17-12-2002

Schriftliche Prüfung

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathematik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2–stündig mit Unterlagen

17. Dezember 2002

$\frac{x-2}{5-2} \cdot \frac{1}{3}$

$Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}(X - X_1)$

A) Beispiele[1]

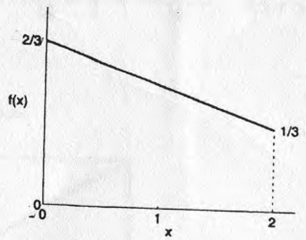
1. Die Dichte einer sG X ist gegeben wie in der Abbildung:

(a) Ermitteln und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion. (1.5)

(b) Berechnen Sie den Mittelwert. (1)

(c) Berechnen Sie die Varianz. (1)

(d) Welches Quantil ist $x = 1$? (0.5)



2. Die Verteilung einer 2–dimensionalen diskreten sG (X, Y) ist gegeben durch:

		Y=1	Y=2	Y=3
X	1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
	2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$
	3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0

$E(X \cdot Y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{12}$ 1tel

(a) Sind X und Y unabhängig? (0.5)

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß XY eine gerade Zahl ist? (0.5)

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Y ungerade ist, wenn X ungerade ist? (1)

(d) Man berechne die Korrelation von X und Y. (2)

3. Es gibt die Vermutung, daß die Zahl der Fehler, die bei einem Systemprogramm entdeckt werden, einer Poissonverteilung folgt. Über 50 Wochen ergab sich das folgende Bild:

Zahl der entdeckten Fehler (i) pro Woche	Zahl der Wochen mit i Fehlern
0	14
1	11
2	9
3	6
4	5
5+	5

1 3 6 3 6 18 48

Man prüfe ($\alpha = 0.05$) die Vermutung mittels Chiquadrat–Anpassungstest. (4)

[1]Pro Beispiel 4 Punkte (Punkteschlüssel in Klammern).

B) Beantworten bzw. berechnen Sie:[2]

(a) Auf einer Kreislinie befinden sich $n \geq 4$ Punkte (in beispielsweise äquidistanten Abständen). Drei (verschiedene) Punkte werden zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind sie benachbart? Ermitteln Sie einen (möglichst vereinfachten) allgemeinen Ausdruck.

(b) Ein Zufallszahlengenerator ($U_{(0,1)}$–verteilte Zahlen) liefert den Wert 0.4860. Erzeugen Sie auf der Basis dieser Zahl je eine Beobachtung einer (i) $U_{(-1,1)}$–verteilten und einer (ii) poissonverteilten sG mit Mittel 3.

(c) Auf einem Christbaum befinden sich 16 elektrische Kerzen, deren Brenndauern (unabhängig) exponentialverteilt mit Mittel 1000 Stunden sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit brennen nach 2 Wochen noch alle Kerzen?
(Man nehme an, daß die Kerzen ununterbrochen eingeschaltet sind.)

(d) Der Graph einer Verteilungsfunktion stellt sich im (Normal–) Wahrscheinlichkeitsnetz wie in der Abbildung dar (vgl. Beiblatt). Entnehmen Sie der Abbildung ungefähre Werte für den Mittelwert, die Streuung und das 95%–Quantil der Verteilung.

(e) Was ist der Unterschied zwischen einem Stichprobenmittel und dem Mittel einer Verteilung? Welche Beziehungen gibt es zwischen diesen beiden „Mittelwerten"?

Ergebnisse der schriftlichen Prüfung:
Do 19. Dez. 2002 ab 16:00 (Aushang am Institut)
Telefonische Auskunft: 58801/10724

[2]Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte.

Lösung zur schriftlichen Prüfung EWST für Inf/Vm

17. Dezember 2002

Teil A)

1. (a) Die Dichte ist gegeben durch:

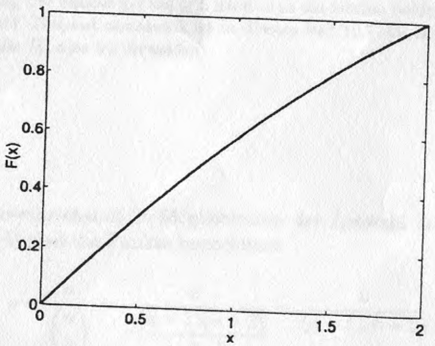
$$f(x) = -\frac{x}{6} + \frac{2}{3} = \frac{4-x}{6}, \quad 0 \le x \le 2$$

Die Verteilungsfunktion ergibt sich also zu:

$$F(x) = \int_0^x \left(-\frac{u}{6} + \frac{2}{3}\right) du = \left(-\frac{u^2}{12} + \frac{2u}{3}\right)\Big|_0^x = -\frac{x^2}{12} + \frac{2x}{3} = \frac{-x^2 + 8x}{12}, \quad 0 \le x \le 2$$

($F(x) = 0$ für $x < 0$ und $F(x) = 1$ für $x > 2$.)

Die folgende Abbildung zeigt die Verteilungsfunktion:



(b) Den Mittelwert berechnet man wie folgt:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^2 x\left(-\frac{x}{6} + \frac{2}{3}\right) dx = -\frac{x^3}{18} + \frac{2x^2}{6}\Big|_0^2 = -\frac{4}{9} + \frac{4}{3} = \frac{8}{9} = 0.8889$$

(c) Die Varianz berechnet man über den Verschiebungssatz:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^2 x^2\left(-\frac{x}{6} + \frac{2}{3}\right) dx = -\frac{x^4}{24} + \frac{2x^3}{9}\Big|_0^2 = -\frac{2}{3} + \frac{16}{9} = \frac{10}{9} = 1.1111$$

Daraus folgt:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \frac{10}{9} - \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{26}{81} = 0.3210$$

(d) $F(1) = \frac{7}{12} = 0.5833$; $x = 1$ ist also das 58.33% Quantil der Verteilung.

2. (a) Wie man an den Randverteilungen sieht, sind X und Y nicht unabhängig; dazu müßte gelten:

$$p(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y), \quad \forall (x,y)$$

Dies ist jedoch nicht der Fall (sieht man sofort bei $p(3,3) = 0 \ne 1/6 \cdot 1/6$).

		Y 1	Y 2	Y 3	
X	1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
X	2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
X	3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{6}$
		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

(b) Ergibt sich durch Addition der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten:

$$W\{XY \text{ gerade}\} = W\{(X,Y) \in \{(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2)\}\} = 2\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

(c) Hier ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit gefragt:

$$W\{Y \text{ ungerade} \mid X \text{ ungerade}\} = \frac{W\{X \text{ ungerade und } Y \text{ ungerade}\}}{W\{X \text{ ungerade}\}} = \frac{3\cdot 1/12}{1/3 + 1/6} = \frac{1}{2}$$

(d) Auf Grund der Symmetrie der Verteilung gilt:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 1\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{6} = \frac{11}{6}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2) = 1\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{1}{2} + 9\cdot\frac{1}{6} = \frac{23}{6}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = \frac{23}{6} - \left(\frac{11}{6}\right)^2 = \frac{17}{36}$$

Die Kovarianz berechnet man mit dem Verschiebungssatz:

$$\mathbb{E}(XY) = 1\cdot\frac{1}{12} + 4\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{12} + 12\cdot\frac{1}{12} = \frac{13}{4}$$

$\Big(1\cdot 1 \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} + 1\cdot 3\cdot \frac{1}{12} + 2\cdot 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot 2\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot$ [illegible] $+ 3\cdot 1\cdot\frac{1}{12} + 3\cdot 2\cdot\frac{1}{12}$

Daraus folgt:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = \frac{13}{4} - \left(\frac{11}{6}\right)^2 = -\frac{1}{9}$$

Die Korrelation ist also gegeben durch:

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}} = -\frac{1/9}{17/36} = -\frac{4}{17}$$

3. Es ist $H_0 : X \sim P_\mu$ (gegen $H_0 : X \nsim P_\mu$) zu testen; der unbekannte Parameter μ muß zuerst plausibel geschätzt werden:

$$l(\mu; D) = \prod_{i=1}^n \frac{\mu^{k_i}\, e^{-\mu}}{k_i!} = C\,\mu^{\sum_{i=1}^n k_i}\, e^{-n\mu} \quad \longrightarrow \quad \ln l(\mu; D) = \ln C + \sum_{i=1}^n k_i \ln\mu - n\mu$$

$$\frac{d\ln(\mu; D)}{d\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i}{\mu} - n = 0 \quad \longrightarrow \quad \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i}{n}$$

Hier gilt:

$$\widehat{\mu} = \frac{0 \cdot 14 + 1 \cdot 11 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 5}{50} = \frac{92}{50} = 1.84$$

Klasse	H	$\widehat{w}$	$e = 50\,\widehat{w}$	$(H-e)^2/e$
0	14	0.1588	7.9409	4.6233
1	11	0.2922	14.6112	0.8925
2	9	0.2688	13.4423	1.4681
3	6	0.1649	8.2446	0.6111
4	5	0.0759	3.7925	0.3844
5+	5	0.0394	1.9685	4.6686
Summe	50	1	50	12.6481

Der Wert der Chiquadratstatistik, $T = 12.6481$, ist mit dem 95% Quantil der χ^2-Verteilung mit $r - s - 1 = 6 - 1 - 1 = 4$ Freiheitsgraden zu vergleichen:

$$T > \chi^2_{4;\,0.95} = 9.4877$$

Die H_0 (= Poissonverteilung) ist also zu verwerfen.

Bem.: Zur Erfüllung der Faustregel $n\widehat{w} \geq 5$ kann man die letzten beiden Klassen in eine zusammenfassen; der Wert der Chiquadratstatistik ist in diesem Fall 10.7141. Auch dieser Wert ist größer als $\chi^2_{3;\,0.95} = 7.8147$, die H_0 also zu verwerfen.

Teil B)

(a) Es gibt $\binom{n}{3}$ gleichwahrscheinliche Möglichkeiten der Auswahl von 3 Punkten; bei n dieser Auswahlen ($n \geq 4$) sind die Punkte benachbart:

$$p = \frac{n}{\binom{n}{3}} = \frac{n}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}} = \frac{6}{(n-1)(n-2)}, \quad n \geq 4$$

(b) Die Verteilungsfunktion der $U_{(-1,1)}$-Verteilung ist:

$$F(x) = \frac{x+1}{2} \quad \longrightarrow \quad F^{-1}(u) = 2u - 1$$

Die erzeugte Zahl ist also $2 \cdot 0.4860 - 1 = -0.0280$.

Im zweiten Fall muß man die Verteilungsfunktion der P_3-Verteilung auflisten, bis sie größer (oder gleich) 0.4860 ist:

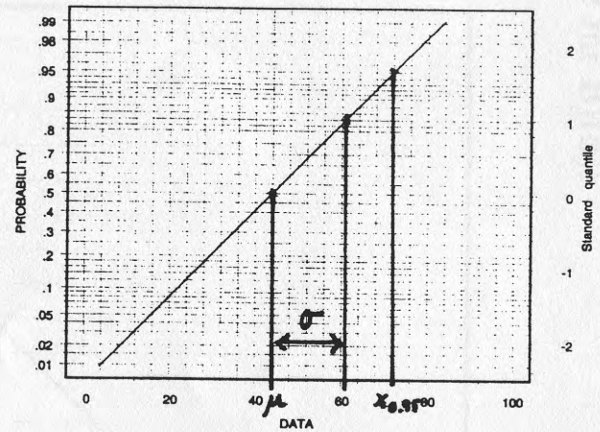
k	0	1	2	3
$\sum_{i=0}^{k} \frac{3^i e^{-3}}{i!}$	0.0498	0.1991	0.4232	0.6472

Die erzeugte Zahl ist also 3.

(c) Die Ausfallzeit der ersten Kerze ist das Minimum der Ausfallzeiten aller Kerzen (2 Wochen = 336 Stunden):

$$W\{X_{min} > 336\} = \left(e^{-336/1000}\right)^{16} = e^{-336 \cdot 16/1000} = e^{-5.376} = 0.0046$$

(d) Die Verteilungsfunktion einer Normalverteilung ist im (Normal-) W-Netz eine Gerade.



Dem Netz entnimmt man die folgenden (groben) Werte:

Mittelwert (am Schnittpunkt der Geraden mit der 50% Linie ablesen): 44

Sreuung (Differenz der Schnittpunkte von 84.13% und 50% Linie): 61 − 44 = 17

95% Quantil (am Schnittpunkt der Geraden mit der 95% Linie ablesen): 72

(e) Das Mittel (der Mittelwert, der Erwartungswert) einer Verteilung ist eine theoretische Größe; es wird z.B. im Fall einer kontinuierlichen Verteilung über die Dichte berechnet:

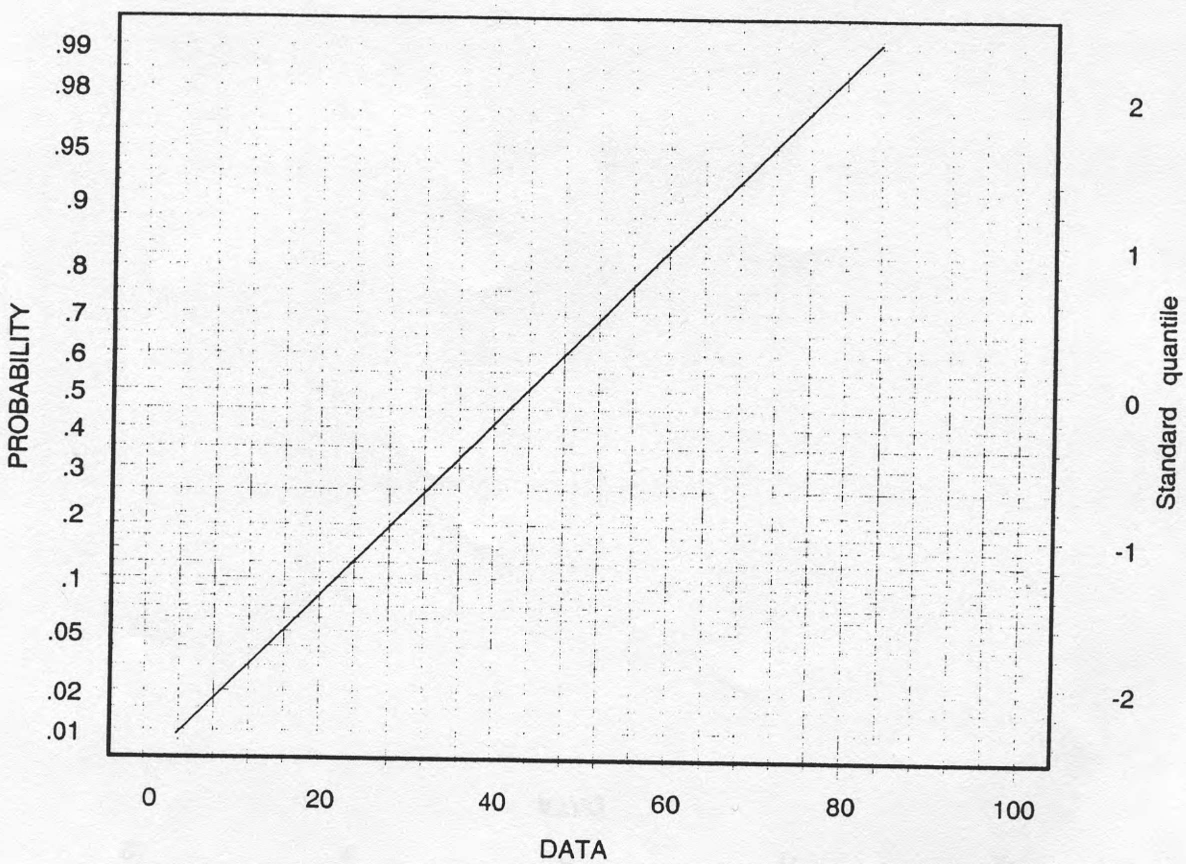
$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

Das Stichprobenmittel ist ein Schätzer (eine Schätzfunktion) für das Mittel einer Verteilung; es wird auf Basis einer Stichprobe, $X_1, \ldots, X_n$, berechnet:

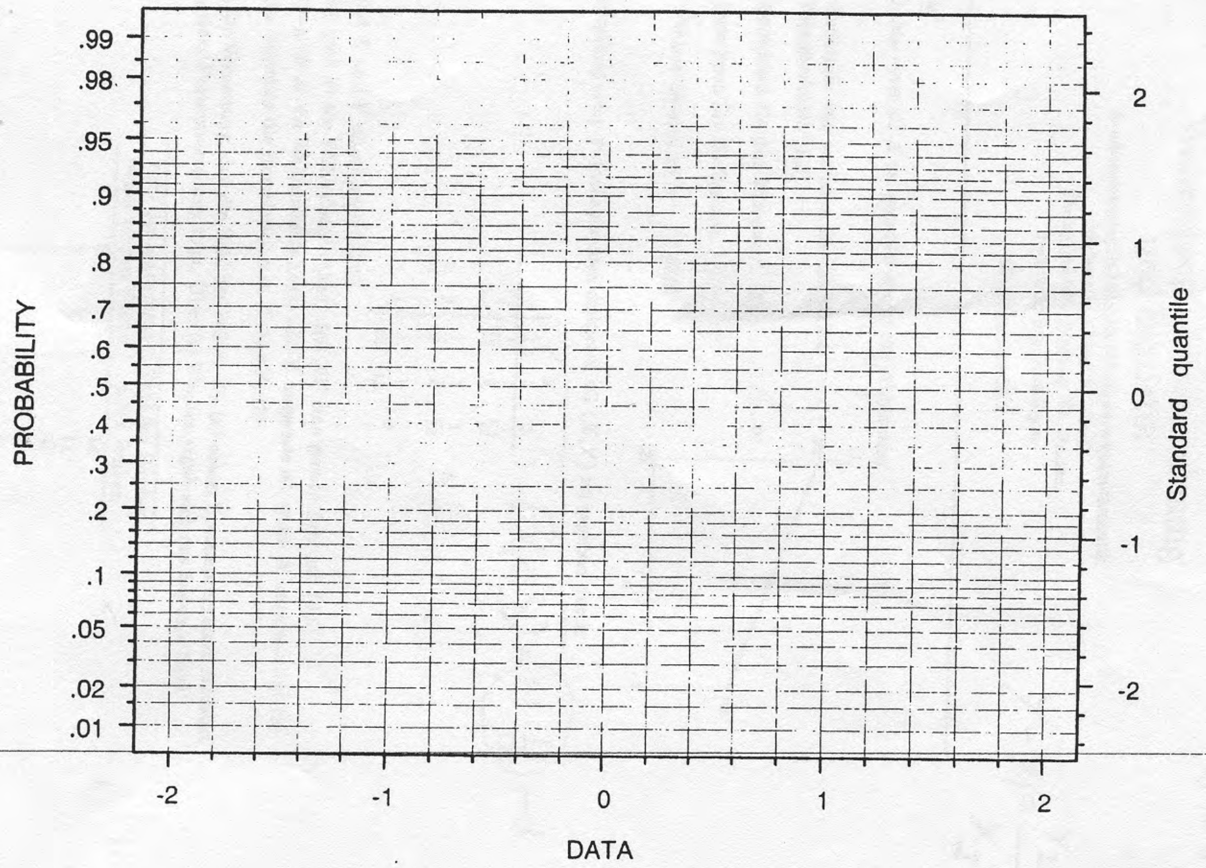
$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Das Stichprobenmittel ist ein unverzerrter und konsistenter (vgl. *Gesetz der Großen Zahlen*) Schätzer für das Mittel einer Verteilung.

W–Netz für B)(d):


.99
.98
.95
.9
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
.05
.02
.01
PROBABILITY
2
1
0
-1
-2
Standard quantile
0
20
40
60
80
100
DATA

W–Netz für B)(d):



PROBABILITY
.99
.98
.95
.9
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
.05
.02
.01
Standard quantile
2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2
DATA

Schriftliche Prüfung

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathematik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2–stündig mit Unterlagen

9. Nov. 2004

A) Beispiele[1]

1. Die Dichte einer stochastischen Größe X sei gegeben wie folgt:

$$f(x) = k\,(4 - x^2) \quad \text{für} \quad -2 \le x \le 2 \quad (f(x) = 0 \text{ sonst})$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante k. (1)
(b) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion. (1.5)
(c) Es gilt $\mathbb{E}(X) = 0$ (Warum?); berechnen Sie die Varianz von X. (1.5)

2. X sei eine normalverteilte stochastische Größe mit Mittelwert 70 und Varianz 9.

(a) Berechnen Sie $W\{67 < X < 75\}$. (1)
(b) Bestimmen Sie die Quartile von X (d.h. das 25%, 50% und 75%–Quantil). (1)
(c) Ermitteln Sie c so, daß $W\{70 - c < X < 70 + c\} = 0.95$. (1)
(d) Sie ziehen aus X eine Stichprobe des Umfangs 10. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind höchstens 8 der Stichprobenwerte kleiner als 73.84 ? (1)

3. Die folgenden Informationen seien gegeben (Stichproben aus Normalverteilungen):

	Stichproben–umfang	Stichproben–mittel	Stichproben–streuung
1. Stichprobe	6	40.3	11.3
2. Stichprobe	8	21.4	8.3

(a) Ermitteln Sie ein 95%–Konfidenzintervall für μ_1. (1)
(b) Testen Sie mit $\alpha = 0.10$ auf Gleichheit der beiden Varianzen. (1)
(c) Ermitteln Sie ein 95%–Konfidenzintervall für die Differenz der beiden Mittelwerte. (2)
Extrapunkt: Wie lautet ein passender R–Befehl? (Gehen Sie davon aus, daß die Daten in `data1` und `data2` gespeichert sind.)

./.

[1] Pro Beispiel 4 Punkte (Punkteschlüssel in Klammern).

Lösung zur schriftlichen Prüfung

EWST f. Inf. / Stat. u. Wth. f. Inf.

9. Nov. 2004

Teil A)

1. (a) Die Fläche unter der Dichte ist 1; wegen der Symmetrie der Dichte gilt:

$$k\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx = 2k\int_{0}^{2}(4-x^2)\,dx = 2k\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 2k\left(8-\frac{8}{3}\right) = \frac{32k}{3}$$

Daraus folgt: $k = \frac{3}{32}$.

(b) Für $-2 \le x \le 2$ gilt:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{3}{32}\int_{-2}^{x}(4-u^2)\,du = \frac{3}{32}\left(4u-\frac{u^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{x} \\ &= \frac{3}{32}\left(4x-\frac{x^3}{3}+8-\frac{8}{3}\right) = \frac{3}{32}\left(4x-\frac{x^3}{3}+\frac{16}{3}\right) \\ &= \frac{12x-x^3+16}{32} \end{aligned}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \frac{12x-x^3+16}{32} & -2 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

(c) Wegen der Symmetrie der Verteilung ist $\mathrm{E}(X) = 0$; für die Varianz gilt daher:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) &= \frac{3}{32}\int_{-2}^{2}x^2(4-x^2)\,dx = \frac{6}{32}\int_{0}^{2}x^2(4-x^2)\,dx \\ &= \frac{6}{32}\left(\frac{4x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \frac{6}{32}\left(\frac{32}{3}-\frac{32}{5}\right) \\ &= \frac{4}{5} = 0.8 \end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned} W\{67 < X < 75\} &= \Phi\left(\frac{5}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{3}{3}\right) = \Phi(1.67) - [1-\Phi(1)] \\ &= 0.9525 - [1-0.8413] = 0.7938 \end{aligned}$$

(b) Das p–Quantil ist gegeben durch $x_p = 70 + 3\,z_p$; wegen $-u_{0.25} = u_{0.75} = 0.6745$ und $u_{0.50} = 0$ gilt:

25%	50%	75%
67.98	70	72.02

(c)

$$W\{70-c < X < 70+c\} = \Phi\left(\frac{c}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{c}{3}\right) = 2\Phi\left(\frac{c}{3}\right) - 1 = 0.95$$

$$\Longrightarrow \Phi\left(\frac{c}{3}\right) = 0.975 \Longrightarrow c = 3\,z_{0.975} = 3 \times 1.96 = 5.88$$

(d) Die Zahl Z der Stichprobenwerte kleiner als 73.84 ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = W\{X < 73.84\}$:

$$p = \Phi\left(\frac{3.84}{3}\right) = \Phi(1.28) = 0.8997 \approx 0.90$$

$$p = \Phi\left(\frac{73{,}83-70}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} W\{Z \le 8\} &= \sum_{k=0}^{8}\binom{10}{k}p^k(1-p)^{10-k} = 1 - \sum_{k=9}^{10}\binom{10}{k}p^k(1-p)^{10-k} \\ &= 1 - 10 \times 0.9^9 \times 0.1 - 0.9^{10} \\ &= 0.264 \end{aligned}$$

3. (a)

$$40.3 \pm \underbrace{t_{5;\,0.975}}_{2.571}\frac{11.3}{\sqrt{6}} = [28.44;\ 52.16]$$

(b) Die Hypothese der Gleichheit der Varianzen wird nicht verworfen:

$$\left(\frac{11.3}{8.3}\right)^2 = 1.85 < F_{5,7;\,0.95} = 3.97$$

(c)

$$s_g^2 = \frac{5 \times 11.3^2 + 7 \times 8.3^2}{12} = 93.39$$

$$40.3 - 21.4 \pm \underbrace{t_{12;\,0.975}}_{2.179}\, s_g\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}} = [7.53;\ 30.27]$$

Extrapunkt: Ein passender R–Befehl lautet:

```
t.test(data1, data2, alternative = "two.sided",
       var.equal = TRUE, conf.level = 0.95)
```

(Da die angegeben Werte für `alternative` und `conf.level` ohnehin die Default–Werte sind, können sie auch weggelassen werden.)

Teil B)

(a) Bayes'sche Formel:

$$W(\text{Chip defekt}|\text{Test sagt defekt}) = \frac{0.94 \times 0.02}{0.94 \times 0.02 + 0.05 \times 0.98} = 0.2773$$

(b) Nein; $F(x)$ ist nicht monoton wachsend:

$$F(0-) = \frac{2}{3} > F(0+) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

(Alle anderen Eigenschaften einer Verteilungsfunktion sind aber erfüllt.)

