Test 24. 6.2003)

Beispiel A)

Für eine stochastische Größe X gilt $W\{X=0\} = \frac{1}{2}$. Der Rest der Verteilung ist uniform auf dem Intervall $[-2,2]$ verteilt.

a) Um welchen Verteilungstyp handelt es sich

Um eine gemischte Verteilung

b) Ermitteln und zeichnen Sie genau die Verteilungsfunktion $F(\,)$

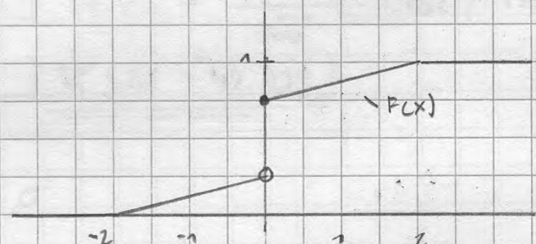
$$f^*(x) = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{1-p} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1_{(-2,2)}(x) = \frac{1}{8} \cdot 1_{(-2,2)}(x)$$

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-2}^{x} f^*(y)\,dy = \frac{1}{8} y \Big|_{-2}^{x} = \frac{1}{8} x + \frac{2}{8}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} x + \frac{2}{8} & -2 \leq x < 0 \\ \frac{6}{8} & x = 0 \\ \frac{6}{8} + \frac{1}{8} x & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

$\frac{2}{8} + \frac{4}{8} = \frac{6}{8}$



c) Ermitteln Sie $W(X \leq 0)$ und $W(-1 < X \leq 1\}$

$$W(X<0) = W(X \leq 0) - W(X=0)$$
$$= \frac{6}{8} - \frac{1}{2} = \frac{6}{8} - \frac{4}{8} = \frac{1}{4} = \underline{\underline{0.25}}$$

$$W(-1 < X \leq 1) = W(X \leq 1) - W(X \leq -1)$$
$$= \frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = \underline{\underline{0.75}}$$

1) Mittelwert und Varianz

$$f^*(x) = \frac{1}{8} \cdot 1_{(-2,2)}(x)$$

$$\mathbb{E}X = \underbrace{\sum_{p(x)>0} p(x)\cdot x}_{} + \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{8}x \Big|_{-2}^{2} = \underline{\underline{0}}$$

$$\mathrm{Var}\,X = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{p(x)>0} p(x)\cdot x^2 + \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\cdot x^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(0)^2 + \frac{1}{8}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = \frac{8}{24} - \frac{-8}{24} = \frac{16}{24} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\mathrm{Var}\,X = \frac{2}{3} - 0^2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

A2) Auf Grund der folgenden Stichprobe einer nach $N(\mu, \sigma^2)$ verteilten stochastischen Größe X bestimme man

32.1 36.8 36.6 37.7 38.2 39.8 41.2 42.9 46.0 46.6

a) Schätzwerte für μ, σ^2, σ

$$\hat{\mu} = \bar{x}_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = 39.76$$

$$S_n^2 = \hat{\sigma} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2 = 20.4027$$

$$\hat{\sigma} = 4.51693$$

b) 95% Konfidenzintervalle für μ und σ

für μ:

$$\left[\bar{x}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} , \bar{x}_n + \frac{s_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

$$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$$

$$t_{9, 0.975} = 2.262$$

$$\left[39.76 - \frac{4.51693}{\sqrt{10}} \cdot 2.262 ; 39.76 + \frac{4.51693}{\sqrt{10}} \cdot 2.262 \right]$$

$$\underline{\underline{\left[36.529 ; 42.991 \right]}}$$

für σ^2:

$$\left[\frac{(n-1) \cdot s_n^2}{\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}} , \frac{(n-1) \cdot s_n^2}{\chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}} \right]$$

$$\chi^2_{9, 0.975} = 19.02 \qquad \chi^2_{9, 0.025} = 2.7$$

$$\left[\frac{9 \cdot 20.4027}{19.02} ; \frac{9 \cdot 20.4027}{2.7} \right] = \left[9.65 ; 68.01 \right]$$

$$\Rightarrow \sigma : \left[3.11 ; 8.25 \right]$$

c) Schätzwert dafür für die Wahrscheinlichkeit dass X zwischen 25 und 45 liegt

$$W\{25 \le X \le 45\} = \Phi\left(\frac{45-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{25-\mu}{\sigma}\right)$$

$S_n / \sqrt{n}$

$$= \Phi(1.16) - \Phi(-3.27)$$

$$= \Phi(1.16) - (1 - \Phi(3.27))$$

$$\approx \Phi(1.16) = \underline{\underline{0.877}}$$

13) Eine stochastische Größe X mit Merkmalraum $M_x = \{0, 1, 2, \dots\}$ wurde mehrfach beobachtet.

