik also A abgeschlossen, nicht offen

$$A \subseteq X \quad x \in A \quad K(x, \frac{1}{2}) = \{x\} \subseteq A$$

$$\Rightarrow x \in A^\circ$$

$$\Rightarrow A = A^\circ$$

jede Teilmenge von X ist eine offene Menge.

auch jede Teilmenge von X ist abgeschlossen.

liegt daran: $\text{Rd } A = \emptyset$

$$\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$$

diskrete Topologie

$\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ indiskrete Topologie

$\langle X, d_1 \rangle \quad \langle X, d_2 \rangle$

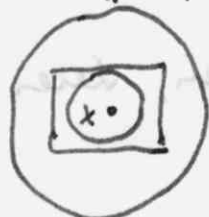
A ist offen bezüglich $d_1 \Leftrightarrow A$ ist offen bzgl. d_2
 x innerer Punkt von A bezüglich d_1

$\Leftrightarrow x$ innerer Punkt von A bezüglich d_2

es existiert eine Kugelumgebung $K_{d_1}(x, 1) \subseteq A$

$\Leftrightarrow K_{d_2}(x, 1) \subseteq A$

sicher dann, wenn jede Kugelumgebung $K_{d_1}(x, r)$ eine $K_{d_2}(x, r')$ enthält und umgekehrt



solche Metriken heißen äquivalente Metriken auf der Menge X

Bsp. $X = \mathbb{R}^2$
 \downarrow
 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\langle X, d_E \rangle$



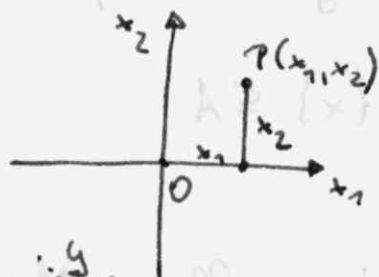
$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) =$$

$$d_E(x_1, y_1) + d_E(x_2, y_2) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$$x_1 > 0; x_2 > 0$$

$$d(0, P) = x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

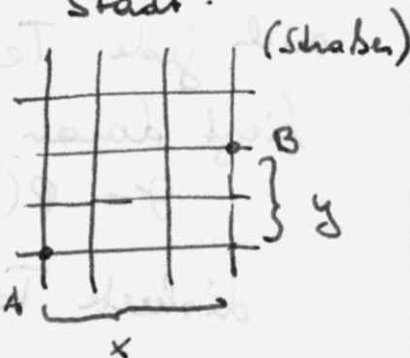


Taxifahrermetrik

$$d_T(P, Q) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$$P(x_1, x_2), Q(y_1, y_2)$$

Stadt:



inneres Produkt : "Kreise"

$$\{Q \mid d(P, Q) = r\}$$

$$F(q-p) = r^2$$

$$d_G = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$



\mathbb{R}^n Metrik

euklidische Metrik: $d_G(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$

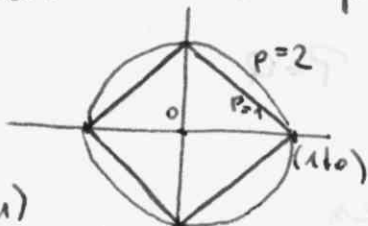
Taxifahrermetrik: $d_T(P, Q) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

bezüglich der Eigenschaften innerer Punkt, Randpunkt, äußerer Punkt einer Menge äquivalent



$$d_p(P, Q) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p}$$

damit Metrik: $p \geq 1$

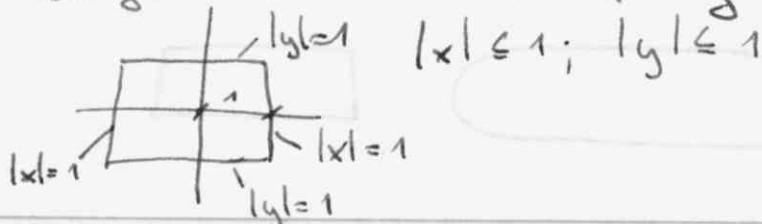


$K_p(0,1)$

$1 < p < 2$: Kurven zwischen $p=1$ und $p=2$

$2 < p$: Kurve außerhalb $p=2$

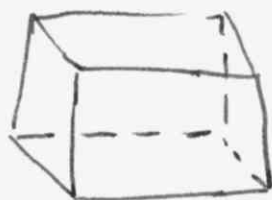
alle Kurven innerhalb des Quadrats mit Seitenlänge 2 um den Ursprung