(c) Satz vom unbewußten Statistiker:

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 \frac{1}{x} 3x^2\,dx = \int_0^1 3x\,dx = \frac{3x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{3}{2}$$

(d) Tschebyscheff'sche Ungleichung:

$$W\{-2 < X < 8\} \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{5^2} = 1 - \frac{13-9}{25} = \frac{21}{25} = 0.84$$

(e) Bedingter Erwartungswert bei 2–dimensionaler Normalverteilung:

$$\mathbb{E}(Y|X=7) = \mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(7-\mu_X) = 1 + \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{4}(7-3) = 4$$

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG

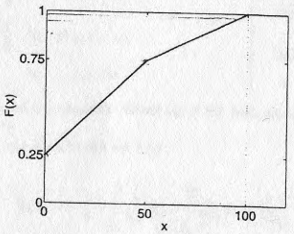
STATISTIK UND WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

STUDIENRICHTUNG: INFORMATIK
VORLESUNG: O.PROF. R. VIERTL
ÜBUNG/SCHRIFTL. PRÜFUNG: W. GURKER
2-STÜNDIG MIT UNTERLAGEN

18. MÄRZ 2003

A) Beispiele[1]

1. Die Verteilungsfunktion einer (nichtnegativen) stochastischen Größe X ist gegeben wie folgt:



(a) Um welchen Verteilungstyp (diskret, ...) handelt es sich? (0.5)
(b) Berechnen Sie den Mittelwert (1) und die Streuung von X (1.5).
(c) Bestimmen Sie das 90% Quantile der Verteilung. (1)

2. X und Y genügen einer gemeinsamen Normalverteilung mit:

$$\mu_x = 20, \quad \mu_y = 25, \quad \sigma_x = 3, \quad \sigma_y = 4, \quad \rho = 0.6$$

Bestimmen bzw. berechnen Sie:

(a) die Varianz-Kovarianzmatrix; (0.5)
(b) das 10%-Quantil von X; (0.5)
(c) $W(20 < Y \leq 25)$; (1)
(d) $W(Y > X)$. (2)

3. Eine stochastische Größe X mit Merkmalraum $M_X = \{0, 1, 2, \ldots\}$ wurde hundert Mal beobachtet:

x	0	1	2	3	4	5	≥ 6
Häufigkeit	22	37	20	13	6	2	0

– 100

Es besteht die Vermutung, daß es sich um Beobachtungen einer Poissonverteilung handelt. Testen Sie die Vermutung mittels χ^2-Anpassungstest ($\alpha = 0.05$). Schreiben Sie alle Zwischenschritte in Form einer Tabelle detailliert auf. (4)

./.

[1]Pro Beispiel 4 Punkte (Punkteschlüssel in Klammern).

18-3-2003

B) Beantworten bzw. berechnen Sie: [2]

(a) Ein System, bestehend aus drei unabhängigen Komponenten, arbeitet nur dann korrekt, wenn alle drei Komponenten korrekt arbeiten. Die Lebensdauern der Komponenten sind exponentialverteilt mit Mittel 10000 [h], 20000 [h] bzw. 40000 [h]. Mit welcher Wahrscheinlichkeit arbeitet das System für (mindestens) 1000 [h] korrekt?

(b) X sei eine stochastische Größe mit Verteilungsfunktion:

$$F(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}, \quad x \geq 0$$

Wie sind nach $U_{(0,1)}$ verteilte Zufallszahlen u zu transformieren, um wie X verteilte Zufallszahlen zu bekommen?

(c) $X_1, \ldots, X_n$ sei eine Stichprobe aus einer Normalverteilung mit Mittel μ und Standardabweichung σ. Welche der folgenden Aussagen für das Stichprobenmittel $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ ist korrekt? (Mit Begründung!)

(1) $\overline{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ (2) $\overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ (3) $\overline{X}_n \sim N\left(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ (4) $\overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n^2}\right)$

(d) Was sind Pivot-Größen? Welche Funktion haben sie? Geben Sie ein Beispiel.

(e) Die folgenden Beobachtungen stammen von einer Normalverteilung:

−0.01 − 0.03 0.00 0.02 − 0.02 − 0.03 0.00 − 0.01 − 0.01 − 0.04

Ist der Mittelwert der Verteilung gleich Null? ($\alpha = 5\%$)

Ergebnisse der schriftlichen Prüfung:
Fr 21. März 2003 ab 15:00 (Aushang am Institut)
Telefonische Auskunft: 58801/10724

[2]Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte.

Lösung zur schriftlichen Prüfung

EWST f. Inf. / Stat. u. Wth. f. Inf.

18. März 2003

Teil A)

1. Die Verteilungsfunktion ist gegeben durch:

Verteilungs-funkt.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ \frac{x}{100} + \frac{1}{4} & \text{für} \quad 0 \le x < 50 \\ \frac{x}{200} + \frac{1}{2} & \text{für} \quad 50 \le x < 100 \\ 1 & \text{für} \quad x \ge 100 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad f^*(x) = \begin{cases} p_0 = \frac{1}{4} & \text{für} \quad x = 0 \\ \frac{1}{100} & \text{für} \quad 0 \le x < 50 \\ \frac{1}{200} & \text{für} \quad 50 \le x < 100 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dichte-funktion

(a) Es handelt sich um eine gemischte Verteilung: F hat einen Sprung bei 0, ist aber keine reine Treppenfunktion.

(b) Der Mittelwert von X ergibt sich wie folgt:

$$\mathrm{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + \int_0^{50} \frac{x}{100}\,dx + \int_{50}^{100} \frac{x}{200}\,dx = \frac{x^2}{200}\Big|_0^{50} + \frac{x^2}{400}\Big|_{50}^{100}$$
$$= \frac{50^2}{200} + \frac{100^2 - 50^2}{400} = \frac{25}{2} + \frac{75}{4} = \frac{125}{4} = 31.25$$

Die Varianz berechnet man mittels Verschiebungssatz:

$$\mathrm{E}(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + \int_0^{50} \frac{x^2}{100}\,dx + \int_{50}^{100} \frac{x^2}{200}\,dx = \frac{x^3}{300}\Big|_0^{50} + \frac{x^3}{600}\Big|_{50}^{100}$$
$$= \frac{50^3}{300} + \frac{100^3 - 50^3}{600} = \frac{1250}{3} + \frac{4375}{3} = \frac{5625}{3} = 1875$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X) = 1875 - \left(\frac{125}{4}\right)^2 = \frac{14375}{16} = 898.4375$$

Die Streuung ist die Wurzel aus der Varianz:

$$\sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\frac{14375}{16}} = 29.9739$$

(c) Das 90%-Quantile $x_{0.9}$ ergibt sich als Lösung von:

$$F(x_{0.9}) = \frac{x_{0.9}}{200} + \frac{1}{2} = 0.9 \quad \longrightarrow \quad x_{0.9} = 200 \cdot 0.4 = 80$$

2. (a) Die Kovarianz von X und Y ist $\sigma_{xy} = \rho\sigma_x\sigma_y = 0.6 \cdot 3 \cdot 4 = 7.2$; die Kovarianzmatrix ist daher gegeben durch:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 7.2 \\ 7.2 & 16 \end{pmatrix}$$

(b) Das 10%-Quantil von X ist gegeben durch:

$$x_{0.1} = \mu_x + \sigma_x \cdot u_{0.1} = 20 + 3 \cdot (-u_{0.9}) = 20 + 3\,(-1.2816) = 16.1553$$

(c) Y ist nach $N(\mu_y, \sigma_y^2) = N(25, 16)$ verteilt; daraus folgt:

$$W(20 < Y \le 25) = \Phi\left(\frac{25-25}{4}\right) - \Phi\left(\frac{20-25}{4}\right) = \Phi(0) - \Phi(-1.25)$$
$$= 0.5 - [1 - \Phi(1.25)] = \Phi(1.25) - 0.5$$
$$= 0.8944 - 0.5 = 0.3944$$

(d) Für die Verteilung von $Y - X$ gilt:

$$Y - X \sim N(\mu_y - \mu_x,\, \sigma_y^2 + \sigma_x^2 - 2\,\sigma_{xy}) = N(25 - 20,\, 16 + 9 - 2 \cdot 7.2) = N(5, 10.6)$$

Daraus folgt:

$$W(Y > X) = W(Y - X > 0) = 1 - \Phi\left(\frac{-5}{\sqrt{10.6}}\right) = \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{10.6}}\right) = \Phi(1.5357) = 0.9377$$

3. Es ist $H_0 : X \sim P_\mu$ (gegen $H_0 : X \not\sim P_\mu$) zu testen (zusammengesetzter Chiquadrat-Anpassungstest). Der unbekannte Parameter μ ist zuerst (plausibel) zu schätzen; der plausible Schätzwert von μ ist gegeben durch (vgl. *Übung*):

$$\widehat{\mu} = \overline{x} = \frac{0 \cdot 22 + 1 \cdot 37 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 13 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 2}{100} = \frac{150}{100} = 1.5$$

Die Klassenwahrscheinlichkeiten schätzt man wie folgt:

$$\widehat{W}(X = x) = \frac{\widehat{\mu}^x e^{-\widehat{\mu}}}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Klasse	H	$\widehat{W}$	$E = 100\,\widehat{W}$	$(H-E)^2/E$
0	22	0.2231	22.3130	0.0044
1	37	0.3347	33.4695	0.3724
2	20	0.2510	25.1021	1.0370
3	13	0.1255	12.5511	0.0161
4	6	0.0471	4.7067	0.3554
≥ 5	2	0.0186	1.8576	0.0109
Summe	100	1.0000	100.0000	1.7962

Der Wert der Chiquadratstatistik, $T = 1.7962$, ist mit dem 95% Quantil der χ^2-Verteilung mit $r - s - 1 = 6 - 1 - 1 = 4$ Freiheitsgraden zu vergleichen:

$$T < \chi^2_{4;0.95} = 9.4877$$

Die H_0 (= Poissonverteilung) wird nicht verworfen.

Bem.: In der obigen Tablelle ist die Faustregel ($E \geq 5$) verletzt; dies läßt sich durch Zusammenfassen der letzten beiden Klassen beheben:

Klasse	H	$\widehat{W}$	$E = 100\,\widehat{W}$	$(H-E)^2/E$
0	22	0.2231	22.3130	0.0044
1	37	0.3347	33.4695	0.3724
2	20	0.2510	25.1021	1.0370
3	13	0.1255	12.5511	0.0161
≥ 4	8	0.0656	6.5642	0.3140
Summe	100	1.0000	100.0000	1.7439

Der Unterschied ist nicht groß; nun ist T allerdings mit dem 95%–Quantile der χ^2_3–Verteilung zu vergleichen:

$$T = 1.7439 < \chi^2_{3;0.95} = 7.8147$$

Auch hier wird H_0 nicht verworfen.

Teil B)

(a) Sind T_i, $i = 1, 2, 3$, die Lebensdauern der Komponenten, so gilt (Unabhängigkeit!):

$$\begin{aligned} W(T \geq 1000) &= W(T_1 > 1000)\, W(T_2 > 1000)\, W(T_3 > 1000) \\ &= e^{-1000/10000}\, e^{-1000/20000}\, e^{-1000/40000} \\ &= e^{-1/10}\, e^{-1/20}\, e^{-1/40} \\ &= 0.9048 \cdot 0.9512 \cdot 0.9753 \\ &= 0.8395 \end{aligned}$$

(b) Die Verteilungsfunktion ist zu invertieren:

$$F(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = u \quad \longrightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{1-u}} - 1$$

Der letztere Ausdruck ist die gesuchte Transformation.

(c) Aussage (2) ist richtig (folgt aus dem Additionstheorem für (unabhängige) Normalverteilungen sowie aus den Rechenregeln für den Erwartungswert und für die Varianz).

(d) Pivot–Größen sind stochastische Größen, die von der Stichprobe und von (unbekannten) Parametern θ abhängen, deren Verteilung aber unabhängig von θ ist. Sie finden Verwendung bei der Konstruktion von Konfidenzbereichen und Tests. (Beispiele in der *Vorlesung* und *Übung*.)

(e) Hier ist ein t–Test anzuwenden:

$$T = \frac{\overline{x}}{s/\sqrt{n}} = \frac{-0.0130}{0.0177/\sqrt{10}} = -2.3265$$

Wegen $|T| > t_{9;0.975} = 2.2622$ ist die Hypothese $\mu = 0$ zu verwerfen.

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG

STATISTIK UND WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

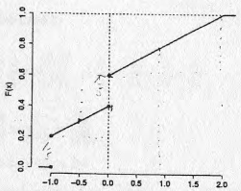
STUDIENRICHTUNG: INFORMATIK
VORLESUNG: O.PROF. R. VIERTL
ÜBUNG/SCHRIFTL. PRÜFUNG: W. GURKER
2-STÜNDIG MIT UNTERLAGEN

12. OKT. 2004

A) Beispiele[1]

$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$ · gleichverteilt für jedes Intervall extra dann 2 Intervalle

1. Die Abbildung zeigt die Verteilungsfunktion einer sG X:



$E(x) = \int x \ldots + \ldots$

⇒ 4 Stellen im Integral

(a) Um welchen Verteilungstyp (stetig, ...) handelt es sich? (0.5)
(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$. (1.5)
(c) Berechnen Sie $\mathrm{Var}(X)$. (1.5)
(d) Bestimmen Sie:

ablesen → $W\{-0.5 \leq X \leq 1\}$ (0.5)

x   x wie berechne

2. Scores eines Golfers in den letzten zwölf 18–Loch Runden:

70 73 70 72 74 70 74 76 75 80 74 80

(a) Zeichnen Sie (genau!) die empirische Verteilungsfunktion. (1)
(b) Ermitteln Sie Schätzwerte für den Mittelwert und die Varianz. (1)
(c) Ermitteln Sie 90%–Konfidenzintervalle für den Mittelwert und die Varianz. (1+1) (Vs.: normalverteilte Beobachtungen)

3. Es gibt den Vorschlag, an die folgenden Daten eine Poissonverteilung anzupassen:

x	0	1	2	3	4	$x \geq 5$
Häufigkeit	20	40	16	18	6	0

Frage wegen Klasseneinteilung wann zusammenfassen

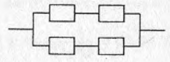
(a) Ermitteln Sie den Wert der Teststatistik für den χ^2–Anpassungstest. (3) (Schreiben Sie alle Berechnungsschritte genau auf!)
(b) Wieviele Freiheitsgrade sind mit der Teststatistik verbunden? (0.5)
(c) Wird das Poissonmodell mit $\alpha = 0.05$ verworfen? (0.5)

./.

[1] Pro Beispiel 4 Punkte (Punkteschlüssel in Klammern).

B) Beantworten bzw. berechnen Sie: [2]

(a) Jede Komponente des folgenden Systems ist – unabhängig von den anderen – mit gleicher Wahrscheinlichkeit p intakt. Ermitteln Sie einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit mit der das System intakt ist.



✓ (b) Ist die folgende Funktion eine Verteilungsfunktion?

S. 40 Buch: ableiten, reicht nicht, 6 genau, muss erfüllt sein; wenn ableitbar ⇒ kann auch Sprungstellen haben

$$F(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} & \text{für } x < 0 \\ 1 - \frac{e^{-x}}{2} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

beidseitig ableiten bzw. Dichtefunktion ⇒ stetig bzw. gemischte Verteilung

Falls 'ja', um welchen Verteilungstyp handelt es sich?
(Begründete Anwort!)

✓ (c) X sei eine sG mit Dichte $f(x) = 3x^2$ für $0 < x < 1$ ($f(x) = 0$ sonst). Berechnen Sie $\mathbb{E}(\sqrt{X})$.

✓ (d) Gibt es eine SG X ($\mathbb{E}(X) = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$) mit der folgenden Eigenschaft?

$$W\{\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma\} \leq 0.5$$

(Begründete Anwort!)

(e) Eine ideale Münze wird 500 Mal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß die Anzahl der Würfe, bei denen Kopf erscheint, um mehr als 30 von 250 abweicht. (*Hinweis:* Verwenden Sie eine Approximation.)

Ergebnisse der schriftlichen Prüfung:
Do 14. Okt. 2004 ab 15:00 (Aushang am Institut)
Telefonische Auskunft: 58801–10724
Mündliche Prüfung: Fr 15. Okt. 2004
(In Liste eintragen!)

[2] Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte.

Lösung zur schriftlichen Prüfung

EWST f. Inf. / Stat. u. Wth. f. Inf.

12. Okt. 2004

Teil A)

1. (a) Es handelt sich um eine gemischte Verteilung (die Verteilung hat Sprünge, ist aber keine reine Treppenfunktion).

(b) Der Mittelwert von X ergibt sich wie folgt:

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-1}^{2} \frac{x}{5}\,dx + (-1)\cdot\frac{1}{5} + 0\cdot\frac{1}{5} = \frac{x^2}{10}\Big|_{-1}^{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

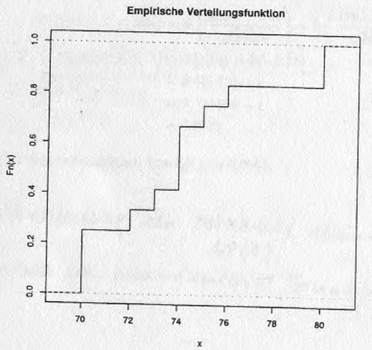
Die Varianz berechnet man mittels Verschiebungssatz:

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{5}\,dx + (-1)^2\cdot\frac{1}{5} + 0^2\cdot\frac{1}{5} = \frac{x^3}{15}\Big|_{-1}^{2} + \frac{1}{5} = \frac{9}{15} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{4}{5} - \frac{1}{100} = \frac{79}{100}$$

(c) $W\{-0.5 \le X \le 1\} = F(1) - F(-0.5-) = 0.8 - 0.3 = 0.5$

2. (a) Die empirische Verteilungsfunktion ist eine Treppenfunktion mit Sprüngen der Höhe 1/12 (bzw. Vielfache davon) an den Stellen der geordneten Stichprobe:



(b) Stichprobenmittel und –varianz sind gegeben wie folgt:

$$\overline{x} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i = 74$$

$$s^2 = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{12}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{130}{11} = 11.8182$$

(c) 90%–Konfidenzintervall für den Mittelwert ($t_{11;0.95} = 1.796$):

$$\overline{x} \pm t_{11;0.95}\frac{s}{\sqrt{12}} = [72.22;\ 75.78]$$

90%–Konfidenzintervall für die Varianz ($\chi^2_{11;0.05} = 4.57$; $\chi^2_{11;0.95} = 19.68$):

$$\left[\frac{11\,s^2}{\chi^2_{11;0.95}};\ \frac{11\,s^2}{\chi^2_{11;0.05}}\right] = [6.607;\ 28.416]$$

3. (a) Der (plausible) Schätzwert des Parameters μ der Poissonverteilung ist gegeben durch:

$$\widehat{\mu} = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{100}(0\cdot 20 + 1\cdot 40 + 2\cdot 16 + 3\cdot 18 + 4\cdot 6) = \frac{150}{100} = 1.5$$

Die Klassenwahrscheinlichkeiten werden geschätzt wie folgt:

$$\widehat{W}\{X = k\} = \frac{\widehat{\mu}^k e^{-\widehat{\mu}}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Klasse	H	$\widehat{w}$	$n\widehat{w}$	$(H - n\widehat{w})^2/n\widehat{w}$
0	20	0.223	22.3	0.240
1	40	0.335	33.5	1.274
2	16	0.251	25.1	3.300
3	18	0.126	12.6	2.366
4,5,…	6	0.066	6.6	0.049
Summe	100	1.001	100.1	7.229

Der Wert der Teststatistik beträgt 7.229.

(b) Mit der Teststatistik sind $r - s - 1 = 5 - 1 - 1 = 3$ Freiheitsgrade verbunden.

(c) Die Teststatistik ist mit dem 95%–Quantil der χ^2_3–Verteilung zu vergleichen:

$$7.229 < \chi^2_{3;0.95} = 7.81$$

Die Nullhypothese (= Poissonverteilung) wird also bei $\alpha = 5\%$ nicht verworfen.

B)

(a) $W\{\text{'System intakt'}\} = 1 - (1-p^2)^2 = 2p^2 - p^4$

(b) Ja, alle Eigenschaften einer Verteilungsfunktion sind erfüllt:

$0 \le F(x) \le 1$

$F(x)$ ist monoton wachsend.

$F(x)$ ist rechtsstetig (sogar stetig).

$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \ \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

Es handelt sich um eine stetige Verteilung (keine Sprünge).

(c) Nach dem 'Satz von unbewußten Statistiker' gilt:

$$\mathbb{E}(\sqrt{X}) = \int_0^1 \sqrt{x}\,3x^2\,dx = \int_0^1 3x^{5/2}\,dx = 3\frac{x^{7/2}}{7/2}\Big|_0^1 = \frac{6}{7} \quad \underline{\underline{= 0{,}8571}}$$

(d) Nein, denn nach der Tschebyscheff'schen Ungleichung gilt:

$$W\{\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma\} = 1 - W\{|X-\mu| > 2\sigma\} \ge 1 - \frac{\sigma^2}{4\sigma^2} = \frac{3}{4}$$

(e) Mit der Normalapproximation der Binomialverteilung (+ Stetigkeitskorrektur) gilt:

$$\begin{aligned} W\{220 \le X \le 280\} &= \Phi\left(\frac{280.5-250}{\sqrt{500/4}}\right) - \Phi\left(\frac{219.5-250}{\sqrt{500/4}}\right) \\ &= \Phi(2.73) - \Phi(-2.73) \\ &= 2\,\Phi(2.73) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.9968 - 1 \\ &= 0.9936 \end{aligned}$$

$\Phi(2{,}73) - (1 - \Phi(2{,}73))$

$0{,}9968 - (1 - 0{,}9968)$

$0{,}9968 - 0{,}0032$

$= 0{,}9936$

Formel Seite 109

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also 0.0064.

Binomialverteilung, da Münzwurf Alternativverteilung (0,1)

n-mal die Alternativversuch ⇒ Binomialverteilung

24,-

Schriftliche Prüfung

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathematik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2–stündig mit Unterlagen
3.5.2000

A) Beispiele[1]

1. Eine stochastische Größe X nimmt den Wert 1 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ an. Der Rest der Wahrscheinlichkeit ist im Intervall (1, 5) kontinuierlich uniform verteilt.

(a) Zeichnen Sie die Verteilungsfunktion.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

(c) Bestimmen Sie den Median der Verteilung.

(d) Berechnen Sie $W\{1 \leq X < 3\}$.

2. Die stochastischen Größen X und Y haben die gemeinsame Dichtefunktion:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{für } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Ermitteln Sie die Randdichten von X und Y.

(b) Sind X und Y unabhängig? (Kommentar)

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

(d) Ermitteln Sie die durch $y = \frac{1}{3}$ bedingte Dichte von X. Zeichnen Sie diese Dichte.

3. Testen Sie mit Irrtumswahrscheinlichkeit 0,05, ob den folgenden Daten eine Exponentialverteilung zu Grunde liegt:

107,3	50,8	61,7	31,6	98,2	87,3	68,5	115,3	22,3	17,1
120,2	62,3	47,2	105,3	48,3	67,2	50,6	103,4	122,1	105,2
48,1	36,2	24,1	78,2	16,3	22,8	34,2	88,3	29,3	154,1

Verwenden Sie den (zusammengesetzten) Chiquadrat–Test mit der Klasseneinteilung:

$$[0,40],\ (40,70],\ (70,100],\ (100,\infty)$$

---

[1] Pro Beispiel 4 Punkte.

B) Beantworten bzw. berechnen Sie: [2]

(a) Jährlich gibt es in Österreich etwa 40000 Eheschließungen. Berechnen Sie (approximativ) die Wahrscheinlichkeit, daß zumindest bei einem Paar beide Partner am 3.Mai geboren sind.

Formulieren Sie die der Berechnung zu Grunde liegenden Voraussetzungen.

(b) Die sG X ist logarithmisch normalverteilt, $X \sim LN(2,4)$. Bestimmen Sie die drei Quartile der Verteilung, d.h. bestimmen Sie das 0,25–, 0,50– und das 0,75–Quantile.

(c) Ein Professor weiß aus Erfahrung, daß die Punktezahl bei einer Abschlußprüfung eine stochastische Größe mit Mittel 75 und Varianz 25 ist.

Was läßt sich über die Wahrscheinlichkeit sagen, daß ein/e Student/in zwischen 65 und 85 Punkte erreicht?

Hinweis: Tschebyscheff'sche Ungleichung.

Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit, wenn man zusätzlich annimmt, daß die erreichte Punktezahl einer Normalverteilung folgt?

(d) Erklären Sie, was man unter einer Pivot–Größe versteht, und geben Sie ein Beispiel.

(e) Bestimmen Sie auf der Basis der folgenden fünf unabhängigen Beobachtungen einer normalverteilten stochastischen Größe:

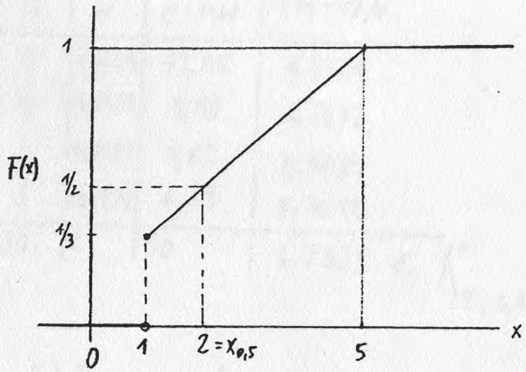
95,6 83,3 101,2 102,8 88,5

ein 90%–Konfidenzintervall für den Mittelwert der Verteilung.

[2] Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte.

3-5-2000

A) 1) (a)



(b) $\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{3} + \int_1^5 x \cdot \frac{1}{6}\,dx = \frac{1}{3} + \frac{x^2}{12}\Big|_1^5 = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}(25-1) =$

$= \frac{1}{3} + 2 = \underline{\frac{7}{3} = 2{,}33}$

$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{3} + \int_1^5 x^2 \frac{1}{6}\,dx = \frac{1}{3} + \frac{x^3}{18}\Big|_1^5 = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}(125-1) =$

$= \frac{1}{3} + \frac{124}{18} = \frac{1}{3} + \frac{62}{9} = \frac{65}{9} = 7{,}22$

$Var(X) = \frac{65}{9} - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{65}{9} - \frac{49}{9} = \underline{\frac{16}{9} = 1{,}78}$

(c) $F(x_{0,5}) = \frac{1}{2}$

$F(x) = \frac{x+1}{6} = \frac{1}{2} \longrightarrow \underline{x_{0,5} = 2}$

(d) $W\{1 \le X < 3\} = F(3-) - F(1-) = F(3) - \underbrace{F(1-)}_{=0} =$

$= \frac{3+1}{6} = \underline{\frac{2}{3}}$

vgl. Vorlesung (bzw. Buch)

$\pi(p|D) \propto p^4 (1-p)^{94} \cdot p^2 (1-p)^8 = p^6 (1-p)^{102}, \; 0 \le p \le 1$

... $\underline{Be(7, 103)}$

$E(\tilde{p}|D) = \frac{7}{\underline{110}} = 0{,}0636$

3) $H_0: X \sim Ex_\tau$

$\hat{\tau} = \bar{x} = 67{,}45$ (plausibler Schätzwert)

$\hat{W}(a \le X \le b) = e^{-a/\hat{\tau}} - e^{-b/\hat{\tau}}$

Kl	H	$\hat{w}$	$e = n\hat{w}$	$(H-e)^2/e$
[0,40]	9	0,4474	13,42	1,4561
(40,70]	9	0,1984	5,95	1,5602
(70,100]	4	0,1272	3,82	0,0089
(100,∞)	8	0,2271	6,81	0,2074
	30	1	30	3,2325

$3{,}2325 < \chi^2_{2;0{,}95} = 5{,}99$

H_0 nicht verwerfen

B) (a) Vsn: (1) Geburtstage unabhängig.
(2) Jeder Tag des Jahres kommt mit gleicher W. als Geburtstag in Frage.