X	0	1	2	3	4	5	6...
Hf	16	17	13	10	3	1	0

$n = 60$

a) Ermittle eine plausible Schätzwert für μ:

$$\hat{\mu} = \overline{X}_n = \frac{0 \cdot 16 + 1 \cdot 17 + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 0}{60}$$

$$= 1.5$$

$$p_k = \frac{\mu^k \cdot e^{-\mu}}{k!}$$

Bestimme Klassen

x	Hf	w_j	$n \cdot w_j$	
0	16	0.22313	13.38784	} A_0
1	17		20.0817	} A_1
2	13		15.0613	} A_2
3	10		7.53064	
4	3		2.82399	$A_3 = 11.4692$
5	1		0.847197	
6..	0		0.267359	

$$Z_n = \sum_{j=1}^{r} \frac{(A_j - n \cdot w_j)^2}{n w_j} = \frac{(16 - 13.3878)^2}{13.3878} + \frac{(17 - 20.0817)^2}{20.0817} + \frac{(13 - 15.0613)^2}{15.061} + \frac{(14 - 12.3169)^2}{12.3169}$$

$$= \underline{1.823}$$

$$\chi^2_{2,\,0.95} = \cancel{7.81}\ 5.99$$

$1.823 < 5.99 \Rightarrow$ Test wird angenommen, H_0 nicht verworfen

Übung Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie 17.1.2006

Ba) Ein Behälter enthält 3 Würfel. Einer hat auf allen 6 Seiten eine 6. Einer hat auf der Hälfte der Seiten 6 und einer ist ein richtiger Würfel. Ein Würfel wird zufällig ausgewählt und geworfen. Das Ergebnis ist 6. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um den mit 6 Seiten

H_1 – Würfel mit nur Sechsen $\qquad S$ – Sechs geworfen

H_2 – Würfel mit 50% Sechsen

H_3 – Normaler Würfel

$$W(H_1 | A) = \frac{W(H_1) \cdot W(S|H_1)}{W(H_1) \cdot W(S|H_1) + W(H_2) \cdot W(S|H_2) + W(H_3) \cdot W(S|H_3)}$$

$$= \frac{1/3}{1/3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{3}{5} = \underline{0.6}$$

Bb) Ein Bauteil mit exponentiell verteilter Lebensdauer arbeitet laut Angabe des Herstellers mit Wahrscheinlichkeit 0.95 länger als 500 Stunden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieser Bauteil länger als 1000 Stunden arbeitet

$W(X > 500) = 0.95$

$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\tau}} \qquad W(X > x) = 1 - F(x) = e^{-\frac{x}{\tau}}$

$e^{-\frac{x}{\tau}} = 0.95$

$\frac{-x}{\ln(0.95)} = \tau \quad \Rightarrow \tau = 9747.86\,h$

$W(X > 1000) = e^{-\frac{1000}{9747.86}} = \underline{\underline{0.9025}}$

Bc) Der Radius eines Kreises ist eine auf der Menge $M = \{1,2,3,4,5\}$ diskret uniform verteilte stat. Größe. Bestimmen den Erwartungswert

$Y = \psi(X) \qquad \psi = x^2 \cdot \pi$

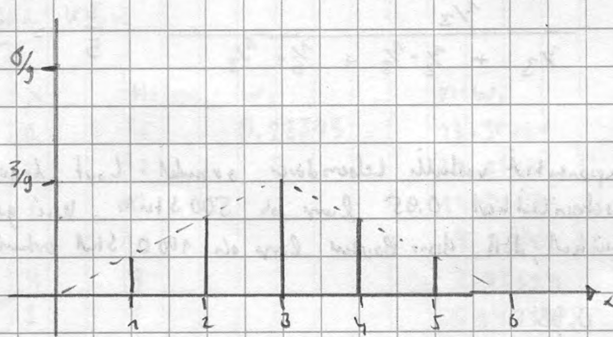
$$EY = \sum_{x \in M_X} \psi(x) \cdot p(x) = \sum_{x \in M_X} x^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{5} = \frac{\pi}{5} \cdot \sum_{x \in M_X} x^2 = \frac{\pi}{5} \cdot 55 = \underline{11\pi}$$

Bd) Ermitteln und zeichnen Sie das Ergebnis der Faltung von zwei auf $M=\{1,2,3\}$ diskret uniform verteilten Größen

$$X \sim D_{\{1,2,3\}} \qquad Y \sim D_{\{1,2,3\}} \qquad X \perp\!\!\!\perp Y$$

$$W\{X+Y=k\} = \sum_{x+y=k} p(x)\cdot p(y) = \sum_{x=1}^{3} p(x)\cdot p(k-x)$$

k		$W\{X=k\}$
1	~~(1,1)~~	$\emptyset$
2	(1,1)	1/9
3	(1,2), (2,1)	2/9
4	(1,3), (2,2), (3,1)	3/9
5	(2,3), (3,2)	2/9
6	(3,3)	1/9
7		$\emptyset$