$$\max(|x|, |y|)$$

$$P, Q \in \mathbb{R}^n$$

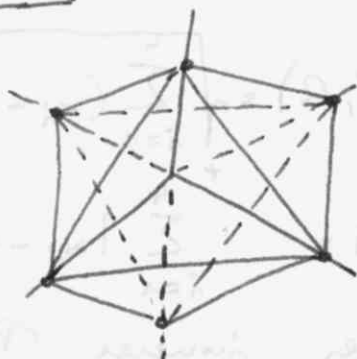
$$\max_{1 \leq i \leq n} (|x_i - y_i|) = d_\infty(P, Q)$$



\mathbb{R}^3 Kubus

\mathbb{R}^n Hyperkubus

Raumtaxi:



Oktaeder

\mathbb{R}^n : Kreuzpolytop

Eichbereich



Metrik \mathbb{R}^2 :

beschränkt

Sternbereich (in jeder Richtung mind. 1 Randpunkt)

Messung ist innerer Punkt (bzgl. d_∞)

damit M1 erfüllt: $d(P, Q) \geq 0$

$$d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$$

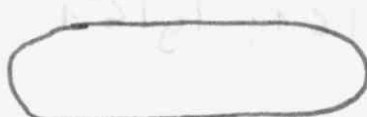
M2: symmetrisch bezüglich 0

M3: Dreiecksungleichung: konvex

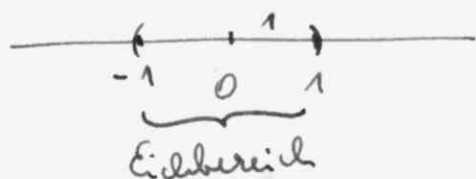


nicht konvex

z.B. regelmäßiges Sechseck



R:



$$d(x, y) = |x - y|$$

$$K(0, a) = \{x \mid |x - 0| = |x| < a\}$$

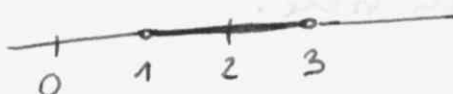
$$-a < x < a$$

Definition: $a, b \in \mathbb{R}$

offenes Intervall: (a, b) ($= I(a, b)$) =

$$= \{x \mid a < x < b\}$$

$$(1, 3) = \{x \mid 1 < x < 3\}$$



$$(3, 1) = \{x \mid 3 < x < 1\} = \emptyset$$

$$(1, 1) = \{x \mid 1 < x < 1\} = \emptyset$$

Jedes offene Intervall ist eine offene Menge
(bezüglich dieser Metrik $|x - y|$)

$$a < b: \quad R_d(a, b) = \{a, b\}$$

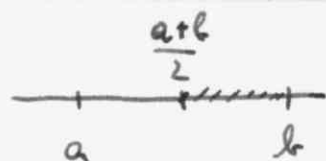
abgeschlossenes Intervall: $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$

$$[3, 1] = \emptyset$$

$$[1, 1] = \{1\}$$

halboffene Intervalle: $[a, b)$; $(a, b]$

(a, b)



Mittelpunkt

$$d\left(\frac{a+b}{2}, b\right) = b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} = d\left(\frac{a+b}{2}, a\right)$$

$$(a, b) = K\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$$

(Voraussetzung: $a < b$)

(a, b) oder $[a, b]$

$a < b$

So liegt in diesem Intervall mindestens eine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ und mindestens eine irrationale Zahl $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; sogar unendlich viele.