$W\{\text{Beide am 3. Mai geboren}\} = \frac{1}{365^2} = p$

$W\{X \ge 1\} = 1 - W\{X=0\} = 1 - \binom{40000}{0} p^0 (1-p)^{40000} =$

$= 1 - \left(1 - \frac{1}{365^2}\right)^{40000} = \underline{0{,}2594}$

Poissonapproximation: $\approx 1 - e^{-40000 \cdot p} = \underline{0{,}2594}$

(b) $X \sim LN(2,4)$

$x_p = e^{2+2z_p} = e^{2(1+z_p)}$

p	z_p	x_p
0,25	−0,6745	1,9175
0,50	0	7,3891
0,75	0,6745	28,4737

2) (a) $f_1(x) = \int_0^1 (x+y)\,dy = xy + \frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=1} = \underline{x + \frac{1}{2},\ 0 \le}$

$f_2(y) = \int_0^1 (x+y)\,dx = \underline{y + \frac{1}{2},\ 0 \le y \le 1}$

(b) $f(x,y) \ne f_1(x) f_2(y) \longrightarrow$ X, Y nicht unabhän

(c) $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x\left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{2}\right)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\Big|$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \underline{\frac{7}{12}}$

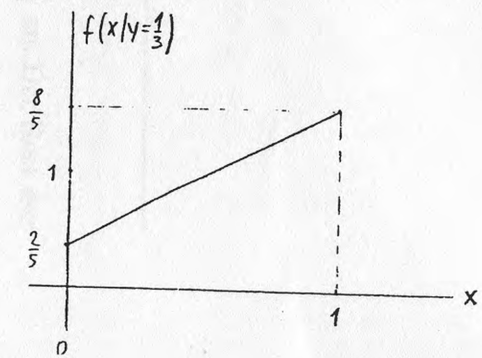
$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2\left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{\ }{6}$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$

$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{60-4}{144}$

$= \underline{\frac{11}{144}}$

(d) $f(x \mid y = \frac{1}{3}) = \frac{f(x, \frac{1}{3})}{f_2(\frac{1}{3})} = \frac{x + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{6x+2}{2+3} = \underline{\frac{6x+2}{5},\ 0 \le}$



Schriftliche Prüfung

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathematik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2-stündig mit Unterlagen

26. Jänner 2004

A) Beispiele[1]

1. Bei einer Serviceeinrichtung wird man entweder sofort bedient, mit Wahrscheinlichkeit 0.3, oder man hat eine auf dem Intervall $(0, 30)$ (Minuten) uniform verteilte Wartezeit. Bestimmen Sie:

(a) die Verteilungsfunktion der Wartezeit (+ Zeichnung); (1)
(b) den Mittelwert der Wartezeit; (1)
(c) die Varianz der Wartezeit; (1)
(d) die Wahrscheinlichkeit noch mindestens weitere 10 Minuten warten zu müssen, wenn man bereits 10 Minuten gewartet hat. (1)

Extrapunkt: Hat die Verteilung ein „Gedächtnis"?

2. Die Dichte einer 2-dimensionalen stochastischen Größe (X, Y) ist gegeben durch:

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+y) & \text{für} \quad 0 < x < 2,\ 0 < y < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante c. (1)
(b) Ermitteln Sie die Randdichten von X und Y (+ Skizzen). (1)
(c) Sind X und Y stochastisch unabhängig? (0.5)
(d) Berechnen Sie $\mathbb{E}[Y \mid X = 1/3]$. (1.5)

3. Die folgenden 20 „uniform" (auf $(0, 1)$) verteilten Zufallszahlen wurden mittels des R-Befehls `round(runif(20),2)` erzeugt:

```
0.75 0.98 0.97 0.35 0.39 0.95 0.11 0.93 0.35 0.53
0.54 0.71 0.41 0.15 0.34 0.63 0.06 0.85 0.21 0.54
```

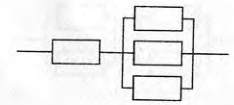
(a) Berechnen Sie das Stichprobenmittel und die Stichprobenvarianz. Entsprechen sie (annähernd) den Erwartungen? (1)
(b) Zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion und darüber die theoretische Verteilungsfunktion. (1.5)
(c) Testen Sie mittels χ^2-Anpassungstest, ob die Daten uniform verteilt sind (mit $\alpha = 5\%$). Nehmen Sie dazu die folgende Klasseneinteilung: $(0, 0.25]$, $(0.25, 0.50]$, $(0.50, 0.75]$, $(0.75, 1)$. (1.5)

./.

[1] Pro Beispiel 4 Punkte (Punkteschlüssel in Klammern).

B) Beantworten bzw. berechnen Sie:[2]

(a) Jede Komponente des folgenden Systems ist – unabhängig von den anderen – mit gleicher Wahrscheinlichkeit p intakt. Ermitteln Sie einen Ausdruck für die Intaktwahrscheinlichkeit des Systems.



[illegible]

(b) Der Median einer normalverteilten stochastischen Größe ist 1000 und das 75%-Quantil ist 1250. Wie groß ist – gerundet auf eine ganze Zahl – die Standardabweichung?

(c) Zwischen zwei stochastischen Größen X und Y bestehe die folgende Beziehung:

$$Y = \frac{X-1}{3}$$

Dann ist der Korrelationskoeffizient von X und Y:

(1) 1/3
(2) 0
(3) −1/3
(4) 1
(5) Keiner der obigen Werte, sondern ....

Stehen in einer linearen Beziehung zu einander

(d) Die Faltung von zwei unabhängigen Alternativverteilungen A_p mit gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit p ergibt:

(1) $D_{\{0,1,2\}}$
(2) $B_{2,p}$
(3) ~~A_p~~
(4) G_p
(5) Keine der obigen Verteilungen, sondern ....

(e) Ein Lieferant behauptet, daß (höchstens) 1% seiner Produkte fehlerhaft sind. Zur Überprüfung ziehen Sie eine Stichprobe von 100 Stück und beschließen nicht zu kaufen, wenn die Stichprobe mindestens 3 fehlerhafte Stücke enthält. Wie groß ist bei diesem Test die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1.Art?

Ergebnisse der schriftlichen Prüfung: Mi 28. Jän. 2004 ab 16:00 (Aushang am Institut) Telefonische Auskunft: 58801–10724
Mündliche Prüfung: Do 29. + Fr 30. Jän. 2004 (In Liste eintragen!)

[2] Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte.

Schriftliche Prüfung
Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathematik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2-stündig mit Unterlagen

9. März 2004

A) Beispiele[1]

1. Die Dichte der stochastischen Größe X ist gegeben wie folgt:

$$f(x) = \begin{cases} cx^8(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante c. (1)
(b) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit mit der X größer als 0.5 ist. (1)
(c) Berechnen Sie den Erwartungswert von X. (1)
(d) Berechnen Sie die Varianz von X. (1)

2. Nach einer Prüfung sind 40 Prüfungsarbeiten zu korrigieren. Aus Erfahrung weiß der Prüfer, daß er für eine Arbeit im Durchschnitt 6 Minuten braucht, mit einer Streuung von ebenfalls 6 Minuten. Er beginnt um 18:50 und arbeitet ohne Unterbrechung bis alle Arbeiten korrigiert sind.

(a) Mit welcher (approximativen) Wahrscheinlichkeit ist er bis zum Beginn der Spätnachrichten im Fernsehen um 23:00 fertig? (2)
(b) Um 23:10 beginnt ein interessanter Report. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er einen Teil versäumt? (1)
(c) Welche Zeitspanne für die Gesamtkorrektur wird nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/100 überschritten? (1)

Hinweis: Zentraler Grenzverteilungssatz.

3. Eine stochastische Größe X mit Merkmalraum $M_X = \{0, 1, 2, \ldots\}$ wurde 48 Mal beobachtet:

x	0	1	2	3	≥ 4
Häufigkeit	9	9	10	14	6

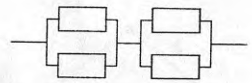
Testen Sie mittels χ^2-Anpassungstest, ob es sich um Beobachtungen einer Poissonverteilung handelt ($\alpha = 10\%$). Schreiben Sie alle Zwischenschritte detailliert auf. (2) Zuerst ist der plausible Schätzwert des Parameters μ der Poissonverteilung zu ermitteln (+ Herleitung). (2)

./.

[1] Pro Beispiel 4 Punkte (Punkteschlüssel in Klammern).

B) Beantworten bzw. berechnen Sie: [2]

(a) Jede Komponente des folgenden Systems ist – unabhängig von den anderen – mit gleicher Wahrscheinlichkeit q defekt. Ermitteln Sie einen Ausdruck für die Intaktwahrscheinlichkeit des Systems.



(b) Für eine normalverteilte stochastische Größe X gilt:

$$W\{|X - \mu| \leq 10\} = 0.95 \qquad (\mu = \mathbb{E}(X))$$

Wie groß ist die Streuung?

(c) Wie muß man nach $U_{(0,1)}$ verteilte Zufallszahlen u transformieren, um Beobachtungen einer stochastischen Größe X mit der Dichte:

$$f(x|k) = (k+1)\,x^k, \quad 0 < x < 1 \quad (k > 0)$$

zu bekommen?

nach proo verteilung
F(x) u. eny
F'(x): Invertierung

(d) Die Faltung von zwei unabhängigen Exponentialverteilungen Ex_τ mit gleichem Mittelwert τ ergibt:

(1) Ex_τ;
(2) $Ex_{2\tau}$;
(3) $N(\tau, \tau^2)$;
(4) Eine dreiecksförmige Verteilung;
(5) Keine der obigen Verteilungen, sondern .... Erlang Verteilung.

(e) Zwei (unabhängige) Stichproben aus normalverteilten Populationen haben eine Streuung von $s = 40.5$ (Stichprobenumfang = 20) bzw. von $s = 32.1$ (Stichprobenumfang = 20). Stimmen die Varianzen der Populationen überein? ($\alpha = 10\%$)

Ergebnisse der schriftlichen Prüfung: Do 11. März 2004 ab 16:00 (Aushang am Institut) Telefonische Auskunft: 58801–10724
Mündliche Prüfung: Fr 12. März 2004 (In Liste eintragen!)

[2] Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte.

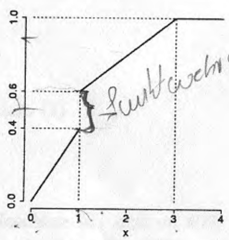
Schriftliche Prüfung
Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathematik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2–stündig mit Unterlagen

27. April 2004

A) Beispiele[1]

1. Die Verteilungsfunktion einer stochastischen Größe X ist durch die untenstehende Abbildung gegeben.



Punktwahrscheinlichkeit

(a) Handelt es sich um eine diskrete, stetige oder gemischte Verteilung? (0.5)

(b) Erstellen Sie eine Zeichnung der Punktwahrscheinlichkeiten und/oder der Dichtefunktion. (0.5)

(c) Bestimmen Sie Mittelwert und Varianz von X. (1+1)

(d) Median? 80%–Quantil? (0.5+0.5)

2. Ein System besteht aus fünf Komponenten, deren Lebensdauern – unabhängig voneinander – exponentialverteilt mit gleichem Mittelwert 1000 [h] sind.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß nach 500 [h] noch alle Komponenten arbeiten? (1)

(b) Ermitteln Sie die Dichte der Zeit X bis zum ersten Ausfall. (1)

(c) Bestimmen Sie den Mittelwert von X. (1)

(d) Ermitteln Sie die Dichte der Zeit Y bis zum Ausfall aller Komponenten. (1)

3. Die folgenden Daten sind Beobachtungen einer normalverteilten stochastischen Größe, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

7.96 7.90 7.98 8.01 7.97 7.96 8.03 8.02 8.04 8.02

(a) Ermitteln und zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion. (1)

(b) Bestimmen Sie Schätzwerte für μ, σ^2 und σ (+ kurzer Kommentar zu den verwendeten Schätzern). (1)

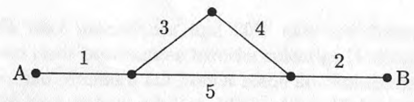
(c) Ermitteln Sie Konfidenzintervalle (jeweils mit ÜDW = 0.9) für μ und σ. (1+1)

$\alpha = 0{,}1$ ./.

[1] Pro Beispiel 4 Punkte (Punkteschlüssel in Klammern).

B) Beantworten bzw. berechnen Sie:[2]

(a) Betrachten Sie das folgende Netzwerk. Jedes Verbindungsstück ist – unabhängig von den anderen – mit Wahrscheinlichkeit 0.9 intakt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es eine Verbindung zwischen A und B ?



(b) Die Seitenlänge S eines gleichseitigen Dreiecks ist eine auf dem Intervall (1, 5) uniform verteilte stochastische Größe. Bestimmen Sie den Mittelwert der Dreiecksfläche.
Hinweis: $A = \frac{s^2\sqrt{3}}{4}$ (s = Seitenlänge).

(c) Berechnen Sie (approximativ) die Wahrscheinlichkeit, mit der man beim Ziehen ohne Zurücklegen von 100 Elementen aus einem großen Los, bei dem 50% der Elemente markiert sind, mehr als 60 markierte Elemente erhält. Kommentieren Sie die Zulässigkeit der bei der Berechnung verwendeten Approximation(en).

(d) Ermitteln Sie für die beiden folgenden stochastischen Größen die Verteilung der Summe $S = X + Y$:

$$X \sim D_{\{-1,0,1\}} \quad \text{und} \quad Y \sim D_{\{0,1,2\}} \qquad (X, Y \text{ unabh.})$$

3=m

(e) Was versteht man unter einer Pivot–Größe? Welche Funktion haben diese Größen? Geben Sie ein Beispiel.

Ergebnisse der schriftlichen Prüfung:
Do 29. April 2004 ab 16:00 (Aushang am Institut)
Telefonische Auskunft: 58801–10724
Mündliche Prüfung: Fr 30. April 2004
(In Liste eintragen!)

[2] Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte.

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG

STATISTIK UND WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

STUDIENRICHTUNG: INFORMATIK
VORLESUNG: O.PROF. R. VIERTL
ÜBUNG/SCHRIFTL. PRÜFUNG: W. GURKER
2–STÜNDIG MIT UNTERLAGEN

25. MAI 2004

A) Beispiele[1]

1. Eine stetige stochastische Größe X mit Werten nur zwischen 0 und 4 hat die folgende Dichtefunktion:

$$f(x) = \frac{1}{2} - ax$$

(a) Bestimmen Sie a und zeichen Sie die Dichte. (1)

(b) Ermitteln und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion. (1)

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X. (1)

(d) Bestimmen Sie die Varianz von X. (1)

2. 200Ω-Widerstände werden zu 60% auf einer neuen Maschine M_1 und zu 40% auf einer älteren Maschine M_2 gefertigt. M_1 produziert normalverteilte Widerstände mit Mittel 200Ω und Streuung 10Ω; die Widerstände von M_2 sind normalverteilt mit Mittel 202Ω und Streuung 12Ω. Ein Widerstand ist brauchbar, falls sein Wert zwischen 182Ω und 210Ω liegt.

(a) Welcher Anteil der (Gesamt–)Produktion ist brauchbar? (2)

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine Packung zu 100 Stück mindestens 80 brauchbare Widerstände? (Verwenden Sie eine möglichst gute Approximation, rechtfertigen Sie deren Zulässigkeit.) (2)

3. Eine Untersuchung von 320 Familien mit fünf Kindern ergab die folgende Häufigkeitsverteilung für die Anzahl von Knaben (K) und Mädchen (M):

Anzahl K/M	5K/0M	4K/1M	3K/2M	2K/3M	1K/4M	0K/5M
Anzahl Familien	18	56	110	88	40	8

Prüfen Sie mittels Chiquadrat–Anpassungstest, ob die Daten mit der Hypothese gleichwahrscheinlicher Knaben– und Mädchengeburten übereinstimmen, d.h. prüfen Sie $H_0 : X \sim B_{n,p}$ mit $n = 5$ und $p = \frac{1}{2}$. Nehmen Sie zuerst $\alpha = 5\%$ und dann $\alpha = 1\%$. Kommentieren Sie die Ergebnisse. (4)

./.

[1] Pro Beispiel 4 Punkte (Punkteschlüssel in Klammern).

B) Beantworten bzw. berechnen Sie: [2]

(a) Bei einem Glücksspiel gewinnt man mit Wahrscheinlichkeit 1/10. Wie oft muß man spielen, damit die Chance auf zumindest einen Gewinn mindestens 0.99 beträgt?

(b) Angenommen, 50% aller männlichen und 20% aller weiblichen Autofahrer/innen überschreiten die auf einer bestimmten Strecke zulässige Höchstgeschwindigkeit. Die Anzahl von Frauen und Männern am Steuer stehe im Verhältnis 3:5. Ein Auto wird mit überhöhter Geschwindigkeit geblitzt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitzt eine Frau am Steuer?

(c) X ist stetig uniform verteilt, $X \sim U_{(0,1)}$. Wie lautet die Dichte von $Y = \sqrt[3]{X}$?

(d) X und Y sind zwei unabhängige, standardnormalverteilte stochastische Größen; bestimmen Sie die Verteilung von:

$$Z = 4X - 6Y + 18$$

(e) Ermitteln Sie – auf Basis einer Stichprobe des Umfangs n – den linearen effizienten Schätzer für den Mittelwert einer exponentialverteilten stochastischen Größe X und zeigen Sie, daß dieser Schätzer konsistent ist.

Ergebnisse der schriftlichen Prüfung:
Do 27. Mai 2004 ab 16:00 (Aushang am Institut)
Telefonische Auskunft: 58801–10724
Mündliche Prüfung: Fr 28. Mai 2004
(In Liste eintragen!)

[2] Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte.

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG

EINFÜHRUNG IN DIE WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG UND STATISTIK

STUDIENRICHTUNG: INFORMATIK/VERSICHERUNGSMATHEMATIK
VORLESUNG: O.PROF. R. VIERTL
ÜBUNG/SCHRIFTL. PRÜFUNG: W. GURKER
2–STÜNDIG MIT UNTERLAGEN

22. JUNI 2004

A) Beispiele[1]

1. Für die stochastische Größe X gilt $W\{X = 3\} = \frac{1}{3}$; der Rest der Wahrscheinlichkeit ist im Intervall $(-1, 3)$ stetig uniform verteilt.

(a) Ermitteln und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion. (1)
(b) Bestimmen Sie Mittelwert (1) und Varianz (1) von X.
(c) Bestimmen Sie den Median. (0.5) Welchem Quantil entspricht $x = 0$? (0.5)

2. Die stochastische Größe Y ist das Maximum von fünf unabhängigen, nach $U_{(0,100)}$ verteilten, stochastischen Größen $X_1, \ldots X_5$.

(a) Ermitteln Sie die Dichte von Y. (2)
(b) Bestimmen Sie den Mittelwert von Y. (1)
(c) Wie kann man – ausgehend von nach $U_{(0,1)}$ verteilten Zufallszahlen – Beobachtungen von Y simulieren? (1)

3. Für die Kapazitäten [Ah] von zwei Batterietypen ergaben sich bei Testläufen die folgenden Werte:

Typ-I:	158, 162, 134, 135, 155, 146, 156
Typ-II:	208, 207, 212, 206, 211, 187, 199

Man betrachte die Daten als Stichproben aus normalverteilten Grundgesamtheiten.

(a) Ermitteln Sie die Stichprobenmittelwerte und -varianzen. (1)
(b) Prüfen Sie, ob die Varianzen der Kapazitäten bei beiden Typen gleich sind ($\alpha = 0.1$). (1)
(c) Ermitteln Sie ein 95% Konfidenzintervall für die Differenz der mittleren Kapazitäten von Typ-I und Typ-II Batterien. Läßt sich die Behauptung, daß die Differenz 60 [Ah] beträgt, vertreten? (2)

./.

[1] Pro Beispiel 4 Punkte (Punkteschlüssel in Klammern).

B) Beantworten bzw. berechnen Sie: [2]

(a) Eine Schachtel enthält 3 Münzen mit 'Kopf' auf beiden Seiten, 4 Münzen mit 'Zahl' auf beiden Seiten und 2 faire Münzen. Eine Münze wird zufällig ausgewählt und einmal geworfen; sie fällt auf 'Kopf'. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um die faire Münze?

(b) Ein Monitor hat eine Bildröhre, deren Lebensdauer exponentialverteilt mit Mittel 10000 Stunden ist. Das Gerät ist durchschnittlich 8 Stunden pro Tag in Betrieb. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es innerhalb von 5 Jahren keinen Ausfall?

(c) Der Radius eines Kreises ist eine exponentialverteilte stochastische Größe mit Mittelwert 1. Bestimmen Sie den Mittelwert der Kreisfläche.

(d) X ist eine auf dem Intervall $(0, \theta)$ $(\theta > 0)$ stetig uniform verteilte stochastische Größe. Ausgehend von einer Stichprobe, $X_1, \ldots, X_n$, nimmt jemand für die Schätzung von θ den folgenden Schätzer:

$$\widehat{\theta} = 2\,\overline{X}_n$$

Ist dieser Schätzer unverzerrt? konsistent?

(e) Die Verteilungsfunktionen der stochastischen Größen X und Y sind im Normal–Wahrscheinlichkeitsnetz parallele Geraden mit (Horizontal–) Abstand d. Was schließen Sie daraus?

(1) X und Y sind normalverteilt.
(2) Die Mittelwerte sind gleich.
(3) Die Mittelwerte unterscheiden sich um d.
(4) Die Streuungen/Varianzen sind gleich.
(5) Die Streuungen unterscheiden sich um d.
(6) Die Varianzen unterscheiden sich um d.

(Mehrfachantworten sind möglich!)

Ergebnisse der schriftlichen Prüfung: Mi 23. Juni 2004 ab 17:00 (Aushang am Institut) Telefonische Auskunft: 58801–10724
Mündliche Prüfung: Fr 25., Mo 28., Mi 30. Juni 2004 (In Liste eintragen!)

[2] Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte.

Lösung zur schriftlichen Prüfung

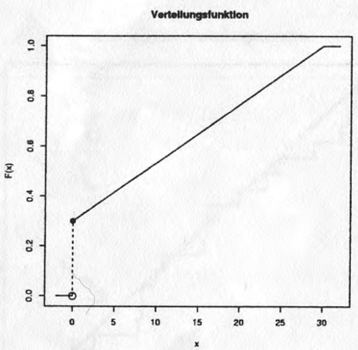
EWST f. Inf. / Stat. u. Wth. f. Inf.

26. Jänner 2004

Teil A)

1. (a) Die Verteilungsfunktion der Wartezeit X ist gegeben durch (gemischte Verteilung):

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{7x+90}{300} & 0 \leq x < 30 \\ 1 & x \geq 30 \end{cases}$$



(b) Den Mittelwert der gemischten Verteilung berechnet man wie folgt:

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot 0.3 + \int_0^{30} x \cdot \frac{7}{300}\,dx = \left.\frac{7x^2}{600}\right|_0^{30} = \frac{21}{2} = 10.5 \text{ [min]}$$

(c) Die Varianz berechnet man mittels Verschiebungssatz:

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \cdot 0.3 + \int_0^{30} x^2 \cdot \frac{7}{300}\,dx = \left.\frac{7x^3}{900}\right|_0^{30} = 210$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = 210 - \left(\frac{21}{2}\right)^2 = \frac{840-441}{4} = \frac{399}{4} = 99.75 \text{ [min}^2\text{]}$$

(d) Hier ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit zu berechnen:

$$W\{X > 20 \,|\, X > 10\} = \frac{W\{X > 20\}}{W\{X > 10\}} = \frac{1-(7\cdot 20+90)/300}{1-(7\cdot 10+90)/300} = \frac{70}{140} = \frac{1}{2}$$

Die Verteilung hat ein Gedächtnis, denn $W\{X > 10\} = 140/300 \neq 1/2$.

2. (a) Die Konstante c ist dadurch bestimmt, daß das Volumen unter der Dichte gleich 1 sein muß:

$$c\int_0^2\int_0^2 (x+y)\,dx\,dy = c\int_0^2 \left.\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\right|_{x=0}^{x=2} dy = c\int_0^2 2(1+y)\,dy = 2c\left.\left(y+\frac{y^2}{2}\right)\right|_0^2 = 8c$$

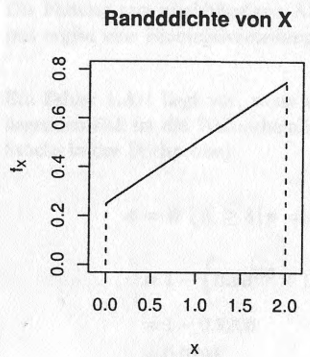
$$8c = 1 \to c = \frac{1}{8}$$

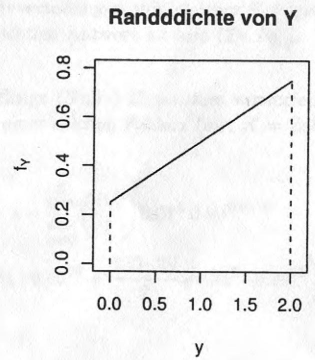
(b) Zur Bestimmung der Randdichten muß über die jeweils andere Variable integriert werden:

$$f_X(x) = \int_0^2 \frac{x+y}{8}\,dy = \left.\frac{xy+y^2/2}{8}\right|_{y=0}^{y=2} = \frac{x+1}{4},\ 0 < x < 2$$

Aus Symmetriegründen gilt:

$$f_Y(y) = \frac{y+1}{4},\ 0 < y < 2$$





(c) Für Unabhängigkeit müßte gelten:

$$f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) \qquad \text{für alle} \quad (x,y) \in (0,2)\times(0,2)$$

Wie man sofort sieht, ist dies hier nicht der Fall.

(d) Dazu ist zuerst die bedingte Dichte zu ermitteln:

$$f(y \,|\, x = 1/3) = \frac{f(1/3, y)}{f_X(1/3)} = \frac{(1/3+y)/8}{(1/3+1)/4} = \frac{1+3y}{8},\ 0 < y < 2$$

Damit gilt:

$$\mathbb{E}[Y \,|\, X = 1/3] = \int_0^2 y \cdot \frac{1+3y}{8}\,dy = \left.\frac{y^2/2+y^3}{8}\right|_0^2 = \frac{2+8}{8} = \frac{5}{4}$$

3. (a) Das Stichprobenmittel ist:

$$\overline{x} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = 0.5375 \qquad \text{Theoretischer Wert: } \mathbb{E}(X) = 0.5$$

Die Stichprobenvarianz ist:

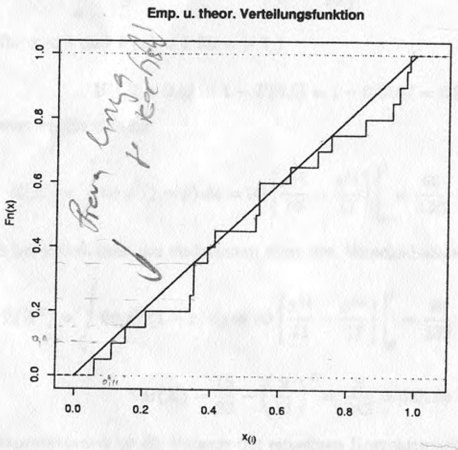
$$s^2 = \frac{1}{19}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \overline{x})^2 = 0.0897 \qquad \text{Theoretischer Wert: } \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{12} = 0.0833$$

(b) Zuerst ordnet man die Daten der Größe nach:

0.06 0.11 0.15 0.21 0.34 0.35 0.35 0.39 0.41 0.53
0.54 0.54 0.63 0.71 0.75 0.85 0.93 0.95 0.97 0.98

Die empirische Verteilungsfunktion ist eine Treppenfunktion, die bei jedem geordneten Wert um $1/20 = 0.05$ nach oben springt (bei mehrfachen Beobachtungen um das entsprechende Vielfache); die theoretische Verteilungsfunktion ist gegeben durch:

$$F(x) = x,\ 0 < x < 1$$



(c) Einfacher χ^2-Anpassungstest von:

$$H_0 : X \sim U_{(0,1)} \quad \text{gegen} \quad H_0 : X \not\sim U_{(0,1)}$$

Klasse	H	w	nw	$(H-nw)^2/nw$
$(0, 0.25]$	4	0.25	5	0.20
$(0.25, 0.50]$	5	0.25	5	0.00
$(0.50, 0.75]$	6	0.25	5	0.20
$(0.75, 1)$	5	0.25	5	0.00
Summe	20	1.00	20	0.40 ← T

Der Wert der Teststatistik, $T = 0.4$, ist kleiner als $\chi^2_{3;0.95} = 7.81$; die Nullhypothese wird also nicht verworfen.