Be) Die empirische Verteilungsfunktion ist ein Schätzer für die zugrundeliegende Verteilungsfunktion. Eigenschaft?

a) $$F_n^*(x) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n} 1_{(-\infty;x]}(X_i)$$

$$\mathbb{E}(F_n^*(x)) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n}\mathbb{E}(1_{(-\infty,x]}(X_i))$$

$$\mathbb{E}(1_{(0,x]}X_i) = \int_{-\infty}^{x} 1_{(-\infty,x)}(x)\cdot f(x)\,dx = F(x)$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n} F(x) = \frac{n}{n}\cdot F(x) = F(x) \Rightarrow \text{Unverzerrt}$$

b) $$F_n^*(x) \xrightarrow[n\to\infty]{W} F(x)$$

$$\frac{1_{(-\infty,x)}(X_1) + \dots + 1_{(-\infty,x)}(X_n)}{n} \quad \text{mit GgZ} \rightarrow \mathbb{E}\,1_{(-\infty,x)}(X_i) = F(x)$$

konsistente Schätzfolge.

Test 29.1.2002)

A1) Für eine stochastische Größe X gilt $W\{X=1\} = \frac{1}{3}$. Der Rest der Verteilung ist uniform im Intervall $[1,4]$ verteilt

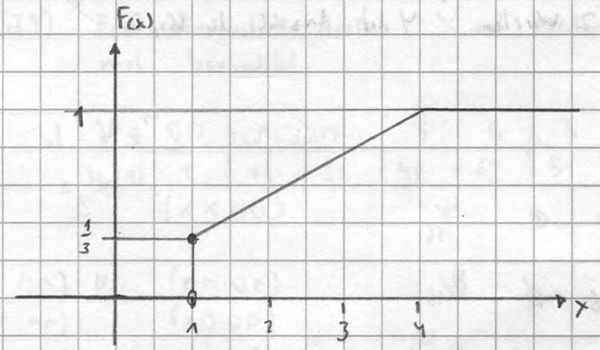
a) Ermitteln und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion F(x)

$$f^*(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4-1} \cdot 1_{(1,4)}(x) = \frac{2}{9} \cdot 1_{(1,4)}(x)$$

$$p(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{für } x=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}x - \frac{2}{9} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9}x \qquad \text{für} \quad 1 \le x \le 4$$

$$\int_1^x f^*(x)\,dx = \frac{2}{9}x\Big|_1^x = \frac{2}{9}x - \frac{2}{9} = \frac{2}{9}(x-1)$$



b) Berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz von X

$$\mathbb{E}X = \sum_{\substack{x \in \Pi_X \\ p(x_i)>0}} p(x_i)\cdot x_i + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{9}\cdot 1_{(1,4)}(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 1 + \int_1^4 \frac{2}{9}x\,dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^4 = \frac{1}{3} + \frac{x^2}{9}\Big|_1^4 = \frac{3}{9} + \frac{16}{9} - \frac{1}{9}$$

$$= \frac{18}{9} = \underline{\underline{2}}$$

$$\text{Var}\,X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{\substack{x \in \Pi_X \\ p(x)>0}} p(x)\cdot x^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{9}\cdot 1_{(1,4)}(x)\cdot x^2\,dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = 5$$

$$\text{Var}\,X = 5 - (2)^2 = \underline{\underline{1}}$$

c) Bestimmen Sie den Median von X

$U_{0.5} = 2$

$F(U_{0.5}) = \frac{1}{2}$

$F(x) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9}x = \frac{1}{2}$

$x = \underline{\underline{7/4}} = 1.75$

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Intervalls $[\frac{1}{2} ; 3]$

$W\{\frac{1}{2} \le X \le 3\} = W\{X \le 3\} - \underbrace{W\{X \le \frac{1}{2}\}}_{0}$

$= \underline{\underline{\frac{7}{9}}} \approx 0.77 \quad - 0$

Beispiel 2) Eine Euro-Münze wird 4-mal unabhängig geworfen. X sei die Anzahl der Köpfe unter den ersten 2 Würfen. Y die Anzahl der Köpfe unter allen 4 Würfen

a)

X \ Y	0	1	2	3	4	
0	1/16	2/16	1/16	0	0	4/16
1	0	2/16	4/16	2/16	0	8/16
2	0	0	1/16	2/16	1/16	4/16
$p_Y(y)$	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16	$p_X(x)$

Möglichkeiten: $2^4 = 16$

(0 0 x x) 2^2

(1 0 1 0) (1 1 0 1)

(1 0 0 1) (0 1 1 0)

(0 1 1 0)

(0 1 0 1)

X = 0

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$\downarrow \quad \downarrow$

KK ZK
KZ

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

b) $p_X(x) = \begin{cases} 4/16 & \text{für } x=0 = 1/4 \\ 8/16 & \text{für } x=1 = 1/2 \\ 4/16 & \text{für } x=2 = 1/4 \end{cases}$ $\hat{=}$ Binomial $B_{2,\frac{1}{2}}$

$p_Y(y) : \begin{cases} 1/16 & \text{für } x=0 \\ 1/4 & \text{für } x=1 \\ 3/8 & \text{für } x=2 \\ 1/4 & \text{für } x=3 \\ 1/16 & \text{für } x=4 \end{cases}$ $\hat{=}$ Binomial $B_{4,1/2}$

c) Sind X und Y unabhängig.