Die rationalen Zahlen liegen auf der Zahlengeraden dicht.

$$(a, x_1) \subset (a, b)$$

$$(a, x_2) \subset (a, x_1) \subset (a, b)$$

$$\vdots$$

ineinander geschachtelte Intervalle:

$$I_0 = (a_0, b_0)$$

$$I_1 = (a_1, b_1)$$

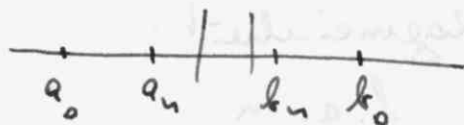
$$\vdots$$

$$I_n = (a_n, b_n)$$

$$I_1 \subseteq I_0$$

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$$

$$l(I_n) = b_n - a_n \quad \text{Länge des Intervalls}$$



$$l(I_n) \geq l(I_{n+1}) \geq \dots$$

$$l(I_0) \geq \dots \geq l(I_n)$$

monoton fallende Folge reeller Zahlen (positiv)

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \dots \leq b_1 \leq b_0$$

monoton wachsende Folge
reeller Zahlen

monoton fallende Folge
reeller Zahlen

Spezialfall: „ $l(I_n)$ wird beliebig klein“

d.h. Zu jeder positiven reellen Zahl $\varepsilon > 0$ existiert

ein Intervall I_n mit $l(I_n) < \varepsilon$

$$(\Rightarrow l(I_k) < \varepsilon \text{ f. a. } k \geq n)$$

heißt Intervallschachtelung.

Axiom von CANTOR und DEDEKIND:

Sei $I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots$ eine Intervallschachtelung, so existiert genau eine reelle Zahl ξ im Durchschnitt der Intervalle

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n = \{\xi\}$$

Bemerkung: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$ kann sicher nicht mehr als eine reelle Zahl enthalten.

Beweis: indirekt

Angenommen $\xi, \eta \in D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n \subseteq \Delta_n$ f.a. n

ohne Beschränkung der Allgemeinheit:

$$a_n < \xi < \eta < b_n \quad \text{f.a. } n$$

$$b_n - a_n > \underbrace{\eta - \xi}_{\varepsilon > 0} > 0 \quad \text{f.a. } n$$

dann gilt: es existiert ein N , sodass $b_N - a_N = \varepsilon$
 $\varepsilon < b_N - a_N < \varepsilon$ Widerspruch!

Spezialfall davon: $\Delta_n = K(\xi, \varepsilon_n)$

$$\varepsilon_0 \geq \varepsilon_1 \geq \dots \geq \varepsilon_n \geq \dots$$

beliebig klein

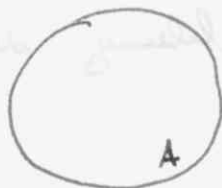
in allgemeinerer Situation:

$\langle X, d \rangle$ metrischer Raum

$A \quad x \in A$, sodass eine $K(x, \varepsilon)$ existiert,
 die kein weiteres Element enthält,

$$\text{d.h. } K(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}$$

$x \dots$ isoliertes Element von A



$$\odot x \in A$$

euklidische Metrik

$\langle X, d_0 \rangle$ diskrete Metrik (d_H)

Jeder Punkt $x \in A$ ist isolierter Punkt von A

$$K(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$$

$\langle X, d \rangle$ metrischer Raum

Multimenge von Elementen aus X

Vielfachheiten der Elemente

abzählbar unendlich

N	0	1	2	...	n	...
Multimenge	\updownarrow	\updownarrow	\updownarrow		\updownarrow	
M	a_0	a_1	a_2	...	a_n	...

Projektion

$a_i = a_j (=a)$ f. $i \neq j$ erlaubt

a kommt in dieser Multimenge mit ent-
sprechender Vielfachheit vor

z.B. Vielfachheit von $a = 3$ (k)

So existieren genau $3(k)$ Indizes

$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k$, sodass $a_{n_1} = a_{n_2} = a_{n_3} (= \dots = a_{n_k}) = a$

Bemerkung: 1, endliche Vielfachheiten

Wir erlauben sogar Vielfachheit unendlich.

(abzählbar unendlich)

2, jede Bijektion definiert eine Aufzählung der Elemente der Multimenge.

$\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$
„geordnetes unendlich-tupel“

$\langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \rangle$

Definition: Folge von Elementen aus X
(unendliche Folge)

Wichtig: Die Trägermenge kann durchaus endlich sein.