$T < \chi^2_{3;0,95}$

$\chi^2_{3;0,95}$

Teil B)

(a) Das System ist intakt, wenn die erste Komponente und mindestens eine der drei parallelen Komponenten intakt sind. Die Wahrscheinlichkeit für letzteres Ereignis ist $1-(1-p)^3$; die Intaktwahrscheinlichkeit des Systems ist also gegeben durch:

$$W\{\text{System intakt}\} = p\left[1-(1-p)^3\right] = 3p^2 - 3p^3 + p^4$$

(b) Bei einer normalverteilten sG ist der Median gleich dem Mittelwert; laut Angabe gilt:

$$\Phi\left(\frac{1250-1000}{\sigma}\right) = 0.75 \;\rightarrow\; \frac{250}{\sigma} = z_{0.75} = 0.6745 \;\rightarrow\; \sigma = \frac{250}{0.6745} = 371$$

(c) Die beiden Größen stehen in einer (positiven) linearen Beziehung zueinander; die richtige Antwort ist also (4): $\rho_{XY} = 1$.

(d) Die Faltung von unabhängigen Alternativverteilungen mit gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit ergibt eine Binomialverteilung; die richtige Antwort ist also (2): $B_{2,p}$.

(e) Ein Fehler 1.Art liegt vor, wenn eine richtige (Null–) Hypothese verworfen wird; im vorliegenden Fall ist die Wahrscheinlichkeit eines solchen Fehlers (mit X = Zahl der defekten Stücke in der Stichprobe):

$$\begin{aligned}\alpha = W\{X \ge 3 \,|\, p = 0.01\} &= 1 - \sum_{k=0}^{2}\binom{100}{k}0.01^k\,0.99^{100-k}\\ &= 1 - \left(0.99^{100} + 100\cdot 0.01\cdot 0.99^{99} + \frac{100\cdot 99}{2}\cdot 0.01^2\cdot 0.99^{98}\right)\\ &= 1 - 0.9206\\ &= 0.0794\end{aligned}$$

Lösung zur schriftlichen Prüfung

EWST f. Inf. / Stat. u. Wth. f. Inf.

9. März 2004

Teil A)

1. (a) Die Konstante c ist dadurch bestimmt, daß die Fläche unter einer Dichte gleich 1 sein muß:

$$c\int_0^1 x^8(1-x)\,dx = c\int_0^1 (x^8-x^9)\,dx = c\left[\frac{x^9}{9}-\frac{x^{10}}{10}\right]\Big|_0^1 = c\left[\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right] = \frac{c}{90}$$

Die Konstante ist also $c = 90$.

(b) Die Verteilungsfunktion ist gegeben wie folgt:

$$F(x) = \int_0^x 90\,y^8(1-y)\,dy = 90\left[\frac{x^9}{9}-\frac{x^{10}}{10}\right] = 10\,x^9 - 9\,x^{10},\ 0 \le x \le 1$$

($F(x) = 0$ für $x < 0$ und $F(x) = 1$ für $x > 1$.)

$$W\{X > 0.5\} = 1 - F(0.5) = 1 - 0.0107 = 0.9893$$

(c) Der Mittelwert ergibt sich zu:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 90\,x^9(1-x)\,dx = 90\left[\frac{x^{10}}{10}-\frac{x^{11}}{11}\right]\Big|_0^1 = \frac{90}{110} = \frac{9}{11} = 0.8181$$

(d) Die Varianz berechnet man am einfachsten über den Verschiebungssatz:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 90\,x^{10}(1-x)\,dx = 90\left[\frac{x^{11}}{11}-\frac{x^{12}}{12}\right]\Big|_0^1 = \frac{90}{132} = \frac{15}{22} = 0.6818$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{15}{22} - \left(\frac{9}{11}\right)^2 = \frac{3}{242} = 0.0124$$

2. (a) Die Gesamtkorrekturzeit ist die Summe der einzelnen Korrekturzeiten:

$$X = \sum_{i=1}^{40} X_i$$

Nach dem Zentralen Grenzverteilungssatz gilt (Vs.: X_i unabhängig):

$$X \mathrel{\dot\sim} N(40\cdot 6, 40\cdot 36) = N(240, 1440)$$

Die Wahrscheinlichkeit, bis zu den Spätnachrichetn fertig zu sein, ist also gegeben durch (18:50 bis 23:00 $\widehat{=}$ 250 Minuten):

$$W\{X \le 250\} = \Phi\left(\frac{250-240}{\sqrt{1440}}\right) = \Phi(0.2635) = 0.6039$$

(b) Analog zu (a) ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit nun:

$$W\{X > 260\} = 1 - \Phi\left(\frac{260-240}{\sqrt{1440}}\right) = 1 - \Phi(0.5270) = 1 - 0.7009 = 0.2991$$

(c) Hier ist das 99% Quantil von X zu bestimmen:

$$x_{0.99} = 240 + u_{0.99}\cdot\sqrt{1440} = 240 + 2.3263\cdot\sqrt{1440} = 328.2787$$

Er benötigt im Schnitt nur in einem von 100 (gleichartigen) Fällen länger als etwa 328 Minuten ($\approx$ 5.5 Stunden).

3. Der plausible Schätzwert des Parameters μ einer Poissonverteilung ist gegeben durch (vgl. für die – hier verlangte! – Herleitung die VO bzw. die UE):

$$\widehat{\mu} = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{48}(0\cdot 9 + 1\cdot 9 + 2\cdot 10 + 3\cdot 14 + 4\cdot 6) = \frac{95}{48} = 1.98$$

Bem.: Die obige Vorgangsweise ist nicht ganz korrekt; in Ermangelung weiterer Information nimmt man an, daß alle Beobachtungen der Klasse ≥ 4 gleich 4 sind.
Die Klassenwahrscheinlichkeiten werden dann geschätzt wie folgt:

$$\widehat{W}\{X = k\} = \frac{\widehat{\mu}^k\, e^{-\widehat{\mu}}}{k!},\quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Klasse	H	$\widehat{w}$	$n\widehat{w}$	$(H - n\widehat{w})^2/n\widehat{w}$
0	9	0.1382	6.63	0.8448
1	9	0.2735	13.13	1.2978
2	10	0.2706	12.99	0.6885
3	14	0.1785	8.57	3.4400
4,5,...	6	0.1391	6.68	0.0689
Summe	48	0.9999	48.00	6.3400

Der Wert der Teststatistik, 6.34, ist mit dem 90% Quantil einer χ^2–Verteilung mit $r - s - 1 = 5 - 1 - 1 = 3$ Freiheitsgraden zu vergleichen:

$$6.34 > \chi^2_{3;0.9} = 6.25$$

Die Nullhypothese (= Poissonverteilung) ist also bei $\alpha = 10\%$ (knapp) zu verwerfen.

Teil B)

(a) Das System ist intakt, wenn in jeder Zweiergruppe mindestens eine der beiden parallelen Komponenten intakt ist. Die Wahrscheinlichkeit für letzteres Ereignis ist $1 - q^2$; die Intaktwahrscheinlichkeit des Systems ist also gegeben durch:

$$W\{\text{System intakt}\} = [1 - q^2]^2 = 1 - 2q^2 + q^4$$

(b) Laut Angabe gilt:

$$2\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - 1 = 0.95$$

Daraus folgt:

$$\frac{10}{\sigma} = u_{0.975} \quad\Longrightarrow\quad \sigma = \frac{10}{u_{0.975}} = \frac{10}{1.96} = 5.10$$

(c) Die Verteilungsfunktion von X ergibt sich sofort zu:

$$F(x|k) = x^{k+1},\ 0 < x < 1$$

Diese Funktion ist zu invertieren:

$$x^{k+1} = u \quad \Longrightarrow \quad x = u^{1/(k+1)}$$

(d) Die Faltung von unabhängigen, identisch verteilten Exponentialverteilungen ergibt eine Gamma–Verteilung (die man in diesem Fall auch Erlangverteilung nennt):
Antwort (5): $\gamma(2,\tau) \equiv \mathrm{Er}_{2,\tau}$

(e) Hier ist ein F–Test anzuwenden:

$$\frac{40.5^2}{32.1^2} = 1.592 < F_{19,19,0.95} = 2.168$$

Die Hypothese der Gleichheit der Varianzen wird nicht verworfen.

Lösung zur schriftlichen Prüfung

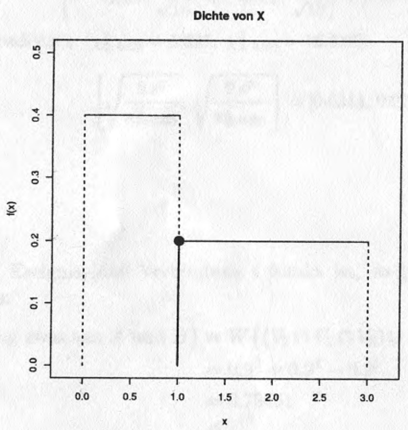
EWST f. Inf. / Stat. u. Wth. f. Inf.

27. April 2004

Teil A)

1. (a) Die Verteilungsfunktion hat einen Sprung, ist aber keine reine Treppenfunktion; es handelt sich daher um eine gemischte Verteilung.

(b) Die Dichte ergibt sich durch Ableiten (an den Stellen, an denen die Verteilungsfunktion differenzierbar ist); die diskrete Wahrscheinlichkeit bei $x = 1$ entspricht der Sprunghöhe:



(c) Den Mittelwert von X berechnet man wie folgt:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x \cdot 0.4\,dx + 1 \cdot 0.2 + \int_1^3 x \cdot 0.2\,dx = \frac{x^2}{2} 0.4 \Big|_0^1 + 0.2 + \frac{x^2}{2} 0.2 \Big|_1^3 = 1.2$$

(d) Die Varianz berechnet man über den Verschiebungssatz:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 0.4\,dx + 1^2 \cdot 0.2 + \int_1^3 x^2 \cdot 0.2\,dx = \frac{x^3}{3} 0.4 \Big|_0^1 + 0.2 + \frac{x^3}{3} 0.2 \Big|_1^3 = \frac{6.2}{3} = 2.067$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{6.2}{3} - 1.2^2 = \frac{1.88}{3} = 0.627$$

(e) Die beiden Quantile können unmittelbar der Abbildung der Verteilungsfunktion entnommen werden (verallgemeinerte Inverse!):

Median: $x_{0.5} = 1$; 80%–Quantil: $x_{0.8} = 2$

2. (a) Die Wahrscheinlichkeit, daß nach 500 Stunden noch alle Komponenten arbeiten ist gegeben durch (X_i = Lebensdauer der i–ten Komponente; X_i unabhängig):

$$\prod_{i=1}^{5} W\{X_i > 500\} = \left(e^{-500/1000}\right)^5 = e^{-5/2} = 0.0821$$

(b) Die Zeitspanne X bis zum ersten Ausfall ist das Minimum der Lebensdauern; die Verteilungsfunktion des Minimums ist:

$$F_X(x) = 1 - \prod_{i=1}^{5} W\{X_i > x\} = 1 - e^{-5x/1000} = 1 - e^{-x/200}, \quad x > 0$$

Die Dichte ergibt sich durch Ableiten:

$$f_X(x) = \frac{1}{200} e^{-x/200}, \quad x > 0$$

(c) Wie sich am Ergebnis von (b) zeigt, ist X wieder exponentialverteilt mit Parameter (= Mittelwert) 200 Stunden.

(d) Die Zeitspanne Y bis zum Ausfall aller Komponenten ist das Maximum der Lebensdauern; die Verteilungsfunktion des Maximums ist:

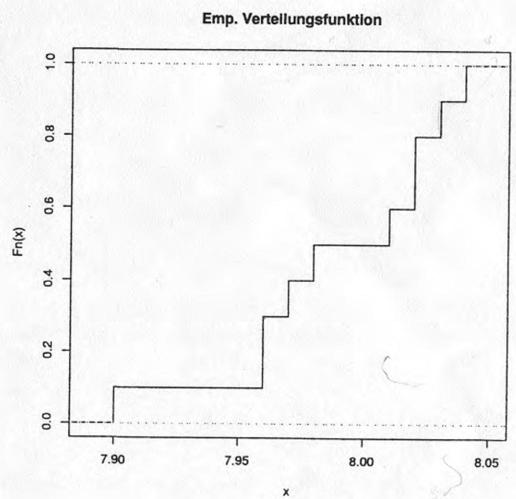
$$F_Y(x) = \prod_{i=1}^{5} W\{X_i \le x\} = \left(1 - e^{-x/1000}\right)^5, \quad x > 0$$

Die Dichte ergibt sich durch Ableiten:

$$f_Y(x) = \frac{1}{200} e^{-x/1000} \left(1 - e^{-x/1000}\right)^4, \quad x > 0$$

(Keine Exponentialverteilung!)

3. (a) Die empirische Verteilungsfunktion ist eine Treppenfunktion mit Sprüngen (der Höhe 1/10 oder – bei gleichen Beobachtungen – Vielfache davon) an den Stellen der (geordneten) Stichprobe (und hat darüberhinaus alle Eigenschaften einer Verteilungsfunktion):



(b) Das Stichprobenmittel ist ein unverzerrter und konsistenter Schätzer für den Mittelwert einer Verteilung (hier – Normalverteilung – ist $\overline{x}$ auch der plausible Schätzwert von μ):

$$\widehat{\mu} = \overline{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 7.989$$

Die Stichprobenvarianz ist ein unverzerrter und konsistenter Schätzer für die Varianz einer Verteilung (der plausible Schätzwert wäre hier – Normalverteilung – $(n-1)s^2/n$); die Stichprobenstreuung ist ein asymptotisch unverzerrter und konsistenter Schätzer für die Streuung einer Verteilung:

$$\widehat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})^2 = 0.0019; \quad \widehat{\sigma} = +\sqrt{s^2} = 0.0431$$

(c) Konfidenzintervall für μ ($t_{9;\,0.95} = 1.833$):

$$\left[\overline{x} - t_{9;\,0.95}\frac{s}{\sqrt{10}},\ \overline{x} + t_{9;\,0.95}\frac{s}{\sqrt{10}}\right] = [7.964,\ 8.014]$$

Konfidenzintervall für σ ($\chi^2_{9;\,0.05} = 3.325$; $\chi^2_{9;\,0.95} = 16.919$):

$$\left[\sqrt{\frac{9\,s^2}{\chi^2_{9;\,0.95}}},\ \sqrt{\frac{9\,s^2}{\chi^2_{9;\,0.05}}}\right] = [0.0314,\ 0.0708]$$

Teil B)

(a) Bezeichnet V_i das Ereignis, daß Verbindung i intakt ist, so gilt unter Verwendung des Additionstheorems:

$$\begin{aligned} W\{\text{Verbinung zwischen } A \text{ und } B\} &= W\{(V_1 \cap V_2 \cap V_5) \cup (V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4)\} \\ &= 0.9^3 + 0.9^4 - 0.9^5 \\ &= 0.79461 \end{aligned}$$

(b) Nach dem „Satz vom unbewußten Statistiker“ gilt (Dichte von S: $f(x) = 1/4\, I_{(1,5)}(x)$):

$$\mathbb{E}(A) = \int_1^5 \frac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{4}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{16}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^5 = \frac{124\sqrt{3}}{48} = \frac{31\sqrt{3}}{12} \approx 4.47$$

(c) Da die Elemente aus einem „großen“ Los gezogen werden, begeht man keinen großen Fehler, wenn man davon ausgeht, daß die Ziehungen *mit* Zurücklegen erfolgen. Dies erlaubt die Verwendung der Binomialverteilung. Weiter kann wegen $100 * 0.5 * 0.5 = 25 > 9$ die Binomialverteilung sehr gut durch die Normalverteilung approximiert werden. Verwendet man überdies die Stetigkeitskorrektur, so ergibt sich:

$$W\{X > 60\} = 1 - W\{X \le 60\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{60.5 - 50}{5}\right) = 1 - \Phi(2.1) = 1 - 0.9821 = 0.0179$$

Bem.: Ohne Stetigkeitskorrektur ergibt sich 0.0227; der exakte Wert ist 0.0176. (Man beachte die gute Übereinstimmung von letzterem mit dem zuerst erhaltenen Wert!)

(d) Die Faltungsformel für diskrete Verteilungen lautet:

$$p_{X+Y}(a) = \sum_x p_X(x)p_Y(a - x)$$

Hier ergibt sich für:

$$p_X(x) = \frac{1}{3},\ x = -1, 0, 1; \quad p_Y(y) = \frac{1}{3},\ y = 0, 1, 2$$

a	−1	0	1	2	3
$p_{X+Y}(a)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

(e) Eine Pivot–Größe ist eine stochastische Größe, die eine Funktion der Stichprobe und von unbekannten Parametern ist, deren Verteilung jedoch nicht von (unbekannten) Parametern abhängt. Solche Größen finden bei der Konstruktion von Konfidenzbereichen Verwendung.
Beispiel: $X_1, \ldots, X_n$ Stichprobe von $N(\mu, \sigma^2)$:

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n} \sim t_{n-1}$$

Lösung zur schriftlichen Prüfung

EWST f. Inf. / Stat. u. Wth. f. Inf.

25. Mai 2004

Teil A)

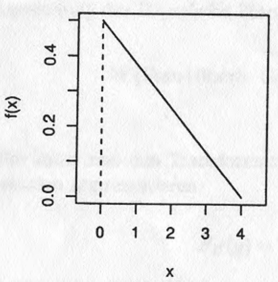
1. (a) Die Fläche unter der Dichte ist Eins:

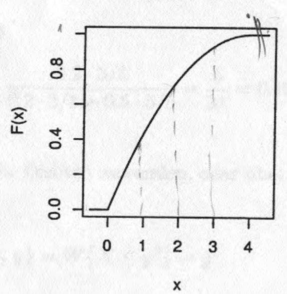
$$\int_0^4 \left(\frac{1}{2} - ax\right) dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{ax^2}{2}\right)\Big|_0^4 = 2 - 8a = 1 \quad\Rightarrow\quad a = \frac{1}{8}$$

(b) Verteilungsfunktion von X:

$$F(x) = W\{X \le x\} = \int_0^x \left(\frac{1}{2} - \frac{u}{8}\right) du = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{16} = \frac{8x - x^2}{16}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{8x - x^2}{16} & 0 \le x \le 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$





(c) Mittelwert von X:

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^4 x\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{8}\right) dx = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24}\right)\Big|_0^4 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

(d) Varianz von X (Verschiebungssatz):

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^4 x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{8}\right) dx = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{32}\right)\Big|_0^4 = \frac{32}{3} - 8 = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow\quad \mathrm{Var}(X) = \frac{8}{3} - \frac{16}{9} = \frac{8}{9}$$

2. (a) Bezeichnet B das Ereignis, daß ein Widerstand brauchbar ist, so gilt:

$$\begin{aligned} W(B|M_1) &= \Phi\left(\frac{210-200}{10}\right) - \Phi\left(\frac{182-200}{10}\right) \\ &= \Phi(1) - [1 - \Phi(1.8)] \\ &= 0.8413 - [1 - 0.9641] \\ &= 0.8054 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(B|M_2) &= \Phi\left(\frac{210-202}{12}\right) - \Phi\left(\frac{182-202}{12}\right) \\ &= \Phi(0.6667) - [1 - \Phi(1.6667)] \\ &= 0.7475 - [1 - 0.9522] \\ &= 0.6997 \end{aligned}$$

Mit dem Satz v. d. vollst. Wahrscheinlichkeit folgt:

$$p = W(B) = W(B|M_1)\cdot 0.6 + W(B|M_2)\cdot 0.4 = 0.7631$$

(b) Ist X die Anzahl der brauchbaren Widerstände in der Packung, so gilt: $X \sim B_{100,p}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit kann mit Hilfe des Zentralen Grenzverteilungssatzes berechnet werden (die Approximation ist wegen $100p(1-p) = 18.08 > 9$ zulässig); die Approximation läßt sich durch die Stetigkeitskorrektur verbessern:

$$\begin{aligned} W\{X \ge 80\} &= 1 - W\{X \le 79\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{79.5 - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}}\right) \\ &= 1 - \Phi(0.7495) \\ &= 1 - 0.7732 \\ &= 0.2268 \end{aligned}$$

(Ohne Stetigkeitskorrektur: 0.2637; exakt: 0.2296.)

3. Bezeichnet X die Zahl der Knaben, so kann die Hypothese $H_0 : X \sim B_{5,0.5}$ mittels (einfachem) Chiquadrat-Anpassungstest geprüft werden. Die Binomialwahrscheinlichkeiten sind gegeben durch:

$$w_i = \binom{5}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \binom{5}{i}\frac{1}{32}, \quad i = 0, 1, \ldots, 5$$

(Die Verteilung ist wegen $p = 1/2$ symmetrisch: $w_i = w_{5-i}$.)

K/M	H	w	nw	$(H-nw)^2/nw$
5/0	18	1/32	10	6.40
4/1	56	5/32	50	0.72
3/2	110	10/32	100	1.00
2/3	88	10/32	100	1.44
1/4	40	5/32	50	2.00
0/5	8	1/32	10	0.40
Summe	320	1	320	11.96

Der Wert der Teststatistik ist mit dem 95%– bzw. 99%–Quantil der χ^2–Verteilung mit $6-1=5$ Freiheitsgraden zu vergleichen:

$$11.96 > \chi^2_{5;\,0.95} = 11.07; \qquad 11.96 < \chi^2_{5;\,0.99} = 15.09$$

Im ersten Fall wird die Hypothese verworfen, im zweiten Fall (kleinere Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art) jedoch nicht. Insgesamt kann man sagen, daß die Hypothese gleichwahrscheinlicher Knaben– und Mädchengeburten zumindest zweifelhaft ist; weitere Untersuchungen sind notwendig.

Teil B)

(a) Ist $p=0.1$ die Gewinnwahrscheinlichkeit, so ist die Wahrscheinlichkeit bei n Spielen nicht zu gewinnen $(1-p)^n$; letztere Wahrscheinlichkeit soll nicht größer als 0.01 sein:

$$(1-p)^n \le 0.01 \quad \Longrightarrow \quad n \ge \frac{\ln 0.01}{\ln(1-p)} = 43.7$$

(b) Anwendung der Bayes'sche Formel:

$$W\{\text{Frau} \,|\, \text{überh. Geschw.}\} = \frac{0.2\cdot 3/8}{0.2\cdot 3/8 + 0.5\cdot 5/8} = \frac{6}{31} = 0.1935$$

(c) Hier kann man den Transformationssatz für Dichten anwenden, oder über die Verteilungsfunktion argumentieren:

$$F_Y(y) = W\{\sqrt[3]{X} \le y\} = W\{X \le y^3\} = y^3$$

Daraus folgt durch Ableiten:

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = 3\,y^2, \quad 0 < y < 1$$

(d) Z ist wieder normalverteilt ($\mu_x = \mu_y = 0$; $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$):

$$Z \sim N\big(4\mu_x - 6\mu_y + 18,\, 4^2\sigma_x^2 + 6^2\sigma_y^2\big) = N(18, 52)$$

(e) Laut Vorlesung ist $\widehat{\tau} = \overline{X}_n$ der lineare effiziente Schätzer für τ (= Mittelwert von X). Dieser Schätzer ist unverzerrt, $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \tau$; für seine Varianz gilt:

$$\operatorname{Var}(\overline{X}_n) = \frac{\tau^2}{n} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

Daher folgt (ebenfalls nach einem Satz der Vorlesung), daß $\overline{X}_n$ ein konsistenter Schätzer von τ ist.

Bem.: Die Konsistenz von $\overline{X}_n$ folgt auch aus dem Gesetz der Großen Zahlen.

Lösung zur schriftlichen Prüfung

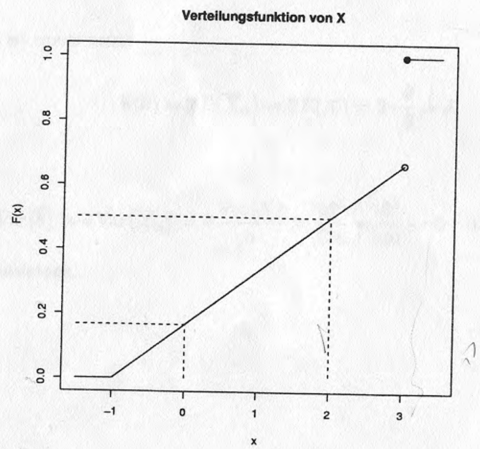
EWST f. Inf. / Stat. u. Wth. f. Inf.

22. Juni 2004

Teil A)

1. (a) Die Verteilungsfunktion ist gegeben durch:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < -1 \\ \dfrac{x+1}{6} & \text{für} \quad -1 \le x < 3 \\ 1 & \text{für} \quad x \ge 3 \end{cases}$$



(b) Der Mittelwert von X ergibt sich wie folgt:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-1}^{3} x\,\frac{1}{6}\,dx + 3\cdot\frac{1}{3} = \frac{x^2}{12}\bigg|_{-1}^{3} + 1 = \frac{8}{12} + 1 = \frac{5}{3}$$

Die Varianz berechnet man mittels Verschiebungssatz:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-1}^{3} x^2\,\frac{1}{6}\,dx + 9\cdot\frac{1}{3} = \frac{x^3}{18}\bigg|_{-1}^{3} + 3 = \frac{14}{9} + 3 = \frac{41}{9} = 4.56$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{41}{9} - \frac{25}{9} = \frac{16}{9} = 1.78$$

(c) Für den Median $\widetilde{x}$ gilt:

$$\frac{\widetilde{x}+1}{6} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{x} = 2$$

$F(0) = 1/6$, d.h. $x = 0$ entspricht dem $100/6 \approx 16.67\%$ Quantil.