Sol: Zwei SG X, Y heissen unabhängig wenn für ihre gemeinsame Verteilungsfunktion G(.) gilt

$G(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$

Gleichbedeutend mit

$p(x,y) = p(x) \cdot p(y)$

Nicht unabhängig: $p(2,1) = 0 \neq p_Y(1) \cdot p_X(2) = \frac{1}{64}$

d) Berechnen der Kovarianz $Cov(X,Y)$ von X und Y

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(X\cdot Y) - \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)$$

$$\mathbb{E}(X\cdot Y) = \sum_{(x,y)\in\Omega} x\cdot y\cdot p(x,y) = \frac{2}{16}1 + \frac{4}{16}\cdot 2 + \frac{2}{16}\cdot 3 + \frac{1}{16}\cdot 4 + \frac{2}{16}\cdot 6 + \frac{1}{16}\cdot 8 = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$\mathbb{E}(X) = n\cdot p = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

$$\mathbb{E}(Y) = n\cdot p = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$$

$$Cov(X,Y) = 2.5 - 2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Beispiel 3) Eine stochastische Größe X mit Merkmalraum $M_X = \mathbb{N}_0$ wurde 300 mal beobachtet.

a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 u. mehr
$H_n(x)$	1	16	36	48	62	51	41	22	18	5	0

p_μ:

$$W\{X=k\} = \frac{\mu^k\cdot e^{-\mu}}{k!}$$

$$l(\mu; x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i|\mu) = (e^{-\mu})^n\cdot\left(\frac{\mu^{x_1}}{x_1!}\cdot\dots\cdot\frac{\mu^{x_n}}{x_n!}\right)$$

$$= \frac{e^{-n\cdot\mu}\cdot\mu^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{x_1!\cdots x_n!}$$

$$\ln(l(\mu; x_1,\dots,x_n)) = e^{-n\cdot\mu}(-n\cdot\mu) + \sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\ln(\mu) - \ln(x_1!\cdots x_n!)$$

$$\frac{d}{d\mu}(\dots) = e^{-n\cdot\mu}(-n\cdot\mu) + \sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{1}{\mu} = 0$$

$$n\cdot e^{n\cdot\mu} = \sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{1}{\mu}$$

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = \overline{x_n}$$

$$SF: d(X_1,\dots,X_n) = \overline{X_n}$$

b) Sie ist unverzerrt und konsistent

a3) $\bar{x}_n = 80 \qquad \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 16 + 2 \cdot 36 + \dots + 9 \cdot 5 +}{40}$

$\Rightarrow \hat{\mu} = \cancel{30}\,4{,}4133$

$n = 300$

3b) Chiquadrat-Anpassungstest mit $\alpha = 0.05$ die Hypothese daß X poissonverteilt ist

A_j	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	$\{7\}$	$\{8\}$	$\{9, 10, 11, \dots\}$
w_j	0.12	0.053	0.118	0.174	0.192	0.169	0.124	0.078	0.043	0.036
$n \cdot w_j$	3,63	16.04	35.4	52.07	57.45	50.71	37.3	23.52	12.97	10.91

$$Z_n = \sum_{j=1}^{r} \frac{[Y_j^{(n)} - n \cdot w_j]^2}{n \cdot w_j} = \frac{226.659}{(\dots)} = \cancel{0.7556}\ 8{,}21$$

$$V = \{(x_1, \dots, x_n) \mid Z_n \geq \chi^2_{r-1, 1-\alpha}\}$$

$$\chi_{9, 0.95} = 16.92 \ \checkmark$$

$8\,\cancel{21}$ $\leq 16.92 \Rightarrow$ Hypothese annehmen

Beispiel B0)

Bauteile von zwei Maschinen A und B produziert. A produziert doppelt so viel Bauteile wie B in einer Zeitspanne. A hat im Schnitt 2% Ausschuß, B im Schnitt 1% Ausschuß. Ein zufällig aus der Gesamtprod. entnommenes Bauteil ist Ausschuß