Bsp.: $a_n = 0$ n gerade
 $a_n = 1$ n ungerade

$\langle 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots \rangle$

Trägermenge: $\{0, 1\}$

$\langle 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots \rangle$

gleiche Multimenge
verschiedene Folgen

$A \subseteq X$

Beschränktheit

Menge

$x_0 \in X$

beliebig

So existiert ein $C > 0$ (reelle Zahl)

so dass $A \in K(x_0, C)$

d.h. für jedes $y \in A$ gilt $y \in K(x_0, C)$

$(d(x_0, y) < C)$

Übertragen auf Multimengen:

beschränkt: wenn die Trägermenge beschränkt

Folge beschränkt, wenn für jedes $a_n \in K(x_0, c)$

metrischer Raum $\langle X, d \rangle$ Multimengen M

abzählbar unendlich

(jede Vielfachheit höchstens

abzählbar unendlich)

M in unendlich vielen ~~oder~~ als Folge $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$
(aufschreiben

$x \in X$

$K(x, \varepsilon)$

Elemente aus M (mit Vielfachheiten)

Glieder $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$

Definition: x heißt Häufungspunkt (HP) von M

respektive von Folge $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, wenn in jeder

$K(x, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) unendlich viele Elemente von

M (mit ihren Vielfachheiten gezählt) respektive

unendlich viele Glieder der Folge $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$

liegen (d.h. es existieren unendlich viele natürliche

Zahlen: $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$

so dass alle $a_{n_k} \in K(x, \varepsilon)$

Bemerkung: 1, Ist x Häufungspunkt der Folge

$\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ und entsteht $\langle b_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$

durch Umräumen der Folgenglieder, so ist

x auch HP der Folge $\langle b_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$

2, Ist x HP der Multimenge M (oder Folge

$\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$) und entsteht M' aus M (bzw.

$\langle b_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$) durch Weglassen

unendlich vieler Elemente, so ist x auch HP

von M' (bzw. von $\langle b_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$)

3, (Umkehrung von 2): Entsteht M' aus $M(\langle b_n \rangle)$ aus $\langle a_n \rangle$ durch Hinzufügen endlich vieler Elemente, und ist x HP von M , so auch von M' .

Beispiel: $\langle X, d_p \rangle$ ($\langle X, d_H \rangle$)

X unendlich

abzählbar unendliche Menge $M \subseteq X$

$K_0(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$ Vielfachheit in $M \leq 1$

\uparrow

in dieser Umgebung liegen höchstens

endlich viele Elemente von M

$\Rightarrow x$ nicht HP von M

X endlich

M abzählbar unendliche Multimenge

Trägermenge in X

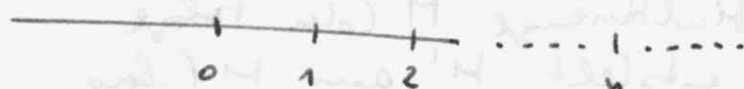
\Rightarrow mindestens ein Element von $M(x)$ hat Vielfachheit unendlich; also liegen in jeder $K(x, \varepsilon)$ unendlich viele Elemente von M (alle gleich x)

also ist x HP von M

$\langle \mathbb{R}, |y-x| \rangle$ euklidische Metrik auf \mathbb{R}

Multimenge M

Bsp.: $M = \mathbb{N}$



$x \in \mathbb{R}$: Fall 1: $x \in \mathbb{N}$

$K(x, \frac{1}{4})$

einziges Element von $M(=\mathbb{N})$ in $K(x, \frac{1}{4})$ ist x , da

für jedes $k \in \mathbb{Z}$ $|k - x| \geq 1$.