2. (a) Zunächst bestimmt man die Verteilungsfunktion von Y; auf Grund der Unabhängigkeit der Y_i gilt:

$$F_Y(y) = W\{Y \le y\} = W\{X_i \le y,\ i = 1, \ldots, 5\} = \prod_{i=1}^{5} F_{X_i}(y) = \left(\frac{y}{100}\right)^5$$

Die Dichte ergibt sich durch Ableiten:

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{5}{100}\left(\frac{y}{100}\right)^4 = \frac{5\,y^4}{100^5},\ 0 \le y \le 100$$

(b)

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^{100} y\,\frac{5\,y^4}{100^5}\,dy = \int_0^{100} \frac{5\,y^5}{100^5}\,dy = \frac{5}{6}\,\frac{y^6}{100^5}\bigg|_0^{100} = \frac{500}{6} = \frac{250}{3} = 83.33$$

(c) Hier hat man zumindest zwei Möglichkeiten:

(1) Erzeuge fünf nach $U_{(0,1)}$ verteilte Zufallszahlen, $u_1, \ldots, u_5$, bestimme ihr Maximum und multipliziere letzteres mit 100:

$$y = 100\ \max\{u_1, \ldots, u_5\}$$

(2) Erzeuge eine nach $U_{(0,1)}$ verteilte Zufallszahl u und invertiere an dieser Stelle die Verteilungsfunktion von Y:

$$u = \left(\frac{y}{100}\right)^5 \quad \Longrightarrow \quad y = 100\,u^{1/5}$$

Im ersten Fall benötigt man für die Erzeugung einer Beobachtung von Y fünf uniform verteilte Zufallszahlen, im zweiten Fall nur eine (allerding muß von dieser die 5. Wurzel ermittelt werden).

3. (a) Stichprobenmittel und –varianz:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \quad (s = +\sqrt{s^2})$$

Typ-I: $\overline{x}_I = 149.43$, $s_I^2 = 127.29$ ($s_I = 11.28$)
Typ-II: $\overline{x}_{II} = 204.29$, $s_{II}^2 = 75.90$ ($s_{II} = 8.71$)

(b) F–Statistik (größere Stichprobenvarianz in den Zähler):

$$F = \frac{s_I^2}{s_{II}^2} = 1.68 < F_{6,6;\,0.95} = 4.28$$

Die $\mathcal{H}_0 : \sigma_I^2 = \sigma_{II}^2$ wird auf dem Niveau 10% nicht verworfen.

(c) Ein 95% Konfidenzintervall für $\mu_{II} - \mu_I$ ist gegeben wie folgt:

$$\overline{x}_{II} - \overline{x}_I \pm \underbrace{t_{12;\,0.975}}_{=2.18}\sqrt{\frac{2}{7}}\sqrt{\frac{6\,s_I^2 + 6\,s_{II}^2}{12}} = (43.12;\ 66.60)$$

Da 60 Element des Intervalls ist, läßt sich die behauptete Differenz vertreten.

Teil B)

(a) Nach der Bayes'schen Formel gilt:

$$W(\text{Münze fair}|\text{Münze fällt auf 'K'}) = \frac{1/2 \cdot 2/9}{1 \cdot 3/9 + 0 \cdot 4/9 + 1/2 \cdot 2/9} = \frac{1}{4}$$

(b) Ist X die Lebensdauer der Röhre, so gilt:

$$W\{X > 5 \cdot 8 \cdot 365\} = W\{X > 14600\} = e^{-14600/10000} = e^{-1.46} = 0.2322$$

(c) Nach dem „Satz vom unbewußten Statistiker" gilt (X ist der Radius):

$$\mathbb{E}(X^2\pi) = \pi \int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx = \pi\, \mathbb{E}(X^2) = \pi\left[\mathrm{Var}(X) + \mathbb{E}^2(X)\right] = \pi[1 + 1^2] = 2\pi$$

(d) Der Schätzer ist unverzerrt:

$$\mathbb{E}(\widehat{\theta}) = 2\,\mathbb{E}(\overline{X}_n) = 2\,\mathbb{E}(X) = 2 \cdot \frac{\theta}{2} = \theta$$

Wegen:

$$\mathrm{Var}(\widehat{\theta}) = 4\,\mathrm{Var}(\overline{X}_n) = 4\,\frac{\mathrm{Var}(X)}{n} = \frac{4\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

ist er auch konsistent.

(e) (1), (3), (4)

28-1-2003

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG

EINFÜHRUNG IN DIE WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG UND STATISTIK

STUDIENRICHTUNG: INFORMATIK/VERSICHERUNGSMATHEMATIK
VORLESUNG: O.PROF. R. VIERTL
ÜBUNG/SCHRIFTL. PRÜFUNG: W. GURKER
2-STÜNDIG MIT UNTERLAGEN

28. JÄNNER 2003

A) Beispiele[1]

✓ **1.** Für eine stochastische Größe X gilt $W\{X = 5\} = \frac{1}{5}$; der Rest der Wahrscheinlichkeitsverteilung ist im Intervall $(0, 5)$ uniform verteilt.

(a) Ermitteln und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion. (1)

(b) Berechnen Sie den Mittelwert (0.5) und die Varianz (1.5) von X.

(c) Berechnen Sie den Median. (0.5) Welchem Quantil entspricht $x = 1$? (0.5)

2. Die Hauptspeicherbelegung von Jobs auf einem Server, ausgedrückt als Anteil des verfügbaren Speichers, wurde bei 8 zufällig ausgewählten Jobs ermittelt:

0.55 0.25 0.75 0.85 0.45 0.95 0.90 0.85

(a) Zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion. (1)

(b) Als Modell für den Anteil X wird eine Dichte der folgenden Form vorgeschlagen:

$$f(x|a) = (a+1)\,x^a, \quad 0 < x < 1,\ a > 0$$ S66, Satz um bewunde Statistika

Berechnen Sie das k-te Moment ($= \mathbb{E}(X^k)$) der Verteilung. (1)

(c) Ermitteln Sie den plausiblen (= Maximum–Likelihood) Schätzwert von a. (2) ?

✓ **3.** Die folgenden Zahlen sind die von der MATLAB-Funktion `rand` (mit `state=0`) erzeugten ersten 25 Zufallszahlen (der Größe nach geordnet):

0.0099	0.0185	0.0579	0.1389	0.1763
0.2311	0.3529	0.4057	0.4103	0.4447
0.4565	0.4860	0.6068	0.6154	0.7382
0.7621	0.7919	0.8132	0.8214	0.8913
0.8936	0.9169	0.9218	0.9355	0.9501

Prüfen Sie mittels Chiquadrat–Anpassungtest (mit $\alpha = 5\%$), ob die Zahlen als Beobachtungen einer nach $U_{(0,1)}$ verteilten stochastischen Größe X angesehen werden können. Nehmen Sie beispielsweise 5 (gleichwahrscheinliche) Klassen und schreiben Sie alle Zwischenschritte in Form einer Tabelle detailliert auf.

./.

[1] Pro Beispiel 4 Punkte (Punkteschlüssel in Klammern).

B) Beantworten bzw. berechnen Sie: [2]

(a) Ein Flugzeug hat vier Propeller, zwei auf jeder Seite. Ein sicherer Flug ist nur dann möglich, falls auf jeder Seite zumindest ein Propeller arbeitet. Die Wahrscheinlichkeit eines Propellerausfalls während eines Fluges ist q $(0 < q < 1)$. Die Propeller arbeiten unabhängig voneinander. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eines sicheren Fluges. (*Extrapunkt* für die richtige Beantwortung der folgenden Frage: Wie groß darf q höchstens sein, damit mit einer (Mindest–) Wahrscheinlichkeit von 0.99 ein sicherer Flug gewährleistet ist?)

(b) Wie muß man die folgenden drei nach $U_{(0,1)}$ verteilten Zufallszahlen transformieren, um drei Beobachtungen einer Exponentialverteilung mit Mittelwert 10 zu bekommen? Veranschaulichen Sie die Vorgangsweise graphisch.

0.9501 0.2311 0.6068

(c) Ein Taschenrechner benötigt zwei 1.5–Volt Batterien (für insgesamt 3 Volt). Die tatsächliche Spannung einer Batterie ist normalverteilt mit $\mu = 1.5$ und $\sigma^2 = 0.045$. Die Toleranz des Rechners ist so ausgelegt, daß er nicht korrekt arbeitet, wenn die Gesamtspannung außerhalb des Bereichs $[2.70; 3.30]$ liegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit arbeitet der Taschenrechner korrekt?

(d) X_1 und X_2 seien zwei unabhängige Beobachtungen einer $N(0,1)$–Verteilung. Welche der folgenden Größen ist wieder standardnormalverteilt? (Mit Begründung!)

$$\frac{X_1 + X_2}{2} \qquad X_1 + X_2 \qquad \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \qquad X_1^2 \qquad \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}$$

(*Extrapunkt*, wenn die Verteilungen aller fünf Größen richtig angegeben werden.)

(e) Zwei (unabhängige) Stichproben aus normalverteilten Populationen haben eine Streuung von $s = 14.5$ (Stichprobenumfang = 30) bzw. von $s = 12.3$ (Stichprobenumfang = 100). Stimmen die Varianzen der Populationen überein? ($\alpha = 10\%$)

Ergebnisse der schriftlichen Prüfung:
Fr 31. Jän. 2003 ab 16:00 (Aushang am Institut)
Telefonische Auskunft: 58801/10724

[2] Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte.

Lösung zur schriftlichen Prüfung

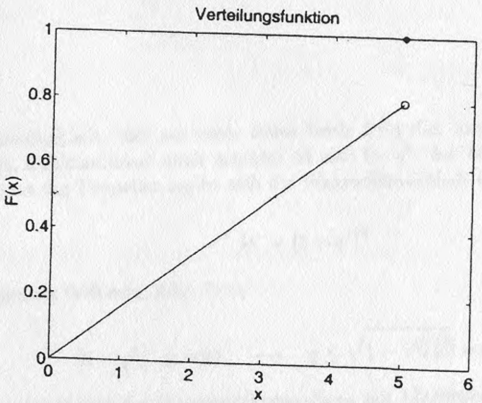
EWST f. Inf. / Stat. u. Wth. f. Inf.

28. Jänner 2003

Teil A)

1. (a) Die Verteilungsfunktion ist gegeben durch:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ \frac{4\,x}{25} = 0.16\,x & \text{für} \quad 0 \le x < 5 \\ 1 & \text{für} \quad x \ge 1 \end{cases} \quad (5)$$



(b) Der Mittelwert von X ergibt sich wie folgt:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^5 x\,\frac{4}{25}\,dx + 5 \cdot \frac{1}{5} = \left.\frac{4\,x^2}{50}\right|_0^5 + 1 = 2 + 1 = 3$$

Die Varianz berechnet man mittels Verschiebungssatz:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^5 x^2\,\frac{4}{25}\,dx + 25 \cdot \frac{1}{5} = \left.\frac{4\,x^3}{75}\right|_0^5 + 5 = \frac{20}{3} + 5 = \frac{35}{3}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \frac{35}{3} - 9 = \frac{8}{3}$$

(c) Der Median $x_{0.5}$ ergibt sich als Lösung von:

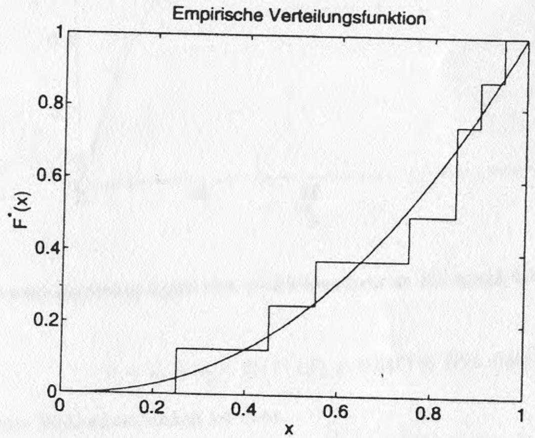
$$F(x_{0.5}) = 0.5 \quad \longrightarrow \quad x_{0.5} = \frac{25}{8} = 3.125$$

$F(1) = 4/25 = 0.16$, d.h. 1 ist das 16% Quantil der Verteilung.

2. (a) Die empirische Verteilungsfunktion ist gegeben wie folgt:

$$F^*(x) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8} I_{(-\infty,x]}(x_i)$$

Sie hat Sprünge der Höhe 1/8 bei $x_{(i)}$ (bei 0.85 hat sie einen Sprung der Höhe $2/8 = 1/4$):



(b) Das k–Moment berechnet man über den „Satz vom unbewußten Statistiker“:

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_0^1 x^k\,(a+1)\,x^a\,dx = (a+1)\int_0^1 x^{a+k}\,dx = (a+1)\left.\frac{x^{a+k+1}}{a+k+1}\right|_0^1 = \frac{a+1}{a+k+1}$$

(c) Die Plausibilitätsfunktion (Likelihoodfunktion) ist gegeben durch:

$$l(a;D) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|a) = (a+1)^n \left[\prod_{i=1}^{n} x_i\right]^a$$

$$\longrightarrow \quad \ln l(a;D) = n\,\ln(a+1) + a\,\ln\prod_{i=1}^{n} x_i = n\,\ln(a+1) + a\sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

Die letztere Funktion ist bezüglich a zu maximieren:

$$\frac{d\,\ln l(a;D)}{d\,a} = \frac{n}{a+1} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0 \quad \longrightarrow \quad \widehat{a} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i} - 1$$

Konkret ergibt sich hier als Schätzwert:

$$\widehat{a} = 1.2522$$

Bem.: Die Kurve in der obigen Abbildung ist die geschätzte Verteilungsfunktion:

$$F(x|\widehat{a}) = \int_0^x (\widehat{a}+1)\,z^{\widehat{a}}\,dz = x^{\widehat{a}+1}, \quad 0 < x < 1$$

3. Es ist $H_0 : X \sim U_{(0,1)}$ (gegen $H_0 : X \not\sim U_{(0,1)}$) zu testen (einfacher Chiquadrat–Anpassungstest). Nimmt man 5 gleichwahrscheinliche Klassen, ist die Faustregel, $n\,w \geq 5$, „automatisch" erfüllt:

Klasse	H	w	$e = 25\,w$	$(H-e)^2/e$
[0, 0.2)	5	0.2	5	0
[0.2, 0.4)	2	0.2	5	1.8
[0.4, 0.6)	5	0.2	5	0
[0.6, 0.8)	5	0.2	5	0
[0.8, 1]	8	0.2	5	1.8
Summe	25	1	25	3.6

Der Wert der Chiquadratstatistik, $T = 3.6$, ist mit dem 95% Quantil der χ^2–Verteilung mit $r - 1 = 5 - 1 = 4$ Freiheitsgraden zu vergleichen:

$$T < \chi^2_{4;\,0.95} = 9.4877$$

Die H_0 (= Uniforme Verteilung auf $(0,1)$) wird nicht verworfen.

Teil B)

(a) Die Wahrscheinlichkeit, daß auf einer Seite beide Propeller ausfallen, ist q^2; die Wahrscheinlichkeit, daß zumindest einer arbeitet ist also $1 - q^2$. Auf Grund der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Propeller ergibt sich die Wahrscheinlichkeit eines sicheren Fluges zu:

$$W = \left[1 - q^2\right]^2$$

Soll W zumindest 0.99 sein, folgt für q:

$$\left[1 - q^2\right]^2 \geq 0.99 \quad \longrightarrow \quad q \leq \sqrt{1 - \sqrt{0.99}} = 0.0708$$

(b) Die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung mit Mittelwert 10 ist gegeben durch:

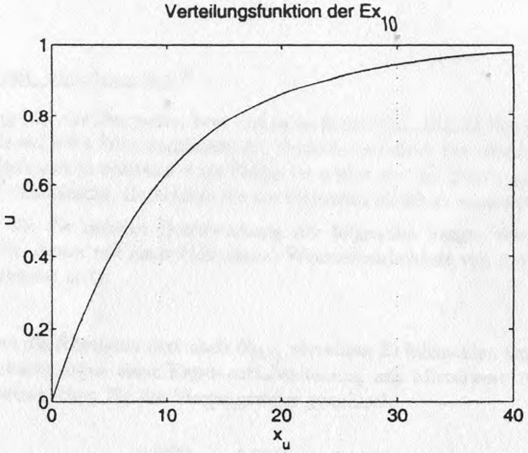
$$F(x) = 1 - e^{-x/10}, \quad x > 10$$

Diese Funktion ist zu invertieren:

$$F(x) = u \quad \longrightarrow \quad x = -10\,\ln(1-u)$$

Der letztere Ausdruck ist die gesuchte Transformation. Die simulierten Beobachtungen der Ex_{10}–Verteilung lauten:

$u\ (U_{(0,1)})$	0.9501	0.2311	0.6068
$x\ (Ex_{10})$	29.9773	2.6279	9.3344



(c) Für die Gesamtspannung ergibt sich (Additionstheorem für unabhängige Normalverteilungen):

$$V = V_1 + V_2 \sim N(2 \cdot 1.5;\, 2 \cdot 0.045) = N(3, 0.09)$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann:

$$\begin{aligned} W\{2.7 \leq V \leq 3.3\} &= \Phi\left(\frac{3.3-3}{0.3}\right) - \Phi\left(\frac{2.7-3}{0.3}\right) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\,\Phi(1) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826 \end{aligned}$$

(d) Die Verteilungen sind gegeben wie folgt (Begründung: Additionstheorem für ua. N–Verteilungen, bzw. Vo/Buch/Ue):

$$\begin{aligned} \frac{X_1 + X_2}{2} &\sim N\Big(0, \frac{1}{2}\Big) \\ X_1 + X_2 &\sim N(0, 2) \\ \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} &\sim N(0,1) \\ X_1^2 &\sim \chi^2_1 \quad \text{(Chiquadrat–Vt.)} \\ \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}} &\sim N(0,1) \end{aligned}$$

(e) Hier ist ein F–Test anzuwenden:

$$T = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{14.5^2}{12.3^2} = \frac{210.25}{151.29} = 1.3897 < F_{29,99;\,0.95} = 1.5821$$

Die Hypothese der Gleichheit der Varianzen wird nicht verworfen.

PRÜFUNGSORDNER - ein Service Deiner Fachschaft Informatik!

LVA: Wahrscheinlichkeitsrechnung + Statistik VIERTL Preis: 210.-

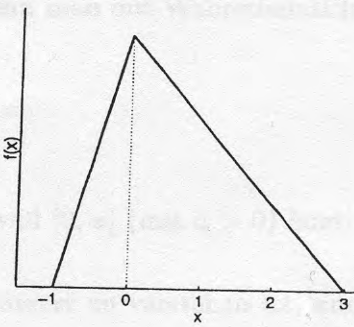
Schriftliche Prüfung

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathematik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2–stündig mit Unterlagen
26.1.2000

A) Beispiele[1]

1. Die Abbildung zeigt die Dichtefunktion einer sG X:



(a) Ermitteln Sie die genaue Form der Dichte.

(b) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion und erstellen Sie eine genaue Skizze.

(c) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$.

2. Eine Firma bezieht die Zeilentrafos für ein bestimmtes TV–Modell von drei verschiedenen Herstellern im Verhältnis 2:3:5. Es ist bekannt, daß die Lebensdauer dieser Trafos exponentialverteilt ist, mit Mittel 3000 Stunden (Hersteller 1), 3200 Stunden (Hersteller 2) bzw. 3500 Stunden (Hersteller 3).

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit arbeitet der Trafo eines solchen Modells länger als die Garantiezeit von einem Jahr ($\widehat{=}$ 1000 Stunden) ?

(b) Ein Trafo fällt innerhalb der Garantiezeit aus; mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt er von Hersteller 1 (2, 3) ?

3. Die folgenden 24 Zahlen (der Größe nach geordnet; auf zwei Stellen abgeschnitten) werden von *MatLab* als standardnormalverteilte Zufallszahlen erzeugt:

-1.66	-1.33	-1.14	-0.83	-0.58	-0.43	-0.18	-0.13	-0.09	-0.03	0.05	0.11
0.12	0.17	0.28	0.29	0.32	0.71	0.72	1.06	1.18	1.19	1.62	2.18

Überprüfen Sie das auf zwei Arten:

(a) Ermitteln Sie (Voraussetzung: Normalverteilung) ein 95%-Konfidenzintervall für den Mittelwert μ. Läßt sich die Hypothese $\mu = 0$ vertreten?

(b) Prüfen Sie mittels χ^2-Anpassungstest ($\alpha = 0,05$) die Hypothese, daß es sich um $N(0,1)$-verteilte Beobachtungen handelt.

Eine bequeme Klasseneinteilung ist etwa: $\left(-\infty, z_{0.25}\right]$, $\left(z_{0.25}, 0\right]$, $\left(0, z_{0.75}\right]$, $\left(z_{0.75}, \infty\right)$
($z_p = p$ - Quantil der $N(0,1)$).

B) Beantworten bzw. berechnen Sie: [2]

(a) Die Lebensdauer bestimmter Glühlampen ist exponentialverteilt mit Mittel 1000 Stunden. Auf einem Luster befinden sich 6 dieser Lampen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit brennen nach 500 Stunden noch genau 4 Lampen?

(b) Eine Münze (mit den Seiten „Kopf" und „Zahl") wird 100 Mal geworfen.

Geben Sie mit Hilfe der Tschebyscheff'schen Ungleichung eine Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit, mit der zwischen 40 und 60 Köpfe geworfen werden.

(c) Eine Münze (mit den Seiten „Kopf" und „Zahl") wird 100 Mal geworfen.

Berechnen Sie (möglichst genau) mit Hilfe des Zentralen Grenzverteilungssatzes die Wahrscheinlichkeit, mit der zwischen 40 und 60 Köpfe geworfen werden.

(d) Das Gewicht (in dag) bestimmter Orangen ist verteilt nach $N(21; 5)$.

Wieviele Orangen muß man in eine Schachtel geben, wenn man mit Wahrscheinlichkeit 0,95 mindestens 10 kg Füllgewicht haben möchte?

Hinweis: 1 kg = 100 dag

(e) $X_1, \ldots, X_n$ ist eine Stichprobe aus einer auf dem Intervall $[0, a]$ (mit $a > 0$) kontinuierlich uniform verteilten sG X.

Erklären Sie, was unter der „Unverzerrtheit" eines Schätzers zu verstehen ist, und untersuchen Sie, ob:

$$S(X_1, \ldots, X_n) = 2 \cdot \overline{X}_n$$

ein unverzerrter Schätzer für a ist.

[2] Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte.

Lösung zur Prüfung EWST für Inf/Vm

Datum: 26-1-2000

A) Beispiele

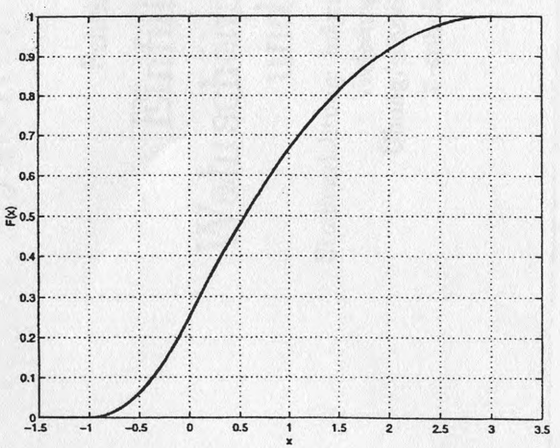
1) Die Fläche unter einer Dichte ist 1. $\rightarrow h=\frac{1}{2}$

(a) Dichtefunktion:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{2} & \text{für} \quad -1\le x<0\\ \frac{3-x}{6} & \text{für} \quad 0\le x\le 3\\ 0 & \text{für} \quad x<-1 \vee x>3\end{cases}$$

(b) Verteilungsfunktion: $F(x)=\int_{-1}^{x} f(u)\,du$

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{für} \quad x<-1\\ \frac{1}{4}(x^2+2x+1) & \text{für} \quad -1\le x<0\\ \frac{1}{12}(-x^2+6x+3) & \text{für} \quad 0\le x<3\\ 1 & \text{für} \quad x\ge 3\end{cases}$$



(c) $E(X)=\int_{-1}^{0} x\cdot\frac{x+1}{2}\,dx+\int_{0}^{3} x\cdot\frac{3-x}{6}\,dx=\frac{2}{3}$

$$E(X^2)=\int_{-1}^{0} x^2\cdot\frac{x+1}{2}\,dx+\int_{0}^{3} x^2\cdot\frac{3-x}{6}\,dx=\frac{7}{6} \rightarrow \operatorname{Var}(X)=\frac{7}{6}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{13}{18}=0{,}7222$$

3. (a) Plausibler Schätzwert von μ: $\underline{\hat{\mu}_{pl}=\bar{x}=144,3\,[\text{Ah}]}$

Plausibler Schätzwert von σ^2: $\hat{\sigma}^2_{pl}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{10}\left[\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\bar{x}^2\right]=\underline{29,01\,[(}$

Unverzerrter Schätzwert von σ^2: $s^2=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{9}\left[\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\bar{x}^2\right]=32,23\,[($

(b) 90%–KI für μ: $t_{9;\,0,95}=1,833$

$$\left[\bar{x}-t_{9;\,0,95}\frac{s}{\sqrt{10}},\ \bar{x}+t_{9;\,0,95}\frac{s}{\sqrt{10}}\right]=\underline{[141,01\,;\,147,59]}$$

90%–KI für σ^2: $\chi^2_{9;\,0,05}=3,325$; $\chi^2_{9;\,0,95}=16,919$

$$\left[\frac{9\,s^2}{\chi^2_{9;\,0,95}},\ \frac{9\,s^2}{\chi^2_{9;\,0,05}}\right]=[17,146\,;\,87,245]$$

90%–KI für σ: $[\sqrt{17,146}\,;\,\sqrt{87,245}]=\underline{[4,141\,;\,9,341]}$

(c) $\underline{W\{X>150\}}\approx 1-\Phi\left[\frac{150-\bar{x}}{s}\right]=1-\Phi(1,004)=\underline{0,158}$

B)

(a) $\underline{W(\text{Person krank}|\text{ Test positiv})}=\frac{0,99\cdot 0,004}{0,99\cdot 0,004+0,01\cdot 0,996}=\underline{0,285}$

Da nur sehr wenig Personen krank sind (0,4%), werden fast ausschließlich nicht erkr te Personen getestet (wenn man davon ausgeht, daß eine Testperson zufällig ausgew wird); für diese Gruppe ist der Test aber mit 1% *falsch positiven* Ergebnissen zu unge (zweiter Summand des Nenners).

(b) $\underline{W\{T>2|T>1\}}=\frac{W\{T>2\}}{W\{T>1\}}=\frac{\exp[-4]}{\exp[-1/4]}=\underline{0,024}$

(c) $\underline{W\{2<X<3\}}=\Phi\left[\frac{\ln(3)-0,75}{0,4}\right]-\Phi\left[\frac{\ln(2)-0,75}{0,4}\right]=\underline{0,365}$

(d) Mittels Faltung wird die Dichte der Summe von unabhängigen sGn berechnet.