H_1 .. Bauteil von Maschine A produziert
H_2 .. Bauteil von Maschine B produziert
D .. Bauteil war defekt

$$W(D|H_1) = \frac{W(D \cap H_1)}{W(H_1)}$$

a) A-priori:

$$W(H_1) = W(D) \cdot W(H_1|D) = W(D|H_1) \cdot W(D)$$

$$W(D) = W(H_1) \cdot W(D|H_1) + W(H_2) \cdot W(D|H_2)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 0.02 + \frac{1}{3} \cdot 0.01 = 0.0166$$

$$W(D \cap H_1) = W(D|H_1) \cdot W(H_1) = 0.02 \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{0.0133}}$$

$$W(H_1|D) = \frac{W(H_1) \cdot W(D|H_1)}{W(H_1) \cdot W(D|H_1) + W(H_2)\, W(D|H_2)} = \underline{\underline{0.8}}$$

$W(H_1) = \cancel{0}\ \frac{2}{3}$ Bauteil kommt von A

B b) TV-Röhre mit exponentiell Verteilt Lebensgröße.

$W(X > 1) = 0.95$

$W(X > 10) = ?$

$E_{X\sim}$, $\tau > 0$

$f(x) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau}}$ $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\tau}}$

$W(X > 1) = 1 - W(X \leq 1) = 0.95$

$e^{-\frac{1}{\tau}} = 0.95$

$-\frac{1}{\tau} = \ln(0.95)$

$\tau = \frac{-1}{\ln(0.95)} = 19.4957$

$W(X > 10) = 1 - W(X \leq 10) = e^{-\frac{10}{19.5}} = \underline{\underline{0.599}}$

B c) $\varrho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var X} \cdot \sqrt{Var Y}}$

$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$

$\mathbb{E}\left(\frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{Var X}}\right) = \frac{1}{\sqrt{Var X}} \cdot \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X) = 0$

$\mathbb{E}\left(\frac{Y - \mathbb{E}Y}{\sqrt{Var Y}}\right) = 0$

$\mathbb{E}\left(\left(\frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{Var X}}\right) \cdot \left(\frac{Y - \mathbb{E}Y}{\sqrt{Var Y}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{Var X}\sqrt{Var Y}} \cdot \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y))$

$= \frac{\mathbb{E}(XY - X\mathbb{E}Y - \mathbb{E}XY + \mathbb{E}X\mathbb{E}Y)}{\sqrt{\ldots}}$

$= \frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X\mathbb{E}Y) - \mathbb{E}(\mathbb{E}XY) + \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y}{\sqrt{\ldots}}$

$= \frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y}{\sqrt{Var X} \cdot \sqrt{Var Y}} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var X} \cdot \sqrt{Var Y}}$

Beispiel Bd)

Was ist eine Statistik: Beispiel.

<u>Definition:</u>

Ist $\psi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ messbar und $X_1, \dots, X_n$ eine Stichprobe so heißt $\psi(X_1, \dots, X_n)$ eine k-dimensionale Statistik. wenn $\psi(\cdot)$ nicht von unbekannten Parametern abhängt.

⇒ Statistik die zur Schätzung einer char. Größe der Verteilung von X dient nennt man eine Schätzfunktion.

Bsp:

$$\psi(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\psi(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - X_n)^2$$

Beispiel Be)

Gegeben Konfidenzintervall für ein SP des Umfangs n für den Mittelwert μ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz.
Wie viel größer muss der Umfang sein um die Hälfte kleiner wird.

$$\underbrace{\left[\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} \; ; \; \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]}$$

$$a_1 \quad l = \bar{X}_n - \bar{X}_n + \frac{2 \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$l_1 = 2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{l_2}{l_1} = 2 = \frac{\frac{2 \cdot \sigma}{\sqrt{m}} \cdot \cancel{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}}{\frac{2 \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \cdot \cancel{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}} \qquad 2 = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$$

$$2\sqrt{n} = \sqrt{m}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{m = 4 \cdot n}}$$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma_0^2 / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

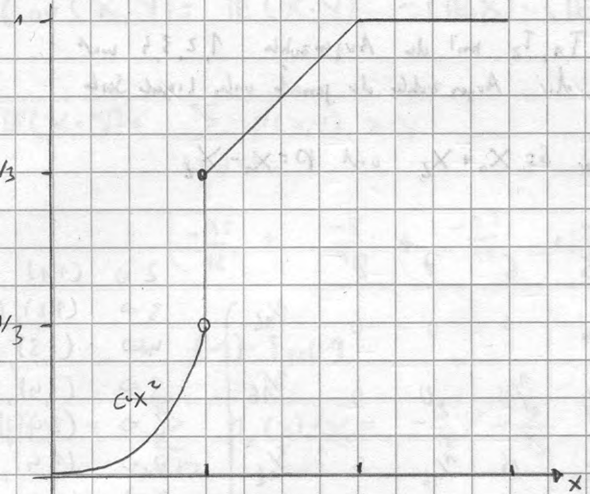
$$W\left\{ u_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma_0^2/\sqrt{n}} \le u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$W\left\{ -\bar{X}_n + \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}} \le -\mu \le u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{n}} - \bar{X}_n \right.$$

$$W\left\{ \bar{X}_n - \frac{\sigma_0^2 \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X}_n + \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\} = 1 - \frac{\gamma}{2}$$