Fall 2: $x \notin \mathbb{N}$

$x < 0$ oder $n < x < n+1$



$$d = \min(x - n, (n+1) - x)$$

Distanz von x zum nächsten natürlichen Zahl

$$d = -x$$

$K(x, \frac{d}{2})$ enthält keine natürliche Zahl

$\Rightarrow x$ ist sicher kein HP

gilt auch: $\langle n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ hat kein HP in $\langle \mathbb{R}, |y - x| \rangle$

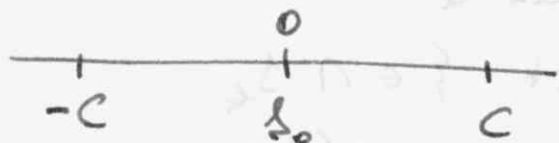
Sei M eine beschränkte Multimenge reeller Zahlen
(in $\langle \mathbb{R}, |y - x|$ euklidische Zahlengerade), d.h.
es existiert eine reelle Zahl $C > 0$, sodass
f.a. $x \in M$ gilt $|x| < C$; $x \in K(0, C)$

analog für $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ (beschränkte Folge)

Dann hat M (bzw. $\langle a_n \rangle$) mindestens eine HP
(Häufungsstellenprinzip von BOLZANO - WEIERSTRASS)

Beweis: $I_0 = (-C, +C)$ $M \subseteq I_0$

alle a_n sind in I_0



Entweder die linke oder die rechte Hälfte
von I_0 (oder beide) enthält unendlich viele
Elemente von M (unendlich viele a_n).

Sei diese ~~Halbte~~ Hälfte S_1

$$S_0 \supseteq S_1 \quad l(S_1) = \frac{1}{2} \cdot l(S_0)$$

$$\vdots$$
$$S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \quad l(S_2) = \frac{1}{4} \cdot l(S_0)$$

$$\vdots$$
$$S_k \supseteq S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots \supseteq S_{k-1} \supseteq S_k$$

$$l(S_k) = \frac{1}{2^k} \cdot l(S_0)$$

alle S_n enthalten unendlich viele Elemente von M (unendlich viele a_n)

Intervallschachtelung:

$$S_0 \supseteq S_1 \supseteq \dots \supseteq S_k \supseteq \dots$$

$$l(S_k) = \frac{1}{2^k} \cdot l(S_0) = \frac{2C}{2^k}$$

Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig)

Gesucht: k , sodass $(0 <) \frac{2C}{2^k} < \varepsilon$

$$\text{äquivalent: } \frac{2^k}{2C} > \frac{1}{\varepsilon} > 0$$

$$\text{äquivalent: } 2^k > \frac{2C}{\varepsilon}$$

$$\text{äquivalent: } k \cdot \log 2 > \log \frac{2C}{\varepsilon}$$

$$k > \frac{\log \frac{2C}{\varepsilon}}{\log 2}$$

\Rightarrow es existiert ein k

also: existiert $\xi \in \mathbb{R}$ mit $\xi \in \bigcap S_k$

$$K(\xi, \varepsilon)$$

$$k \text{ so, dass } l(S_k) < \varepsilon$$

$$S_k \subset K(\xi, \varepsilon)$$

($\varepsilon > 0$ beliebig)

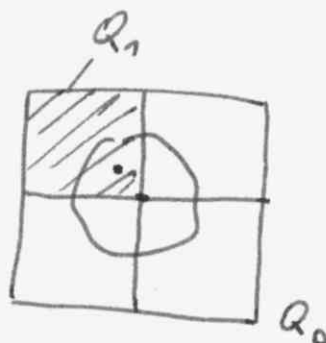
daher enthält $K(\xi, \varepsilon)$ unendlich viele Elemente von $M(a_n)$

also ist $\{HP \text{ von } M(\langle q_n \rangle)\}$

Bemerkung: 1, analoges gilt für \mathbb{R}^p

~~Äquivalenz~~ mit zur euklidischen Metrik äquivalenter Metrik

z.B.: $p=2$:



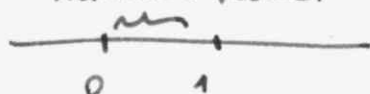
2, Wesentlich: \mathbb{Q}
reeller HP

in \mathbb{Q} (respektive \mathbb{Q}^p) muss kein HP existieren

z.B.: $\langle 1; 1,4; 1,41; 1,414, \dots \rangle$

Näherungen zu $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

3, M Menge der rationalen Zahlen $0 \leq q_n \leq 1$
rationale Zahlen



abzählbar unendlich
 M beschränkt

Jede reelle Zahl x mit $0 \leq x \leq 1$ ist HP von M
(über abzählbar unendlich viele)