Beispiele für Additionstheoreme:

$X_i\sim P_{\mu_i},\ i=1,\dots,n,\ X_i$ ua. $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}X_i\sim P_\mu,\ \mu=\sum_{i=1}^{n}\mu_i$

$X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2),\ i=1,\dots,n,\ X_i$ ua. $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}X_i\sim N\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i,\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)$

(e) $\underline{W\{X>100\}}=1-W\{X\le 100\}\approx 1-\Phi\left[\frac{100,5-200\cdot 0,45}{\sqrt{200\cdot 0,45\cdot 0,55}}\right]=\underline{0,068}$

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG

STATISTIK UND WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

STUDIENRICHTUNG: INFORMATIK
VORLESUNG: O.PROF. R. VIERTL
ÜBUNG/SCHRIFTL. PRÜFUNG: W. GURKER
2-STÜNDIG MIT UNTERLAGEN

14. OKTOBER 2003

14. Okt. 2003

A) Beispiele[1]

1. Für eine stochastische Größe X gilt:

$$W\{X=0\}=\frac{1}{5}, \quad W\{X=1\}=\frac{2}{5}$$

Der Rest der Verteilung ist im Intervall $(0,1)$ kontinuierlich uniform verteilt.

(a) Ermitteln und zeichnen Sie (genau!) die Verteilungsfunktion. (2)
(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$. (1)
(c) Berechnen Sie $\mathrm{Var}(X)$. (1)

2. Die folgenden 13 Werte sind Messungen eines Parameters für die Qualität von Wasser [ppm]:

47 53 61 57 65 44 56 52 63 58 49 51 54

Unter der Voraussetzung normalverteilter Beobachtungen $X \sim N(\mu,\sigma^2)$:

(a) Ermitteln Sie plausible (Maximum-Likelihood) und unverzerrte Schätzwerte von μ und σ^2. (1)
(b) Ermitteln Sie Schätzwerte für das 10%- und das 90%-Quantil der Verteilung. (1)
t (c) Ermitteln Sie 95%-Konfidenzintervalle für μ und σ. (1+1) mit unverzerrten ! 2,5 ! zwei rechnen !!

3. Die folgende Tabelle enthält die Häufigkeiten der Ziffern $0,1,\ldots,9$ unter den ersten 2000 Stellen von π:

Ziffer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Häufigkeit	181	213	207	189	195	205	200	197	202	211

Prüfen Sie mittels Chiquadrat-Anpassungstest, ob die Ziffern einer (diskreten) Gleichverteilung folgen ($\alpha = 5\%$). (4)

./.

[1] Pro Beispiel 4 Punkte (Punkteschlüssel in Klammern).

B) Beantworten bzw. berechnen Sie:[2]

(a) Zwei Personen kommen unabhängig voneinander zufällig im Zeitintervall $[0,T]$ zu einem vereinbarten Treffpunkt. Die zuerst eintreffende Person wartet auf die andere. Mit welcher Wahrscheinlichkeit muß keine Person länger als t warten?

(b) Was versteht man unter der „Gedächtnislosigkeit" einer Verteilung und welche Verteilungen mit dieser Eigenschaft kennen Sie?

(c) Das 10%–Quantil einer Verteilung ist 75 und das 80%–Quantil ist 83. Wenn es sich um eine Normalverteilung $N(\mu,\sigma^2)$ handelt, wie groß ist dann μ und σ ?

(d) Die sG X ist auf dem Intervall $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ uniform verteilt. Bestimmen Sie den Erwartungswert von $Y=\sin(X)$.

(e) Bei zwei (unabhängigen) Stichproben aus normalverteilten Populationen ist die Stichprobenvarianz der 1. Stichprobe doppelt so groß wie die der 2. Stichprobe. Der Stichprobenumfang beträgt in beiden Fällen 20. Zu welchem Ergebnis kommt ein entsprechender Test für die Gleichheit der Varianzen? ($\alpha = 10\%$).

Ergebnisse der schriftlichen Prüfung: Do 16. Okt. 2003 ab 16:00 (Aushang am Institut) Telefonische Auskunft: 58801-10724
Mündliche Prüfung: Fr 17. Okt. 2003 (In Liste eintragen!)

[2] Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte.

Lösung zur schriftlichen Prüfung

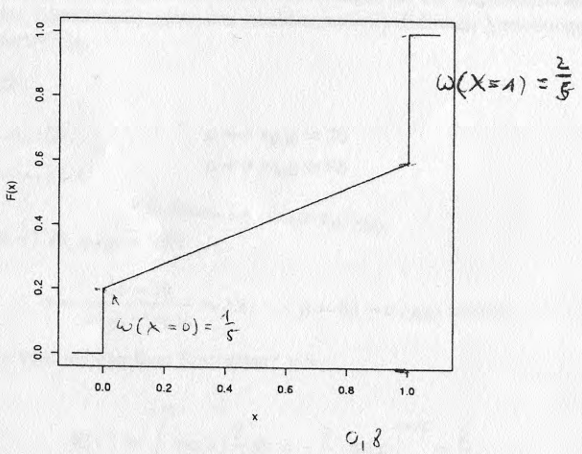
EWST f. Inf. / Stat. u. Wth. f. Inf.

14. Oktober 2003

Teil A)

1. (a) Die Verteilungsfunktion von X (gemischte Verteilung) ist (vgl. Abbildung):

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ \frac{2x+1}{5} & \text{für} \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{für} \quad x \ge 1 \end{cases}$$



(b) Den Erwartungswert berechnet man wie folgt:

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{2}{5} + \int_0^1 x\,\frac{2}{5}\,dx = \frac{3}{5} = 0.6$$

(c) Zur Berechnung der Varianz verwendet man den Verschiebungssatz:

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{5} + 1^2 \times \frac{2}{5} + \int_0^1 x^2\,\frac{2}{5}\,dx = \frac{8}{15} = 0.533$$

Die Varianz ist dann:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \frac{8}{15} - \frac{9}{25} = \frac{13}{75} = 0.173$$

2. (a) Der plausible (und ein unverzerrter) Schätzwert für den Mittelwert μ ist:

$$\widehat{\mu} = \overline{x} = \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13} x_i = 54.6$$

Der plausible Schätzwert für die Varianz σ^2 ist:

$$\widehat{\sigma^2}_{pl} = \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13}(x_i - \overline{x})^2 = 35.6$$

Ein unverzerrter Schätzwert für σ^2 ist:

$$\widehat{\sigma^2} = s^2 = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{13}(x_i - \overline{x})^2 = 38.6$$

(b) Ein Schätzwert für das 10%-Quantil ist gegeben durch:

unverzerrt

$$\overline{x} + s \cdot u_{0.10} = \overline{x} - s \cdot \underbrace{u_{0.90}}_{=1.28} = 46.7 \qquad 54,6 - 5,92$$

Ein Schätzwert für das 90%-Quantil ist gegeben durch:

$$\overline{x} + s \cdot u_{0.90} = 62.6$$

(c) Ein 95%-Konfidenzintervall für μ ist gegeben durch:

$$\overline{x} \pm \underbrace{t_{12;\,0.975}}_{=2.179}\frac{s}{\sqrt{13}} = [50.9;\ 58.4]$$

Ein 95%-Konfidenzintervall für σ^2 ist gegeben durch:

$$\left[\frac{12\,s^2}{\underbrace{\chi^2_{12;\,0.975}}_{=23.34}};\ \frac{12\,s^2}{\underbrace{\chi^2_{12;\,0.025}}_{=4.40}}\right] = [19.84;\ 105.15]$$

Ein entsprechendes Intervall für σ ist dann:

$$[\sqrt{19.84};\ \sqrt{105.15}] = [4.5;\ 10.3]$$

3. Bezeichnet X die Ziffer, so ist die einfache Hypothese $H_0 : X \sim D_{0,1,\dots,9}$ mittels Chiquadrat-Anpassungstest zu prüfen.

Klasse	H	w	e	$(H-e)^2/e$
0	181	0.1	200	1.805
1	213	0.1	200	0.845
2	207	0.1	200	0.245
3	189	0.1	200	0.605
4	195	0.1	200	0.125
5	205	0.1	200	0.125
6	200	0.1	200	0.000
7	197	0.1	200	0.045
8	202	0.1	200	0.020
9	211	0.1	200	0.605
Summe	2000	1	2000	4.420

Der Wert der Teststatistik, $T = 4.42$, ist mit dem 95%-Quantil der χ^2-Verteilung mit $r - 1 = 9$ Freiheitsgraden zu vergleichen:

$$T < \chi^2_{9;\,0.90} = 16.92$$

Die H_0 (= Gleichverteilung) wird nicht verworfen.

Teil B)

(a) Eine Person muß länger als t warten, falls sich die Ankunftszeitpunkte um mehr als t unterscheiden:

$$|T_1 - T_2| > t$$

Die Fläche dieses Bereichs im Quadrat $[0,T] \times [0,T]$ beträgt $(T-t)^2$; die W. dafür, daß niemand länger als t warten muß, ist also:

$$p = 1 - \left(\frac{T-t}{T}\right)^2$$

(Geometrische Wahrscheinlichkeit)

(b) Die Verteilung einer (nichtnegativen) sG X hat kein „Gedächtnis", falls für $t, s > 0$ gilt:

$$W\{X > t + s \mid X > s\} = W\{X > t\}$$

Unter den (nichtnegativen) kontinuierlichen Verteilungen ist die Exponentialverteilung die einzige mit dieser Eigenschaft; unter den (nichtnegativen) diskreten Verteilungen ist es die geometrische Verteilung.

(c) Laut Angabe gilt:

aus Tabelle

-0,80 Quantile

$$\mu + \sigma z_{0.10} = 75$$
$$\mu + \sigma z_{0.80} = 83$$

0,80 Quantile aus Tabelle

Tabelle: $z_{0.10} = -1.28$, $z_{0.80} = 0.84$

$$\sigma = \frac{83-75}{z_{0.80} - z_{0.10}} = 3.8, \qquad \mu = 83 - \sigma z_{0.80} = 79.8$$

(d) Nach dem „Satz vom unbewußten Statistiker" gilt:

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\,\frac{2}{\pi}\,dx = -\frac{2}{\pi}\cos(x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$$

(e) Hier ist ein F–Test anzuwenden:

$$F_{19,19;\,0.05} = \frac{1}{F_{19,19;\,0.95}} < \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{2\,s_2^2}{s_2^2} = 2 < F_{19,19;\,0.95} = 2.17$$

Die Hypothese der Gleichheit der Varianzen wird also nicht verworfen.

Schriftliche Prüfung

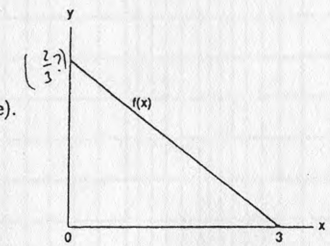
Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathematik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2-stündig mit Unterlagen

27.6.2001

Beispiele[1]

.) Die Abbildung zeigt die Dichte einer stochastischen Größe X:



(a) Bestimmen Sie die genaue Form der Dichte.

(b) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion (mit Skizze).

(c) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$.

(d) Bestimmen Sie den Median von X.

Bei einer Fluggesellschaft weiß man, daß im Durchschnitt 8% der Reservierungen wieder storniert werden. Für eine bessere Auslastung werden daher Überbuchungen vorgenommen. Man nehme an, daß es für einen Flug 180 Plätze gibt.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommen alle einen Platz, wenn 200 Reservierungen vorgenommen werden?

(b) Wieviele Reservierungen können höchstens vorgenommen werden, wenn mit einer Wahrscheinlichkeit von (mindestens) 0,95 kein Passagier abgewiesen werden soll?

Verwenden Sie eine passende Normalapproximation; rechtfertigen Sie deren Zulässigkeit.

Ein bestimmter Schaltertyp wurde einer Lebensdauerprüfung unterzogen. Dazu wurde bei 25 Schaltern die Anzahl der Betätigungen (= Lebensdauer) bis zum Ausfall gezählt, mit dem Ergebnis (geordnete Werte; in 10^4 Betätigungen):

1,9	2,5	4,5	5,0	7,3
8,2	9,5	10,0	10,6	11,3
14,1	17,0	17,1	17,5	23,3
23,4	25,6	29,7	35,7	63,7
72,2	78,2	81,4	89,8	129,9

Prüfen Sie mittels χ^2-Anpassungstest (mit $\alpha = 0,05$), ob eine Exponentialverteilung angenommen werden kann. Verwenden Sie dabei die folgende Klasseneinteilung:

$$[0, 10),\ [10, 25),\ [25, 45),\ [45, \infty)$$

Ermitteln Sie zuerst einen Schätzwert für den Parameter der Exponentialverteilung.

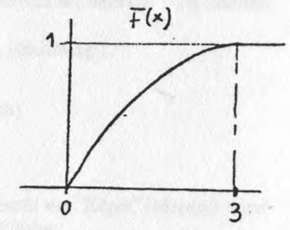
Prüfung EWST für Inf/Vm 27.6.2001

A) (1) (a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(3-x) & \text{f. } 0 \le x \le 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) $$F(x) = \int_0^x \frac{2}{9}(3-u)\,du = \frac{2}{9}\left(3u - \frac{u^2}{2}\right)\Big|_0^x = \frac{2}{9}\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{x(6-x)}{9} & \text{für } 0 \le x \le 3 \\ 1 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$



(c) $$\mathbb{E}(X^n) = \int_0^3 x^n \frac{2}{9}(3-x)\,dx = \frac{2}{9}\left(3\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right)\Big|_0^3 = \frac{2}{9}\cdot 3^{n+2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{2\cdot 3^n}{(n+1)(n+2)}$$

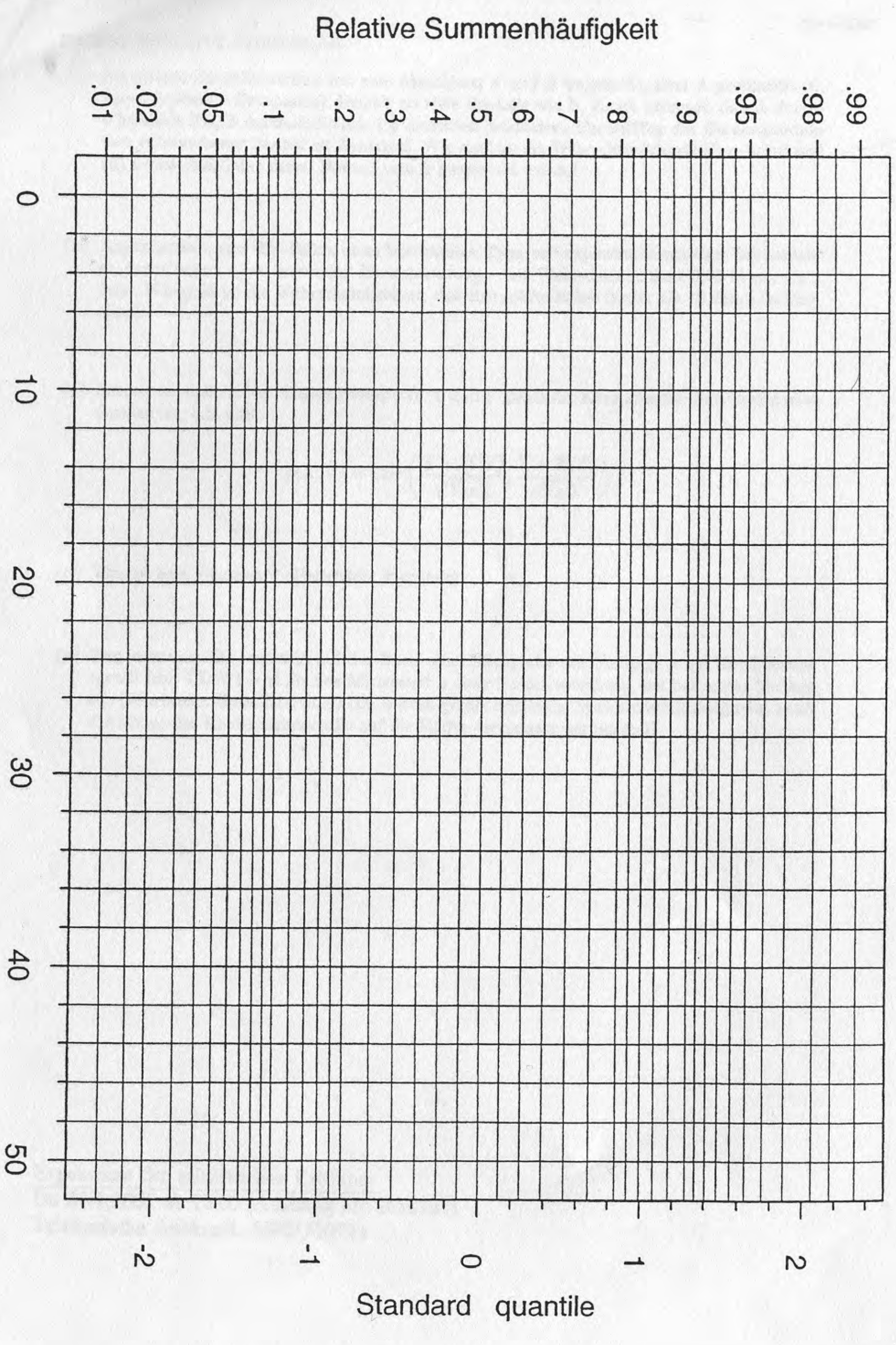
$$\mathbb{E}(X) = \frac{2\cdot 3}{2\cdot 3} = 1$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{2\cdot 3^2}{3\cdot 4} = \frac{3}{2} \longrightarrow \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \frac{1}{2}$$

(d) $$\frac{x(6-x)}{9} = \frac{1}{2} \rightarrow x^2 - 6x + \frac{9}{2} = 0$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - \frac{9}{2}} = 3 \pm \frac{3}{\sqrt{2}} = 3\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\tilde{x} = 3\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \doteq 0{,}88$$



Schriftliche Prüfung

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathematik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2-stündig mit Unterlagen

29.1.2002

A) Beispiele[1]

1. Für eine sG X gilt $W\{X = 1\} = \frac{1}{3}$; der Rest der Verteilung ist uniform im Intervall $[1, 4]$ verteilt.
   (a) Ermitteln und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion. (Genaue Zeichnung!)
   (b) Berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz von X.
   (c) Bestimmen Sie den Median von X (rechnerisch oder graphisch).
   (d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Intervalls $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$.

2. Eine 1–Euro Münze wird 4 mal unabhängig geworfen; X sei die Anzahl der 'Köpfe' (Mozart) unter den ersten 2 Würfen, und Y die Anzahl der 'Köpfe' unter allen 4 Würfen.
   (a) Ermitteln Sie die gemeinsame Verteilung von (X, Y).
   (b) Ermitteln Sie die Randverteilungen von X und Y. Um welche Verteilungen handelt es sich?
   (c) Sind X und Y unabhängig? (Kommentar)
   (d) Berechnen Sie die Kovarianz $\mathrm{Cov}(X, Y)$ von X und Y.

???
$p_x = \frac{1}{2}, p_y = \frac{1}{2}$
$n = 4$?

3. Eine sG X mit Merkmalraum $M_X = \mathbb{N}_0$ wurde 300 mal beobachtet:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 u. mehr
Häufigkeit	1	16	36	48	62	51	41	22	18	5	0

   (a) Eine Hypothese besagt, daß X poissonverteilt ist: $X \sim P_\mu$.
      (i) Wie lautet in diesem Fall der plausible Schätzer von μ ?
      (ii) Welche Eigenschaften hat dieser Schätzer? (unverzerrt?, konsistent?)
      (iii) Berechnen Sie den plausiblen Schätzwert von μ.
   (b) Prüfen Sie mittels Chiquadrat–Anpassungstest (mit $\alpha = 0,05$) die Hypothese von (a), daß X poissonverteilt ist.
   Hinweis: Nehmen Sie die Klasseneinteilung: $\{0\}, \{1\}, \ldots, \{8\}, \{9, 10, \ldots\}$.

[1] Pro Beispiel 4 Punkte.

B) Beantworten bzw. berechnen Sie: [2]

(a) Bestimmte Bauteile werden von zwei Maschinen A und B hergestellt, aber A produziert (in einer gegebenen Zeitspanne) doppelt so viele Bauteile wie B. Es ist bekannt, daß A durchschnittlich 2%, B durchschnittlich 1% Ausschuß produziert. Ein zufällig der Gesamtproduktion entnommener Bauteil ist Ausschuß. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (i) a–priori und (ii) a–posteriori, daß dieser Bauteil von A hergestellt wurde?

(b) Angenommen, eine TV–Röhre eines bestimmten Typs, mit exponentialverteilter Lebensdauer, funktioniert – bei 'normaler' Beanspruchung – mit Wahrscheinlichkeit 0,95 länger als 1 Jahr. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine solche Röhre länger als 10 Jahre funktioniert?

(c) Stimmt es, daß die Korrelation zweier sGn X und Y gleich der Kovarianz der standardisierten Größen ist, d.h. daß:

$$\rho(X,Y) = \mathrm{Cov}\left(\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}X}}, \frac{Y-\mathbb{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}Y}}\right) ?$$

(d) Was ist eine 'Statistik'? (Definition, Beispiele)

(e) Angenommen, Sie ermitteln auf der Basis einer Stichprobe des Umfangs n ein Konfidenzintervall (mit ÜDW $1-\alpha$) für den Mittelwert μ einer Normalverteilung, bei bekannter Varianz σ_0^2. (Wie lautet dieses Intervall?) Um wieviel größer müßte der Stichprobenumfang sein, wenn die Länge des Konfidenzintervalls auf die Hälfte verkleinert werden soll?

Ergebnisse der schriftlichen Prüfung:
Do 31.1.2002 ab 15:00 (Aushang am Institut)
Telefonische Auskunft: 58801/10724

[2] Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte.

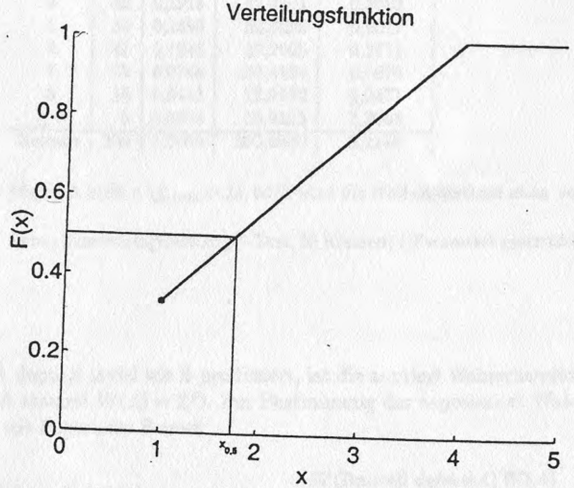
Lösung zur schriftlichen Prüfung EWST für Inf/Vm

29.1.2002

Teil A)

1. (a) Für die Verteilungsfunktion gilt zunächst $F(x) = 0$ für $x < 1$ und $F(x) = 1$ für $x > 4$; in $[1;4]$ gilt:

$$F(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{x-1}{3} = \frac{2x+1}{9}, \quad 1 \le x \le 4$$



(b) Die Ableitung von F im Intervall $(1;4)$ ist $2/9$; also folgt:

$$\mathbb{E}(X) = 1\cdot\frac{1}{3} + \int_1^4 x\cdot\frac{2}{9}\,dx = \frac{1}{3} + \frac{15}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2\cdot\frac{1}{3} + \int_1^4 x^2\cdot\frac{2}{9}\,dx = \frac{1}{3} + \frac{14}{3} = \frac{15}{3} = 5 \implies \mathrm{Var}(X) = 5 - 2^2 = 1$$

(c) Der Median ist der Wert $x_{0,5}$ mit $F(x_{0,5}) = 1/2$ (sofern es so einen Wert gibt); hier ergibt sich der Median als Lösung von:

$$\frac{2x_{0,5}+1}{9} = \frac{1}{2} \implies x_{0,5} = \frac{7}{4} = 1,75$$

(d) $W\left\{\frac{1}{2} \le X \le 3\right\} = F(3) - F\left(\frac{1}{2}-\right) = \frac{7}{9} - 0 = \frac{7}{9} = 0,7778$

2. (a) Gemeinsame Verteilung von (X, Y):

$X\downarrow\ Y\rightarrow$	0	1	2	3	4	$X\downarrow$
0	1/16	2/16	1/16	0	0	1/4
1	0	2/16	4/16	2/16	0	2/4
2	0	0	1/16	2/16	1/16	1/4
$Y\rightarrow$	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16	1

(b) Für die Randverteilungen von X und Y (vgl. letzte Spalte und letzte Zeile in obiger Tabelle) gilt:

$X \sim B_{2;1/2}, \quad Y \sim B_{4;1/2}$

(c) X und Y sind nicht unabhängig; dies sieht man schon daran, daß hier $Y \geq X$. Formal muß für die Unabhängigkeit von X und Y die Beziehung:

$$p(x,y) = p(x)\,p(y) \quad \text{für alle } (x,y) \in \{0,1,2\} \times \{0,1,2,3,4\}$$

erfüllt sein; dies ist aber z.B. für $(2,0)$ nicht der Fall:

$$p(2,0) = 0 \neq 1/4 \cdot 1/16$$

(d) Nach dem Verschiebungssatz für die Kovarianz gilt:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$$

Zunächst gilt (vgl. (b)): $\mathbb{E}(X) = 2 \cdot 1/2 = 1$, $\mathbb{E}(Y) = 4 \cdot 1/2 = 2$ (sieht man auch an der Symmetrie der Verteilungen)

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{x,y} x\,y\,p(x,y) = 1 \cdot \frac{2}{16} + 2 \cdot \frac{4}{16} + 3 \cdot \frac{2}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} + 6 \cdot \frac{2}{16} + 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{5}{2} - 1 \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

3. (a) Auf Basis der Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ ergibt sich die Likelihoodfunktion zu:

$$l(\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu^{x_i} e^{-\mu}}{x_i!} = C\,\mu^{\sum_{i=1}^{n} x_i} e^{-n\mu} \Longrightarrow l^*(\mu) = \ln l(\mu) = \ln(C) + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(\mu) - n\,\mu$$

$$\frac{d\,l^*}{d\,\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\mu} - n = 0 \Longrightarrow \widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}$$

Der plausible Schätzer $\widehat{\mu} = \overline{X}$ ist unverzerrt, $\mathbb{E}(\overline{X}) = \mathbb{E}(X) = \mu$, und es gilt:

$$\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{\mathrm{Var(X)}}{n} = \frac{\mu}{n} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

Daraus folgt aber (nach einem Satz der Vorlesung), daß $\widehat{\mu}$ auch konsistent ist.