Test 13.10.1999)

A1) Verteilungsfunktion einer SG X



a) Die Verteilung ist eine gemischte Verteilung.

$$F(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{für } 0 \le x < 1 \\ \frac{2}{3} & \text{für } x = 1 \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(x-1) & \text{für } 1 \le x < 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Dichte (diskret) $p(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{für } x=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$f_1^*(x) = \frac{d}{dx} cx^2 = 2cx \;\Big|\; c = \frac{1}{3} = \frac{2}{3} x \cdot 1_{(0,1)}(x)$$

$$f_2^*(x) = \frac{1}{3} \cancel{x} \cdot 1_{(1,2)}(x)$$

b) $$\mathbb{E}X = \sum_{p(x)>0} p(x) \cdot x + \int_0^\infty f_1^*(x) \cdot x \, dx + \int_0^\infty f_2^*(x)\, x \, dx$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{3} + \int_0^1 \frac{2}{3} x^2 dx + \int_1^2 \frac{1}{3} x \, dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} x^3 \Big|_0^1 + \frac{1}{6} x^2 \Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{19}{18} = 1.05556$$

$$\mathrm{Var}\, X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{p(x)>0} p(x) x^2 + \int_0^1 \frac{2}{3} x^3 dx + \int_1^2 \frac{1}{3} x^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{12} + \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \cancel{5/6}\ 1.2778$$

$$= \cancel{-0.28}\ 0.16358$$

c) $F(x)$ für $x > \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(x-1) = 0.75 \Rightarrow x = \underline{\underline{1.25}}$

$$\mathbb{E}(\sqrt{X}) = \sum_{p(x)>0} p(x)\cdot\sqrt{x} + \int_0^1 \frac{2}{3}x\cdot\sqrt{x}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{3}\sqrt{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{4}{15} = 1.00632$$

Beispiel 2) Zwei regelmäßige Tetraeder T_1, T_2 mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4 werden geworfen. X_1, X_2 seien die Augenzahlen der jeweils unten liegenden Seite.

a) Gemeinsame Verteilung von $S = X_1 + X_2$ und $D = X_1 - X_2$

$D \backslash S$	2	3	4	5	6	7	8	$p_D(x)$
−3	0	0	0	1/16	0	0	0	1/16
−2	0	0	1/16	0	1/16	0	0	2/16
−1	0	1/16	0	1/16	0	1/16	0	3/16
0	1/16	0	1/16	0	1/16	0	1/16	4/16
1	0	1/16	0	1/16	0	1/16	0	3/16
2	0	0	1/16	0	1/16	0	0	2/16
3	0	0	0	1/16	0	0	0	1/16
$p_S(x)$	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16	

Randverteilung von S

Randverteilung von D

2 ⇒ (1,1) ⇒ (0)
3 ⇒ (1,2), (2,1) ⇒ (−1, 1)
4 ⇒ (1,3), (2,2), (3,1) ⇒ (−2, 0, 2)
5 ⇒ (1,4), (2,3), (3,2), (4,1) ⇒ (−3, −1, 1, 3)
6 ⇒ (2,4), (3,3), (4,2) ⇒ (−2, 0, 2)
7 ⇒ (3,4), (4,3) ⇒ (−1, 1)
8 ⇒ (4,4) ⇒ (0)

~~Satz:~~

Satz:

Zwei stochastische Größen X und Y heißen unabhängig wenn für ihre gemeinsame Verteilung G(·) gilt

$G(x,y) = F_1(x)\cdot F_2(x)$

Sie ist gleichbedeutend mit dem Fall

$p(x,y) = p_1(x)\cdot p_2(y) \quad \forall (x,y)$

$f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y) \quad \forall (x,y)$

b) Sie sind nicht unabhängig, da gilt

$$p(0,4) \neq p_D(0)\cdot p_S(4) = \frac{4}{16}\cdot\frac{3}{16} = \frac{12}{16} = \underbrace{\frac{3}{4} \neq \frac{1}{16}}$$

2c) Zeigen Sie, dass S und D unkorreliert sind.

$\Rightarrow Cov(S,D)=0$

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(X\cdot Y) - (\mathbb{E}X)\cdot(\mathbb{E}Y)$$

$$\mathbb{E}(X\cdot Y) = \sum_{(x,y)\in M_X} p(x,y)\cdot x\cdot y$$

$$= \left(\frac{-15}{16} + \frac{-8}{16} + \frac{-12}{16} + \frac{-3}{16} + \frac{-5}{16} + \frac{-7}{16}\right) \text{ Teil 1}$$

$$+ (-1)\cdot \text{Teil 1} \qquad = 0$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in M_X} p_x(x)\cdot x = \cancel{-\frac{3}{16}} \cancel{-\frac{4}{16}} \cancel{-\frac{3}{16}} + \cancel{\frac{3}{16}} + \cancel{\frac{4}{16}} + \cancel{\frac{3}{16}} = 0$$

$\Rightarrow Cov(S,D)=0$

3a) Zwei unabhängige Stichproben von Normalverteilungen. $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

a)

I	101	91	95	94	97	105	106	103	100	98	$n=10$
II	90	94	100	96	93	89	97	93			$m=8$

I) $\overline{X}_n = 99$

$s_n^2 = 24$

II) $\overline{X}_m = 94$

$s_m^2 = 13.1429$

d) $T = \dfrac{S_n^2}{S_m^2}$

H_0 verwerfen wenn $\dfrac{S_n^2}{S_m^2} \notin \left(F_{m-1,n-1,\frac{\alpha}{2}}, F_{m-1,n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right)$

$\alpha = 0.05$

$\notin \left(F_{7,9,0.025}, F_{7,9,0.975}\right) = (\ ? \ , 4{,}8232)$

$1.826 \in (\_, 4{,}8232) \Rightarrow$ nicht verwerfen

e) $\alpha = 0.05$

$$\left|\frac{\overline{X}_m - \overline{X}_n}{\sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{(m-1)\cdot s_m^2 + (n-1)\cdot s_n^2}{m+n-2}}}\right| = 2.47644$$

$t_{16,0.975} = 2.120$ $\qquad \alpha = \{H_0 \text{ verwerfen} \mid H_0 \text{ richtig}\}$

$t_{16,0.995} = 2.921$

Für $\alpha = 0.05$ verwerfen. Für $\alpha = 0.01$ behalten. Ist logisch. Wenn ich niemals oder weniger oft die Null verwerfen will muss ich mehr behalten.

B6) 10 Knöpfe an einem Zigarettenautomat.

- Ein Knopf funktioniert nie
- Zwei Knöpfe funktionieren die Hälfte der Zeit
- Die restlichen funktionieren immer.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben sie den nie funktionierenden Knopf gedrückt.

Zerlegen: $H_1 =$ Defekter Knopf

$H_2 =$ Halb funktionierender Knopf

$H_3 =$ Funktionierender Knopf

$W(N|H_1) = 1$ $\qquad W(H_1) = \frac{1}{10}$

$W(N|H_2) = \frac{1}{2}$ $\qquad W(H_2) = \frac{2}{10}$

$W(N|H_3) = 0$ $\qquad W(H_3) = \frac{3}{10}$

$$W(N) = \sum_{k=1}^{n} W(H_k) \cdot W(N|H_k)$$

$$W(H_i|N) = \frac{W(H_i) \cdot W(N|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} W(H_k)\, W(N|H_k)} = \frac{\frac{1}{10} \cdot 1}{\frac{1}{10} + \frac{2}{20}} = \frac{1}{2}$$

b) TV-Gerät enthält Bildröhre deren Lebensdauer exponentiell verteilt ist mit Mittel 10000 Stunden. Das Gerät ist durchschnittlich 6 Stunden pro Tag in Betrieb. Mit welcher Wahrscheinlichkeit geht es in den ersten 5 Jahren keine Ausfälle

$$X \sim Ex_T = \frac{1}{T} \cdot e^{-\frac{x}{T}}$$

$$W\{X > 365 \cdot 5 \cdot 6\} = 1 - F(\underbrace{365 \cdot 5 \cdot 6}_{10950}) = 1 - 1 + e^{-\frac{x}{10000}}\Big|_{x=10950}$$

$$= \underline{\underline{0.33454}}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{10000}}$$

c) Ein File mit 10000 Zeichen wird von einem Computer an einen anderen übertragen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zeichen defekt ist, ist 0.001

$$X \sim B_{Np} = B_{10000,\, 0.0001}$$

$$W(X \geq k) = 1 - W(X < k) = 1 - \sum_{k=0}^{9} W(X=k)$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{9} \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= 0.542$$

Übung Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie 16.1.2001

Beispiel 8d)

Ermitteln und skizzieren Sie das Ergebnis der Faltung von zwei unabhängig auf $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ diskret verteilten Größen

$$W\{X+Y=k\} = \sum_{x+y=k} p(x) \cdot p(y)$$

$$= \sum_{x=0}^{k} p(x)\, p(k-x)$$

k	$W(X+Y=k)$
0	1/16
1	2/16
2	3/16
3	4/16
4	3/16
5	2/16
6	1/16

(0,0) $= 4^2 = 16$
(0,1) (1,0) =
(0,2), (1,1), (2,0)
(0,3), (1,2), (2,1), (3,0)
(1,3), (2,2), (3,1)

Beispiel 8c)

$X_1, \dots, X_n$ aus einer normal verteilten SG, $X \sim N(\mu_0, \sigma^2)$. Welche Schätzer sind unverzerrt

<u>Satz:</u> Eine Schätzfunktion $d(X_1, \dots, X_n)$ heißt unverzerrt oder erwartungstreu für eine Größe ξ falls gilt

$$\mathbb{E}\, d(X_1, \dots, X_n) = \xi \quad \text{für alle möglichen Verteilungen von } X$$

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}(X_i - \mu_0)^2}_{\mathrm{Var}\, X_i} = \mathrm{Var}\, X_i$$

1 und 4 unverzerrt!