Auf Basis der konkreten Daten ergibt sich der plausible Schätzwert von μ zu:

$$\widehat{\mu} = \overline{x} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 16 + 2 \cdot 36 + \cdots + 9 \cdot 5}{300} = 4,4133$$

(b) χ^2-Test von $H_0 : X \sim$ Poisson gegen $H_1 : X \not\sim$ Poisson

$$\widehat{w}_i = \widehat{W}\{X = i\} = \frac{\widehat{\mu}^i e^{-\widehat{\mu}}}{i!}, \; i = 0,1,\ldots,8$$

$$\widehat{W}\{X \geq 9\} = 1 - \sum_{i=0}^{8} \widehat{w}_i$$

Klasse	H	$\widehat{w}$	$e = 300\,\widehat{w}$	$(H-e)^2/e$
0	1	0,0121	3,6344	1,9096
1	16	0,0535	16,0399	0,0001
2	36	0,1180	35,3947	0,0104
3	48	0,1736	52,0696	0,3181
4	62	0,1915	57,4501	0,3603
5	51	0,1690	50,7093	0,0017
6	41	0,1243	37,2995	0,3671
7	22	0,0784	23,5164	0,0978
8	18	0,0432	12,9732	1,9477
≥ 9	5	0,0364	10,9129	3,2038
Summe	300	1,0000	300,0000	8,2165

Wegen $8,2165 < \chi^2_{8;0,95} = 15,5073$ wird die Null–Hypothese nicht verworfen.

Bem.: Zusammengesetzter χ^2–Test, 10 Klassen, 1 Parameter geschätzt $\Rightarrow$ Fgr. $= 10-1-1 = 8$

Teil B)

(a) Da A doppelt soviel wie B produziert, ist die a–priori Wahrscheinlichkeit, daß der Bauteil von A stammt $W(A) = 2/3$. Zur Bestimmung der a–posteriori Wahrscheinlichkeit nimmt man die Bayes'sche Formel:

$$W(A|\text{Bauteil defekt}) = \frac{W(\text{Bauteil defekt}|A)\,W(A)}{W(\text{Bauteil defekt}|A)\,W(A) + W(\text{Bauteil defekt}|B)\,W(B)} =$$

$$= \frac{0,02 \cdot 2/3}{0,02 \cdot 2/3 + 0,01 \cdot 1/3} = \frac{4}{5}$$

(b) Die Verteilungsfunktion einer exponential verteilten sG X ist:

$$F(x) = W\{X \leq x\} = 1 - e^{-x/\tau}, \; x \geq 0$$

$$\Longrightarrow W\{X > 10\} = e^{-10/\tau} = (e^{-1/\tau})^{10} = [W\{X > 1\}]^{10} = (0,95)^{10} = 0,5987$$

Bem.: Zur Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit muß man also den Wert von τ gar nicht kennen; dies ist eine Folge der 'Gedächtnislosigkeit' der Exponentialverteilung. Natürlich kann man auch wie folgt rechnen:

$$e^{-1/\tau} = 0,95 \Longrightarrow \tau = -1/\ln(0,95) = 19,4957 \text{ [Jahre]}$$

$$\Longrightarrow W\{X > 10\} = e^{-10/\tau} = e^{-10/19,4957} = 0,5987$$

(c) Die Behauptung ist richtig, denn aus dem Verschiebungssatz für die Kovarianz folgt (mit $X^* = (X - \mathbb{E}(X))/\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$, Y^* analog):

$$\mathrm{Cov}(X^*, Y^*) = \mathbb{E}(X^* Y^*) - \mathbb{E}(X^*)\,\mathbb{E}(Y^*) = \mathbb{E}(X^* Y^*) \qquad (\text{wegen } \mathbb{E}(X^*) = \mathbb{E}(Y^*) = 0)$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Cov}(X^*, Y^*) = \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\,\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\,\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} = \rho(X,Y)$$

(d) Jede (ein– oder mehrdimensionale, meßbare) Funktion $S(X_1, \ldots, X_n)$ einer Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ nennt man eine 'Statistik' (der Stichprobe). Insbesondere sind Statistiken also selbst stochastische Größen, die nicht von unbekannten Parametern abhängen dürfen.

Typische Beispiele:

Stichprobenmittel: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Stichprobenvarianz: $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

(e) Das Konfidenzintervall lautet in diesem Fall:

$$\overline{x} \pm u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = \left[\overline{x} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Länge des Intervalls ist $L = 2\,u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$; um L zu halbieren, sind also $4n$ Beobachtungen erforderlich.

Schriftliche Prüfung

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathematik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2–stündig mit Unterlagen
18.12.2001

A) Beispiele[1]

1. Eine bestimmte Komponente fällt mit Wahrscheinlichkeit 1/5 sofort beim Einschalten aus (Lebensdauer = 0); ist die Lebensdauer positiv, genügt sie einer Dichte der Form:

$$C \cdot e^{-x/10}, \quad x > 0$$

(a) Um welchen Typ von Verteilung (diskret/kontinuierlich/gemischt) handelt es sich hier?
(b) Bestimmen Sie die Konstante C.
(c) Ermitteln und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion der Lebensdauer.
(d) Berechnen Sie den Mittelwert der Lebensdauer.
(e) Bestimmen Sie den Median der Lebensdauer.

2. Die stochastischen Größen X und Y genügen einer gemeinsamen Normalverteilung mit den folgenden Parametern:

$$\mu_x = 20, \quad \mu_y = 25, \quad \sigma_x = 3, \quad \sigma_y = 4, \quad \rho = 0,6$$

(a) Berechnen Sie $W\{20 < Y \leq 25\}$.
S. 6 7/68 (b) Berechnen Sie $W\{20 < X \leq 25 \mid Y = 15\}$. $= \frac{W\{20 < X \leq 25\}}{W\{Y = 15\}}$
(c) Ermitteln und zeichnen Sie (in dasselbe x/y–Koordinatensystem!) die beiden Regressionsfunktionen von Y bezüglich X und von X bezüglich Y. Welche Interpretation haben diese Funktionen?
knjiga Sheng 20 gore i zadatak 3.6

3. Die folgenden Daten sind eine Stichprobe aus einer Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$:

18,7   9,1   23,8   2,5   29,3   41,1   10,9   31,1   36,3

(a) Überprüfen Sie mittels beiliegendem Wahrscheinlichkeitspapier, daß die Daten tatsächlich aus einer Normalverteilung stammen (Kommentar) und entnehmen Sie dem Netz grobe Schätzwerte für die Parameter μ und σ.
Anleitung: Tragen Sie $(i - 0,5)/n$ gegen $x_{(i)}$ im Netz ab.
(b) Ermitteln Sie (ohne Herleitung!) die plausiblen (Maximum–Likelihood) Schätzwerte für μ und σ. (Kommentar)
(c) Bestimmen Sie ein 95% Konfidenzintervall für μ.
(d) Bestimmen Sie ein 99% Konfidenzintervall für σ.

[1] Pro Beispiel 4 Punkte.

Teil B)

(a) Die Zahl X der Unfälle je Tag auf 500 km Bundesstraße ist (näherungsweise) poissonverteilt mit Parameter $\mu = 0,05 \cdot 5 = 0,25$:

$$W\{X = 3 \,|\, X > 0\} = \frac{W\{X = 3\}}{W\{X > 0\}} = \frac{W\{X = 3\}}{1 - W\{X = 0\}} = \frac{0,25^3 \cdot e^{-0,25}/3!}{1 - e^{-0,25}} = 0,0092$$

(b) Hat X eine Log–Normalverteilung, so ist $\ln X$ normalverteilt:

$$\begin{aligned} W\{1 \le X \le 3\} &= \Phi\left(\frac{\ln 3 - 2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{\ln 1 - 2}{3}\right) \\ &= \Phi(-0,3005) - \Phi(-0,6667) \\ &= \Phi(0,6667) - \Phi(0,3005) \\ &= 0,7475 - 0,6181 = 0,1294 \end{aligned}$$

(c) Zur Erzeugung von nach F verteilten Beobachtungen ist F zu invertieren; für A)1 gilt:

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} 0 & 0 < u \le 0,2 \\ -10 \ln \dfrac{5\,(1-u)}{4} & 0,2 < u < 1 \end{cases}$$

Für die gegebenen $U_{(0,1)}$–Zufallszahlen ergibt sich:

u	0,9501	0,1811	0,6068
x	27,7459	0	7,1029

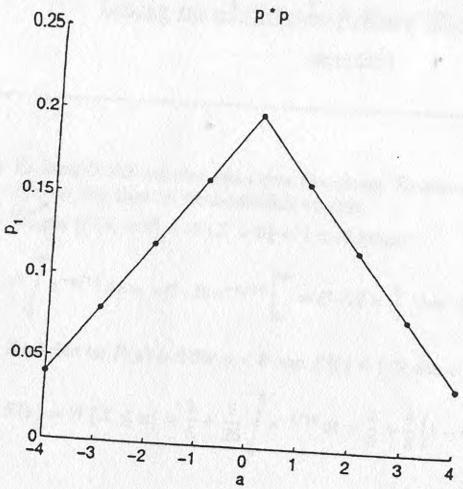
(d) Die Punktwahrscheinlichkeiten der $D_{\{-2,-1,0,1,2\}}$–Verteilung sind:

$$p(k) = \frac{1}{5}, \quad k = -2, -1, 0, 1, 2$$

Für das Faltprodukt $p_1 = p * p$ gilt:

$$p_1(a) = \sum_{k=-2}^{2} p(k)\, p(a-k), \quad a = -4, -3, \ldots, 3, 4$$

a	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$p_1(a)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$



(e) Pivot–Größen sind stochastische Größen, die Funktionen der Stichprobe und des unbekannten Parameters sind, deren Verteilung jedoch nicht vom unbekannten Parameter abhängt. Solche Größen finden bei der Konstruktion von Konfidenzbereichen Verwendung.
Beispiele: $X_1, \ldots, X_n$ Stichprobe von $N(\mu, \sigma^2)$:

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n} \sim t_{n-1}, \qquad \frac{(n-1)\,S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

B) Beantworten bzw. berechnen Sie: [2]

(a) Auf einer Bundesstraße der Länge 500 km ereignen sich je 100 km und Tag durchschnittlich 0,05 Unfälle. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ereignen sich auf der Bundesstraße je Tag genau drei Unfälle unter der Bedingung, daß mindestens einer vorkommt?

(b) Für $X \sim L(2,9)$ (logarithmische Normalverteilung) berechne man $W\{1 \le X \le 3\}$.

(c) Man erkläre, wie man, ausgehend von auf $(0,1)$ uniform verteilten Zufallszahlen, Beobachtungen der Lebensdauer von Komponenten aus Beispiel **A)1** erzeugen kann. Konkret erzeuge man drei Lebensdauern auf Basis der folgenden $U_{(0,1)}$–Zufallszahlen:

$$0,9501 \qquad 0,1811 \qquad 0,6068$$

(d) Man ermittle und skizziere das Ergebnis der Faltung von zwei auf $M = \{-2,-1,0,1,2\}$ diskret uniform verteilten stochastischen Größen:

$$X \sim D_{\{-2,-1,0,1,2\}}, \quad Y \sim D_{\{-2,-1,0,1,2\}}, \quad X, Y \text{ unabhängig}$$

(e) Was versteht man unter einer "Pivot–Größe"? In welchem Zusammenhang kommen solche Größen in der Statistik vor? Geben Sie zwei konkrete Beispiele.

[2] Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte.

Lösung zur schriftlichen Prüfung EWST für Inf/Vm

18.12.2001

Teil A)

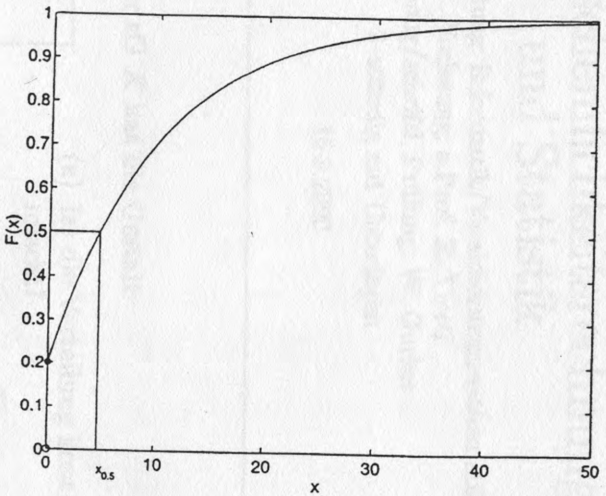
1. (a) Es handelt sich um eine gemischte Verteilung: Es gibt einen Punkt mit positiver Wahrscheinlichkeit, der Rest ist kontinuierlich verteilt.

(b) Wegen $W\{X=0\} + W\{X>0\} = 1$ muß gelten:

$$C\int_0^\infty e^{-x/10}\,dx = -C\cdot 10\,e^{-x/10}\Big|_0^\infty = C\cdot 10 = \frac{4}{5} \implies C = \frac{2}{25} = 0,08$$

(c) Zunächst ist $F(x) = 0$ für $x < 0$ und $F(0) = 1/5$; für $x > 0$ gilt:

$$F(x) = W\{X \le x\} = \frac{1}{5} + \frac{2}{25}\int_0^x e^{-t/10}\,dt = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\left[1 - e^{-x/10}\right] = 1 - \frac{4}{5}e^{-x/10}, \; x > 0$$



(d) Da der Erwartungswert einer Ex_τ–Verteilung gleich τ ist gilt:

$$\mathbb{E}(X) = 0\cdot\frac{1}{5} + \frac{2}{25}\int_0^\infty x\,e^{-x/10}\,dx = \frac{4}{5}\int_0^\infty \frac{x}{10}e^{-x/10}\,dx = \frac{4}{5}\cdot 10 = 8$$

(e) Der Median der Verteilung ist der Wert $\tilde{x}$ mit $F(\tilde{x}) = 1/2$:

$$1 - \frac{4}{5}e^{-\tilde{x}/10} = \frac{1}{2} \implies \tilde{x} = -10\ln\frac{5}{8} = 4,7$$

Schriftliche Prüfung

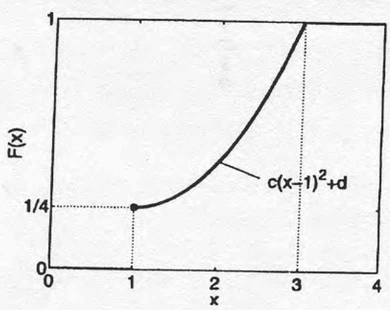
Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathematik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2–stündig mit Unterlagen

15.3.2000

A) Beispiele[1]

1. Die Verteilungsfunktion einer sG X hat die Gestalt:



(a) Ist die Verteilung kontinuierlich/ diskret/ gemischt?

(b) Ermitteln Sie die genaue Form von $F(x)$. (Bestimmen Sie c und d.)

(c) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$.

(d) Berechnen Sie den Median.

2. Die Tabelle zeigt die 2–dim. diskrete Verteilung eines stochastischen Vektors (X, Y):

		X: −1	0	1
Y	−1	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$
	0	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$
	1	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

Ermitteln Sie:

(a) die Randverteilungen von X und Y. Sind X und Y unabhängig? (Kommentar)

(b) den Korrelationskoeffizienten von X und Y.

(c) die Verteilung von $X + Y$.

(d) $\mathbb{E}(X + Y)$ und $Var(X + Y)$.

3. Die Kapazitäten (in Ampere–Stunden) von 10 Batterien (gleicher Art) sind gegeben:

140 136 150 144 148 152 138 141 143 151

Man betrachte die Daten als Stichprobe einer normalverteilten sG $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
Berechnen Sie:

(a) die plausiblen Schätzwerte für μ und σ^2.

(b) Konfidenzintervalle für μ und σ, jeweils mit ÜDW 0,90.

(c) die (approximative) Wahrscheinlichkeit, mit der die Kapazität einer Batterie größer als 150 [Ah] ist.

---

[1] Pro Beispiel 4 Punkte.

Lösung zur Prüfung EWST für Inf/Vm

15.3.2000

A)

1. (a) Die Verteilung ist <u>gemischt</u>. (F hat einen Sprung, ist aber keine reine Treppenfunktion.)

   (b) $F(1) = \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{d = \frac{1}{4}}$

   $F(3) = 1 \Rightarrow c \cdot 4 + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \underline{c = \frac{3}{16}}$

   (c) $\underline{\mathbb{E}(X)} = 1 \cdot \frac{1}{4} + \int_1^3 x \frac{3}{8}(x-1)\,dx = \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\int_1^3 (x^2 - x)\,dx = \frac{1}{4} + \frac{7}{4} = \underline{2}$

   $\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{4} + \int_1^3 x^2 \frac{3}{8}(x-1)\,dx = \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\int_1^3 (x^3 - x^2)\,dx = \frac{1}{4} + \frac{17}{4} = \frac{9}{2}$

   $\underline{Var(X)} = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \frac{9}{2} - 2^2 = \underline{\frac{1}{2}}$

   (d) $F(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{16}(\tilde{x}-1)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\tilde{x}-1)^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow \underline{\tilde{x} = 1 + \sqrt{\frac{4}{3}}} \approx 2{,}15$

2. (a) X und Y sind <u>nicht unabhängig</u>: Die Beziehung $p(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$ ist hier sogar für kein einziges Paar (x,y) erfüllt.

		X			
		-1	0	1	$Y\sim$
Y	-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
	0	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{3}$
	1	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
$X\sim$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

   (b) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3}[-1+0+1] = 0$

   $\Rightarrow Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY) = \frac{1}{12}[1-1-1+1] = 0$

   $\Rightarrow \underline{\rho(X,Y) = 0}$ unkorreliert

   (c)

k	-2	-1	0	1	2
$W\{X+Y=k\}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

   (d) $\underline{\mathbb{E}(X+Y)} = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \underline{0}$

   X und Y unkorreliert $\Rightarrow \underline{Var(X+Y)} = Var(X) + Var(Y) = 2 \cdot \frac{1}{3}[(-1)^2 + 0^2 + 1^2] = \underline{\frac{4}{3}}$

   Oder direkt ($\mathbb{E}(X+Y) = 0$): $\underline{Var(X+Y)} = \frac{4}{12} + \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3} + \frac{4}{12} = \underline{\frac{4}{3}}$

(c) $W\{|X - 75| \le 10\} \ge 1 - \frac{25}{100} = \underline{0{,}75}$

$W\{65 \le X \le 85\} = \Phi\left(\frac{85-75}{5}\right) - \Phi\left(\frac{65-75}{5}\right) = \Phi(2) - \Phi$

$= 2\,\Phi(2) - 1 = \underline{0{,}9545}$

(d) Ist $X_1, \ldots, X_n$ eine Stichprobe von $X \sim W$ so versteht man unter einer <u>Pivot-Größe</u> eine ZG $Q = q(X_1, \ldots, X_n; \theta)$, deren W-Ver nicht von θ abhängt.

Bsp.: $X_1, \ldots, X_n$ SP von $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ Pivot-Größe

(e) $\bar{x} = 94{,}28$, $s^2 = 69{,}0470$, $s = 8{,}3095$

$\bar{x} \pm \underbrace{t_{4;\,0{,}95}}_{=2{,}1318} \frac{s}{\sqrt{5}} = \underline{[86{,}36 ; 102{,}20]}$

Schriftliche Prüfung

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathematik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2–stündig mit Unterlagen

30.1.2001

A) Beispiele[1]

1. **Eine stochastische Größe X nimmt den Wert 1 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ an. Der Rest der Wahrscheinlichkeit ist im Intervall (1, 3) kontinuierlich uniform verteilt.**
   (a) Zeichnen Sie die Verteilungsfunktion.
   (b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.
   (c) Bestimmen Sie den Median der Verteilung.
   (d) Berechnen Sie $W\{1 \leq X < 2\}$.

2. **Ein Zulieferer fährt jeden Tag von A nach B und dieselbe Strecke retour. Auf der Strecke gibt es 3 Ampeln; X sei die Zahl der roten Ampeln auf der Hinfahrt, und Y die Zahl der roten Ampeln auf der Rückfahrt. Auf der Basis seiner langen Erfahrung mit dieser Strecke hat der Fahrer die folgende zweidimensionale Verteilung von (X, Y) ermittelt:**

		X			
		0	1	2	3
Y	0	0,01	0,02	0,07	0,01
	1	0,03	0,06	0,10	0,06
	2	0,05	0,12	0,15	0,08
	3	0,02	0,09	0,08	0,05

   (a) Ermitteln Sie die beiden Randverteilungen. Sind X und Y unabhängig? (Kommentar)
   (b) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten von X und Y. (Kommentar)
   (c) Angenommen, auf der Hinfahrt sind 2 Ampeln rot; mit wievielen roten Ampeln muß er dann auf der Rückfahrt rechnen?

3. **Ein Statistikprogramm liefert die folgenden Zahlen als $N(0,1)$–verteilte Zufallszahlen (geordnet; abgeschnitten auf 2 Stellen):**

-2,29	-2,19	-1,04	-1,01	-0,95	-0,87	-0,69	-0,55	-0,30	-0,28
-0,02	0,03	0,42	0,43	0,45	0,69	0,72	0,82	0,88	1,08

   (a) Gehen Sie zunächst von der Annahme (allgemein) normalverteilter Daten aus:
      i. Testen Sie ($\alpha = 0,05$) $H_0 : \mu = 0$ (gegen $H_1 : \mu \neq 0$).
      ii. Ermitteln Sie ein 95%–Konfidenzintervall für die Standardabweichung σ.
   (b) Prüfen Sie nun die (einfache) Hypothese $H_0 : X \sim N(0,1)$ <u>wahlweise</u> mittels:
      i. Wahrscheinlichkeitsnetz. (Kommentar)
      ii. Chiquadrat–Test ($\alpha = 0,05$); nehmen Sie dazu die folgende Klasseneinteilung: $(-\infty; u_{0,25}]$, $(u_{0,25}; u_{0,50}]$, $(u_{0,50}; u_{0,75}]$, $(u_{0,75}; \infty)$.

---

[1] Pro Beispiel 4 Punkte.

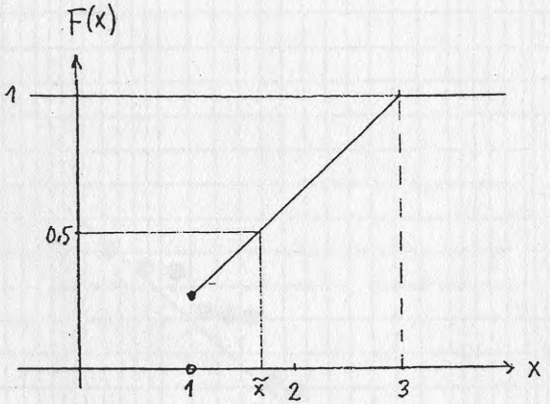
1/

Prüfung EWST f. Inf/Vm

30-1-2001

2/5

1) (a)



(b) $E(X) = 1 \cdot \frac{1}{4} + \int_1^3 x \cdot \frac{3}{8}\,dx = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 = \frac{1}{4} + \frac{6}{4} = \underline{\frac{7}{4}} = 1{,}75$

$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{4} + \int_1^3 x^2 \cdot \frac{3}{8}\,dx = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{1}{4} + \frac{13}{4} = \frac{14}{4} = \underline{\frac{7}{2}}$

$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{7}{2} - \frac{49}{16} = \underline{\frac{7}{16}} = 0{,}4375$

(c) Für $1 \le x \le 3$ gilt: $F(x) = \frac{3x-1}{8}$

$\frac{3\tilde{x}-1}{8} = \frac{1}{2} \longrightarrow \underline{\tilde{x} = \frac{5}{3}}$

(d) $W\{1 \le X < 2\} = F(2-) - \underbrace{F(1-)} = F(2) = \frac{6-1}{8} = \underline{\frac{5}{8}} = 0{,}625$

2) (a)

Y \ X	0	1	2	3	Y ↓
0	0,01	0,02	0,07	0,01	0,11
1	0,03	0,06	0,10	0,06	0,25
2	0,05	0,12	0,15	0,08	0,40
3	0,02	0,09	0,08	0,05	0,24
X →	0,11	0,29	0,40	0,20	1

$X \not\perp Y$

z.B. $0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16 \neq 0{,}15$

(b) $E(X) = 1{,}69 \quad E(Y) = 1{,}77$

$E(X^2) = 3{,}69 \quad E(Y^2) = 4{,}01$

$Var(X) = 0{,}8339 \quad Var(Y) = 0{,}8771$

$E(X \cdot Y) = 2{,}96 \quad Cov(X,Y) = -0{,}0313$

$\underline{\rho = -0{,}0366}$

(c)

y	0	1	2	3
p(y|2)	0,175	0,250	0,375	0,200

$E(Y|X=2) = \sum_{y=0}^{3} y \cdot p(y|2) = \underline{1{,}60}$

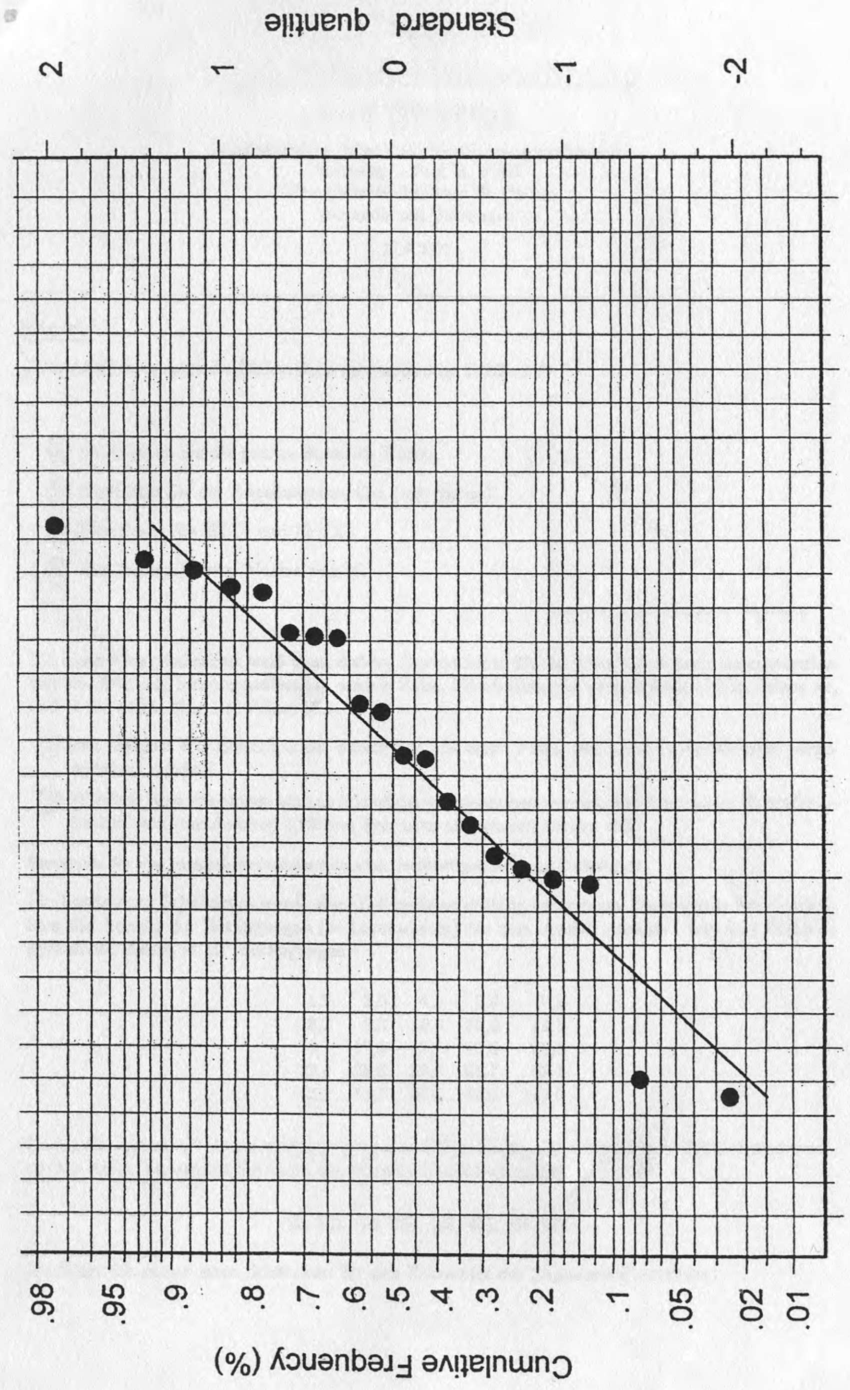
3) (a) $\bar{x} = -0{,}2335$, $s^2 = 0{,}9385$, $s = 0{,}9687$

i. $\frac{|\bar{x} - 0|}{s}\sqrt{20} = |-1{,}0779| < t_{19;0{,}975} = 2{,}093$

$\underline{H_0 \text{ nicht verwerfen}}$

ii. $\left[\frac{19 \cdot s^2}{\chi^2_{19;0{,}975}}, \frac{19 \cdot s^2}{\chi^2_{19;0{,}025}}\right] = \underline{[0{,}5428; 2{,}002]}$

σ: $\underline{[0{,}7367; 1{,}4149]}$



5/5

ii.

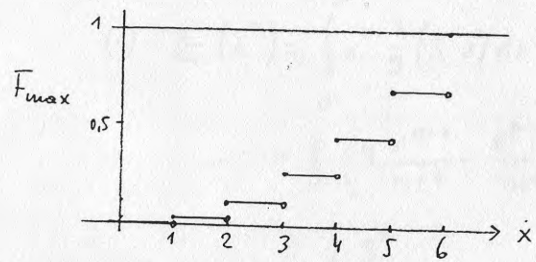
Klassen	H	W	20·W	$\frac{(H-20W)^2}{20 \cdot W}$
$(-\infty; -0{,}675]$	7	0,25	5	0,8
$(-0{,}675; 0]$	4	0,25	5	0,2
$(0; 0{,}675]$	4	0,25	5	0,2
$(0{,}675; \infty)$	5	0,25	5	0
	20	1	20	1,2

$1{,}2 < \chi^2_{3;0{,}95} = 7{,}815$

H_0: $X \sim N(0,1)$ nicht verwerfen.

B) (a)

k	1	2	3	4	5	6
$F_{max}(k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{25}{36}$	1



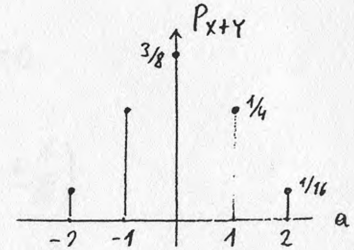
(b) $5T = 120\,h$, $7T = 168\,h$

$X \sim Ex_{90}$: $W\{X > 168 \mid X > 120\} = W\{X > 48\} =$

$= e^{-48/90} = \underline{0{,}5866}$

(c) $p_{X+Y}(a) = \sum_k p_X(k)\, p_Y(a-k)$

a	-2	-1	0	1	2
$p_{X+Y}(a)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$



Sutie ovo uradit

Schriftliche Prüfung

Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie

Studienrichtung: Informatik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2-stündig mit Unterlagen

18. November 2003

A) Beispiele[1]

1. Für eine stochastische Größe X gilt:

$$W(X = -1) = W(X = 2) = \frac{1}{5}$$

Der Rest der Verteilung ist im Intervall $(-1, 2)$ kontinuierlich uniform verteilt.

(a) Ermitteln und zeichnen Sie (genau!) die Verteilungsfunktion. (2)
(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$. (1)
(c) Berechnen Sie $\mathrm{Var}(X)$. (1)

2. Bei einem Lebensdauertest mit 10 Komponenten ergaben sich die folgenden Lebensdauern (in Stunden):

1200, 1500, 1625, 1725, 1750, 1785, 1800, 1865, 1900, 1950

Unter der Annahme, daß die Lebensdauer normalverteilt ist, ermitteln Sie:

(a) Schätzwerte für den Mittelwert μ und die Varianz σ^2. (1)
(b) 90% Konfidenzintervalle für μ und σ^2. (1+1)
(c) Einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Komponente länger als 1800 Stunden funktionsfähig ist. (1)

3. Sieben 1-EURO-Münzen wurden simultan 1536 Mal geworfen und bei jedem Wurf festgestellt, wie oft 'Kopf' (Mozart) gekommen ist. Die folgende Tabelle zeigt die Ergebnisse:

# Kopf	0	1	2	3	4	5	6	7
Häufigkeit	12	78	270	456	386	252	69	13

finec adje stao

Testen Sie mittels eines geeigneten Tests (mit $\alpha = 5\%$) die Hypothese, daß die Beobachtungen einer Binomialverteilung mit $n = 7$ und $p = 0.5$ folgen. (4)

B) <u>Beantworten bzw. berechnen Sie</u>:[2]

(a) Ein System, bestehend aus fünf unabhängigen Komponenten, arbeitet nur dann korrekt, wenn alle fünf Komponenten korrekt arbeiten. Die Lebensdauern der Komponenten sind exponentialverteilt mit Mittel 10000 [h]. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das System für eine Zeitspanne von (mindestens) 500 Stunden funktionsfähig?

(b) Ist die folgende Funktion eine Verteilungsfunktion?

$$F(x) = \frac{x}{x+1}, \quad x \geq 0 \qquad (F(x) = 0 \quad \text{sonst})$$

Falls 'ja': Um welche Art von Verteilung handelt es sich? Gibt es eine Dichte? (Wie lautet sie?)

(c) Was ist und welche Eigenschaften hat der Korrelationskoeffizient ρ_{XY} für zwei stochastische Größen X und Y ?

(d) Die stochastische Größe X habe die Dichte $f_X(x)$. Dann ist die Dichte von $Y = aX$ (a eine positive Konstante) gegeben durch welchen der folgenden Ausdrücke?

(1) $f_X(ax)$ (2) $a\,f_X(ax)$

(3) $f_X\left(\frac{x}{a}\right)$ (4) $\frac{1}{a} f_X\left(\frac{x}{a}\right)$

(Begründete Antwort!)

(e) Der Radius einer Kugel sei eine auf dem Intervall $[1, 10]$ stetig uniform verteilte stochastische Größe. Bestimmen Sie den Erwartungswert des Kugelvolumens.

Hinweis: Das Volumen einer Kugel mit Radius r ist $V = \frac{4}{3} r^3 \pi$.

Schriftliche Prüfung

Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie

Studienrichtung: Informatik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2-stündig mit Unterlagen

16. Dezember 2003

A) Beispiele[1]

1. Bei einer Serviceeinrichtung wird man entweder sofort bedient, mit Wahrscheinlichkeit 0.2, oder man hat eine auf dem Intervall $[0, 10]$ (Minuten) uniform verteilte Wartezeit. Bestimmen Sie:

(a) die Verteilungsfunktion der Wartezeit (+ genaue Zeichnung); (1)

(b) den Mittelwert der Wartezeit; (1)

(c) die Varianz der Wartezeit; (1.5)

(d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wartet man länger als 5 Minuten? (0.5)

2. Die stochastischen Größen X_1 und X_2 sind unabhängig uniform verteilt auf dem Intervall $[0, 10]$. Ermitteln Sie:

(a) die Verteilungsfunktion des Minimums $Y = \min\{X_1, X_2\}$; (1.5)

(b) die Dichte von Y (+ genaue Zeichnung); (1)

(c) den Mittelwert von Y; (1)

(d) den Median von Y. (0.5)

3. Auf Basis der folgenden Beobachtungen einer normalverteilten sG $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

$$26.1 \quad 27.2 \quad 28.3 \quad 25.2 \quad 26.8 \quad 26.3 \quad 28.5 \quad 27.4 \quad 27.8 \quad 28.2$$

bestimme man:

(a) Schätzwerte für μ und σ^2 (+ Kommentar zur Wahl der Schätzer); (1)

(b) ein 90% Konfidenzintervall für μ; (1)

(c) ein 90% Konfidenzintervall für σ^2; (1)

(d) einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit mit der X größer als 28 ist. (1)

16. Dez. 2003

B) Beantworten bzw. berechnen Sie: [2]

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein System aus 3 unabhängigen Komponenten, von denen zumindest 2 funktionieren müssen, intakt? Die Komponenten sind alle mit identischer Wahrscheinlichkeit p intakt.

(b) Die Faltung von zwei unabhängigen Exponentialverteilungen mit identischem Mittelwert τ ergibt:

(1) Normalverteilung;
(2) Exponentialverteilung mit Mittelwert 2τ;
(3) Gammaverteilung $\gamma(2, \tau)$;
(4) Keine der obigen Verteilungen.

(c) Zwischen zwei stochastischen Größen X und Y bestehe die folgende Beziehung:

$$Y = 0.5\,X - 1$$

Dann ist der Korrelationskoeffizient von X und Y:

(1) 1
(2) 0.5
(3) -1
(4) 0

(d) Die stochastische Größe X ist uniform verteilt auf dem Intervall $[0, \pi/2]$. Bestimmen Sie den Erwartungswert von $Y = \cos(X)$.

(e) $X_1, \ldots, X_n$ sei eine Stichprobe von $X \sim N(0, \sigma^2)$. Wie lautet in diesem Fall der plausible Schätzer von σ^2 ?

Schriftliche Prüfung

Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie

Studienrichtung: Informatik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2-stündig mit Unterlagen

26. Jänner 2004

A) Beispiele[1]

1. Bei einer Serviceeinrichtung wird man entweder sofort bedient, mit Wahrscheinlichkeit 0.3, oder man hat eine auf dem Intervall $(0, 30)$ (Minuten) uniform verteilte Wartezeit. Bestimmen Sie:
   (a) die Verteilungsfunktion der Wartezeit (+ Zeichnung); (1)
   (b) den Mittelwert der Wartezeit; (1)
   (c) die Varianz der Wartezeit; (1)
   (d) die Wahrscheinlichkeit noch mindestens weitere 10 Minuten warten zu müssen, wenn man bereits 10 Minuten gewartet hat. (1)

   Extrapunkt: Hat die Verteilung ein „Gedächtnis"?

2. Die Dichte einer 2-dimensionalen stochastischen Größe (X, Y) ist gegeben durch:

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+y) & \text{für } 0 < x < 2,\ 0 < y < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   (a) Bestimmen Sie die Konstante c. (1)
   (b) Ermitteln Sie die Randdichten von X und Y (+ Skizzen). (1)
   (c) Sind X und Y stochastisch unabhängig? (0.5)
   (d) Berechnen Sie $\mathbb{E}[Y \mid X = 1/3]$. (1.5)

3. Die folgenden 20 „uniform" (auf $(0, 1)$) verteilten Zufallszahlen wurden mittels des R-Befehls `round(runif(20),2)` erzeugt:

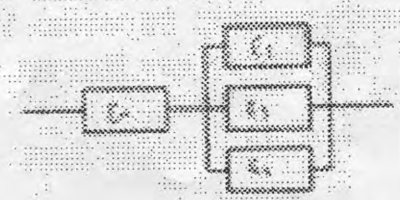
```
0.75 0.98 0.97 0.35 0.39 0.95 0.11 0.93 0.35 0.53
0.54 0.71 0.41 0.15 0.34 0.63 0.06 0.85 0.21 0.54
```

   (a) Berechnen Sie das Stichprobenmittel und die Stichprobenvarianz. Entsprechen sie (annähernd) den Erwartungen? (1)
   (b) Zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion und darüber die theoretische Verteilungsfunktion. (1.5)
   (c) Testen Sie mittels χ^2-Anpassungstest, ob die Daten uniform verteilt sind (mit $\alpha = 5\%$). Nehmen Sie dazu die folgende Klasseneinteilung: $(0, 0.25]$, $(0.25, 0.50]$, $(0.50, 0.75]$, $(0.75, 1)$. (1.5)

26. Jän. 2004

B) Beantworten bzw. berechnen Sie: [2]

(a) Jede Komponente des folgenden Systems ist – unabhängig von den anderen – mit gleicher Wahrscheinlichkeit p intakt. Ermitteln Sie einen Ausdruck für die Intaktwahrscheinlichkeit des Systems.



(b) Der Median einer normalverteilten stochastischen Größe ist 1000 und das 75%-Quantil ist 1250. Wie groß ist – gerundet auf eine ganze Zahl – die Standardabweichung?

(c) Zwischen zwei stochastischen Größen X und Y bestehe die folgende Beziehung:

$$Y = \frac{X-1}{3}$$

Dann ist der Korrelationskoeffizient von X und Y:

(1) 1/3
(2) 0
(3) −1/3
(4) 1
(5) Keiner der obigen Werte, sondern ....

(d) Die Faltung von zwei unabhängigen Alternativverteilungen A_p mit gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit p ergibt:

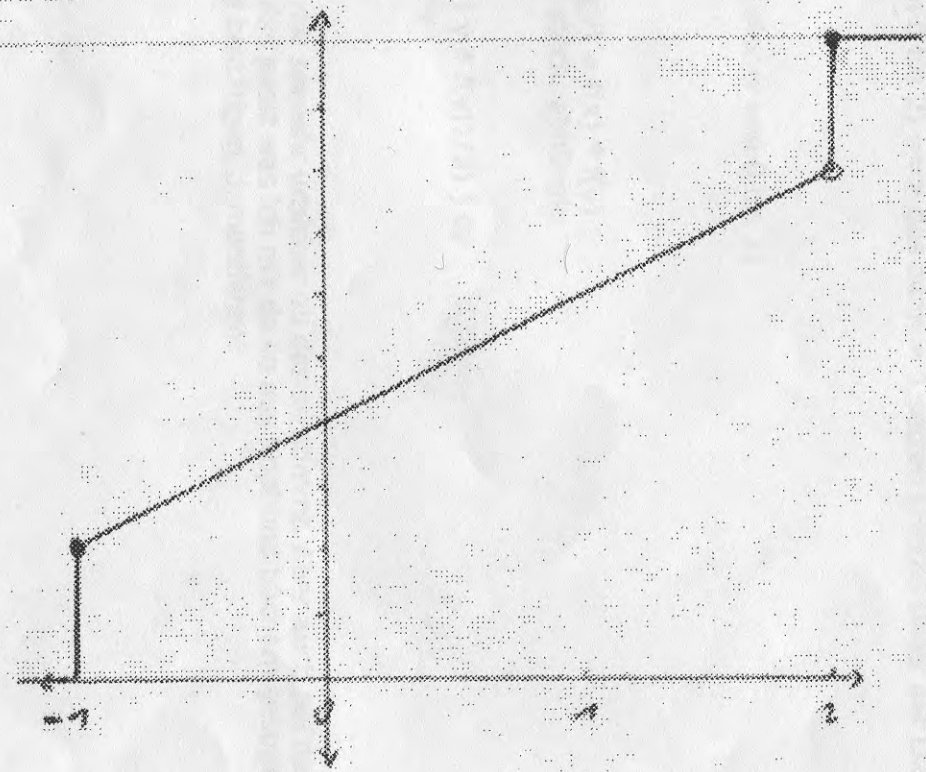
(1) $D_{\{0,1,2\}}$
(2) $B_{2,p}$
(3) A_p
(4) G_p
(5) Keine der obigen Verteilungen, sondern ....

(e) Ein Lieferant behauptet, daß (höchstens) 1% seiner Produkte fehlerhaft sind. Zur Überprüfung ziehen Sie eine Stichprobe von 100 Stück und beschließen nicht zu kaufen, wenn die Stichprobe mindestens 3 fehlerhafte Stücke enthält. Wie groß ist bei diesem Test die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1.Art? $\sim$ 72,1

(1) $W\{X = -1\} = W\{X = 2\} = \frac{1}{5}$

Rest: uniform verteilt auf $[-1, 2]$

(2)



$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ x \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{5} & -1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Ispit 3

Bsp 1
b)
EX = 0*0,3 + int(a,b)[(x*7)/300] = 10,5
(könnte passen)

c)
über Verschiebungssatz berechnen:
(EX)^2 = 110.25
E(X^2) = 210
VarX = 99,75
(Kommt mir seeehr komisch vor. Wo ist mein Fehler?)

d)
Bedingte WK;
W{X>=20 | X>=10} = 0,2333 / 0,4666 = 0,4999
Stimmt das? Habs mit (WK von A durschn B) durch (WK B) gerechnet und bei A durchschn. B einfach W{X>=20} hergenommen weils die strengere Bedingung ist! Bitte einen Kommentar hierzu!

Bsp 2
a)
Doppelintegral (jeweils von 0 bis 2) ==> das dann = 1 setzen (Fläche unter der Dichte muss =1 sein).
c = 1/8

b)
x bzw y "wegintegrieren" (wieder von 0 bis 2)
f(x) = 1/4*x + 1/4
f(y) = 1/4*y + 1/4

c)
stoch. unabhängig falls f(x,y) = f(x) * f(y)
ist es aber nicht ==> sind stoch. abhängig

d)
E[Y|X=1/3] = int(0 bis 2) [y * f(y|1/3)] dy
f(y|1/3) = 1/104 + 3/104*y

E[Y|X=1/3] = 0,0933

Speziell bei Bsp d) bin ich mir seeeehr unsicher ob das so stimmt. Aber auch bei den anderen weiß ich nicht ob das passt was ich mir da so aus Kopf und büchern gesogen habe... könnte das jemand bestätigen/dementieren?

Bsp 3
a)
SP-Mittel = 0,5375
SP-Varianz = 0,08967

Für X ~U_[0,1] gilt
my = (0+1)/2 = 0,5
sigma^2 = (1-0)/12 = 1/12 = 0,083333

Ispit 3

==> Die errechneten Werte stimmen ungefähr mit dem, was man sich von einer auf 0,1 uniform verteilten SG erwartet, überein!

b)

c)
zn(x1,....x20) = 0,4
chi^2_[3,0,95] = 7,81

==> H0 nicht verworfen, d.h. die Hypothese, dass es sich um eine Uniforme Verteilung handelt wird bestätigt.

Bei c) finde ich den chi^2 wert überraschend hoch im Verglich zu dem was nötig wäre, damit H0 auch nur annähernd verworfen wird. Kann aber auch sein dass die Zahlen einfach so toll verteilt sind, dass wir die Hypothese niiiiiiiiiieeeeee mals verwerfen dürften, und dass deswegen solche Werte rauskommen.

Hat jemand die selben Ergebnisse?
thx

Und jetzt noch zur zweiten Seite der prüfung, d.h. zu **Teil B der Aufgabenstellung**:

(a)
W(E) = 3p^2 + p^4

(b)
F(1250) = 0,75 und F(1000) = 0,5
==> 0,75 und 0,5 in N-Tabelle nachschauen und dann (x-my)/sigma gleich diesen Wert setzen
==> 2 Gleichungen in wei unbekannten (my und sigma)
=> my = 1000
=> sigma = 370,37

(c)
S.81; falls ein linearer Zusammenhang der Form Y = aX+b besteht, ist rho = sigma(a);
bei uns also rho = 1

(d)

(e)
alpha = W{X>=3 | p=0,01} = ... = 0,0794
Bei Problemen: Bsp. 12.1 aus der diesjährigen Übung ist ziemlich genau das selbe gewesen!

So, hoffe, dass sich irgendwann irgendwer dazu aufraffen kann diese vom mir durchgerechnete Prüfung bzw. meine Ergebnisse dazu zu kommentieren! Ich gebe gerne Auskunft über den Rechenweg zu einzelnen Beispielen falls euch was anderes rauskommt!

cu & thx im Vorhinein!

Ispit 2

Bsp 1

a)
F(x) = 8/100 * x + 2/10 (für 0<=x<10; davor 0, danach 1)

b)
EX = 4

c)
VarX = 10,667
(Kommt mir eigenartig groß vor; habs aber auf 2 Arten gerechnet... keine Ahnung!)

d)
W{X>=5} = 1 - W{X<=5} = 1 - F(5) = 0,4

Bsp2

a)
F_Y(x) = x^2 / 100 + x/5

b)
f_Y(x) = F_Y'(x) = x/50 + 1/5 **[edit:]minus hat gefehlt[/edit]**

c)
EX = int(0,10) x * f(x) = **[edit:]Folgefehler ausgebessert[/edit]**

d)
Habe zwei 0,5-Fraktile erhalten; bin mir nicht sicher wie man damit umgeht (zumal einer negativ ist - siehe auch anderer Thread von mir)
xp1 = 2,247
xp2 = -22,247

Bsp 3

a)
my-dach = 27,18
sigma^2-dach = 1,0246
(Hier wieder eine unsicherheit: siehe anderer thread von mir; bei N(my,sigma^2)-Verteilung muss evtl. am Anfang 1/n hin statt wie von mir gerechnet 1/(n-1) ... so komme ich auf 1,0246! Bitte SCHREIEn falls das falsch ist! ps. habe mit diesem wert weitergerechnet also vielleicht kommen euch bei den folgenden punkten auch leicht andere sachen raus...!)

b)
90%-Konfidenzintervall für my:
[26,59 ; 27,767]

c)
90%-Konfidenzintervall für sigma^2
[0,545 ; 2,769]
(Kommt mir etwas großzügig vor; habt ihr was anderes?)

d)
Schätzwert für die WK, dass X größer als 28 ist
[edit]Habe eine Lösung gefunden(richtig?):
W{X>28} = 1 - W{X<=28} = 1 - F(28) = 1 - PHI((28 - mydach)/sigmadach) = 1 - 0,791 = 0,209
[/edit]

Beispielteil B

(a)
W(E) = 3p^2 - 2p^3

(b)
Keine Ahnung; hab die Faltung angewendet und da kommt raus
h(z) = 1/tau^2 * e^[-z/tau]
... also ich würd "keins von diesen" ankreuzen - kann aber auch falsch sein; bitte um Hinweise!

(c)
positiver linearer zusammenhang (Y=a*X + b);
rho_X,Y = sign(a)
==> rho = 1

(d)
EY = 2/pi

(e)
sigma^2-dach = 1/n * summe(i=1...n) xi^2

Hoffe die Sachen passen so halbwegs; bitte schreibt eure Meinung!

Ispit1

Bsp 1

a)
Graph der Verteilungsfkt: siehe Attachement!
F(x) =
= 0 (x < -1)
= x*1/5 + 2/5 (-1 <= x < 2)
= 1 (x >= 2)
(das ganze hier soll eine 3-fache aufspaltung sein, keine '=' wo das untere gleich dem oberen ist!)

b)
EX = 0,5

c)
VarX = ~~1,35~~ 3/4
(über Verschiebungssatz gerechnet)

Bsp 2

a)
my-dach = 1710 ✓
sigma^2-dach = 44470 ✓

b)
90%-Konfidenzintervall für my:
[1587,76 ; 1832,24]
90%-Konfidenzintervall für sigma:
[23654,26 ; 120189,19]

c)
W{X>1800} = 1 - W{X<=1800} =
= 1 - PHI((1800 - my-dach)/(sigma-dach))
= 0,336
(hier bin ich mir etwas unsicher, ob man das so machen darf...!

Bsp 3

Hier bin ich mir wiedermal recht unsicher wie das geht bzw. ob ichs richtig verstanden und gerechnet habe.
Also ich hab erst einmal die ganzen W{X=x} für x = 0(1)7 ausgerechnet einfach mit den Pkt-Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung; p und n laut angabe eingesetzt!
Dann bekomme ich:
W{W=0} = 0,000977
W{W=1} = 0,00977
W{W=2} = 0,0439
W{W=3} = 0,11719
W{W=4} = 0,20508
W{W=5} = 0,24609
W{W=6} = 0,20508
W{W=7} = 0,11719

Ipsit 1

(d)
X hat Dichte f(x), welche Dichte hat Y=aX?
Y=aX hat die Dichte f(aX) wegen:
Funktionen von einer oder mehreren stoch. größen sind selbst wieder stoch. Größen; ich übergebe also an die selbe Dichtefunktion nur das veränderte Argumnet aX
(bessere Erklärung fällt mir nicht ein ==> Tipps?)

(e)
Radius einer Kugel uniform verteilt auf [1,10]; ges: E[Kugelvolumen]
==> Satz vom unbew. Statistiker!
für uniforme verteilung: f(x)= 1/(b-a) = 1/9
psi(x) = 4/3)*r^3*pi
Diese beiden einsetzen in SvuS; als Grenzen des Integrals 1,10 wählen
==> E[Kugelvolumen] = 37*pi

Soda... das wars mal wieder. Bitte meldet mir Feheler bzw. auch wenn ihr es genauso habt wie ich!

IPSIT 1

Ok, jetzt habe ich den Chi^2-Anpassungstest hergenommen und da eingesetzt.
Und zwar für Y_i^(n) hab ich immer die Sachen aus der Angabe eingesetzt, also zB für i=0 hab ich 12, für i=1 hab ich 78 usw. eingesetzt!
für n hab ich immer und für w_i hab ich jeweils die oben errechneten WKs eingesetzt.
dann laut formel das ganze aufsummiert und da habe ich dann als ergebnis
z_n =

Ok...!
Jetzt zum Chi^2-test.
Der Verwerfungsraum ist
V={ (x1,...,xn): z_n(x1,...,xn) >= Chi^2_{r-1,1-alpha} }

Bei uns ist
Chi^2_{r-1;1-alpha} = Chi^2_{7;0,95} = 14,07

Also wird die Hypothese, dass es sich um eine Binomialverteilung handelt mit p=0,5 und n=7 EINDEUTIGST verworfen!!!
Man vergleiche 1763 zu 14 !!!
Das kommt mir sehr komisch vor zumal ich gedacht hätte die Hypothese könnte eigntlich stimmen... aber es ist ja nichtmal in der Nähe, angenommen zu werden!

Bitte um Kommentar dazu was/ob ich was falsch gemacht habe!

Beispielteil B

(a)
W{E} = W{A n B n C n D n E} = W{A} * W{B} * W{C} * W{D} * W{E}
weil die Komponenten unabhängig voneinander sind.
Bei exponentialverteilung mit tau=10000
W{A>=500}=W{B>=500}=W{C>=500}=W{D>=500}=W{E>=500}=
1-F(500) = 1-1+e^(-500/10000) = 0,95123

Also W{System intakt länger als 500} = 0,95123^5 = 0,7788

(b)
Ja, es ist Ftlg.Fkt soweit ich das sehe (Eigenschaften auf Seite 40 gelten);
Es ist eine kontinuierliche Verteilung (Art) ==> Dichte exsistiert
f(x) = F'(x) = 1/(1+x)^2

(c)
Korrelationskoeffizient:
==> Maß für den linearen Zusammenhang zw. 2 SGs X und Y
==> -1 <= rho <= 1
==> rho_{X,Y} = 0 ==> X und Y sind 'unkorreliert'
==> Falls Y = aX + b ==> rho = signum(a)
==> rho = Cov(X,Y) / (sqrt(VarX)*sqrt(VarY))
mit Cov(X,Y) = E((X-EX)*(Y-EY))
und Var(X) = E(X-EX) bzw. analoges für VarY