A 1)

Ein Würfel wird dreimal geworfen und X sei die höchste dabei erzielte Augenzahl.

a) Man ermittle und zeichne die Verteilungsfunktion von X

$X = \max(X_1, X_2, X_3)$

$W\{X \leq x\} = W\{X_1 \leq x, X_2 \leq x, X_3 \leq x\}$

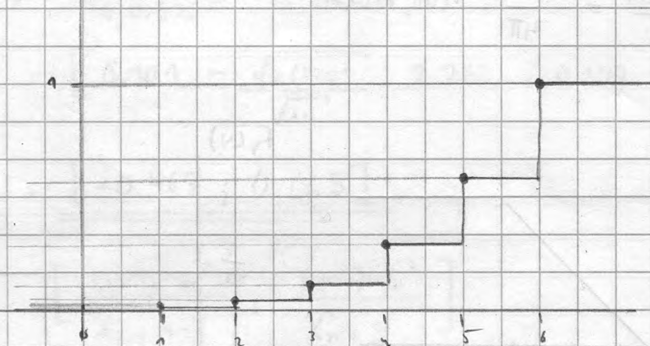
$= W\{X_1 \leq x\} \cdot W\{X_2 \leq x\} \cdot W\{X_3 \leq x\}$

$= F_{X_1}(x) \cdot F_{X_2}(x) \cdot F_{X_3}(x)$

$F_{X_i}(x) = \frac{x}{6}$

$W(X_i = x\} = \frac{1}{6} \cdot 1_{\{1,}$ $\quad F(x) = \sum_{\substack{y \in M_X \\ y \leq x}} p(y)$

$F_X(x) = \left(\frac{x}{6}\right)^3 = \frac{x^3}{6^3}$



p(1) = 4.63E-3

b) Man bestimme den Mittelwert und die Varianz von X

$W(X = x) = W\{X \leq x\} - W\{X < x\}$

$W(X = x) = \frac{x^3}{6} - \frac{(x-1)^3}{6}$ für $0 < x \leq 6$, $x \in \mathbb{N}$

$= \frac{x^3 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)}{6^3} = \frac{3x^2 - 3x + 1}{6^3}$

$\mathbb{E}X = \sum_{x \in M_X} p(x) \cdot x = 4.95833$

$\mathrm{Var}\,X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = 25.8935 - (4.95833)^2 = \underline{1.30845}$

$\mathbb{E}X^2 = \sum_{x \in M_X} p(x) \cdot x^2 = 25.8935$

A2) Der Radius eines Kreises sei eine im Intervall [2,4] uniform verteilt stochastische Größe. Bestimmen Sie für den Kreisumfang

a) Verteilungsfunktion und die Dichte

$$X \sim U_{2,4}$$

$$Y = \psi(X) \quad \text{mit} \quad \psi(X) = 2\pi X$$

$$W\{Y \le x\} = W\{\psi^{-1}(Y) \le \psi^{-1}(x)\} = W\{X \le \psi^{-1}(x)\}$$

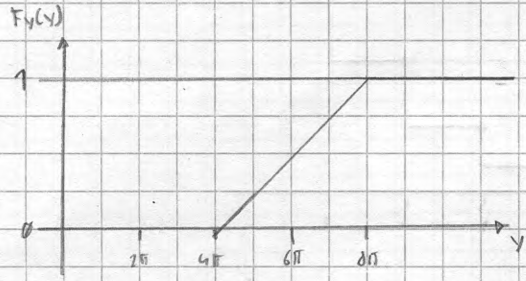
$$\Rightarrow F_Y(x) = F_X(\psi^{-1}(x)) \qquad \psi^{-1} = \frac{1}{2\pi}$$

$$f_X = \frac{1}{2}\cdot 1_{(2,4)}(x) \quad F_X(x) = \int_2^x \frac{1}{2}\cdot 1_{(2,4)}(y)\,dy = \frac{1}{2}y\Big|_2^x = \frac{x}{2} - 1 \quad \text{für} \quad 2 \le x \le 4$$

$$F_Y(x) = \frac{x}{4\pi} - 1 \quad \text{für} \quad 4\pi \le x \le 8\pi$$

$$1_{(2,4)}(x) \qquad 1_{(2,4)}\left(\frac{1}{2\pi}\cdot x\right) \quad \to 1 \quad \to 4\pi,\ 8\pi$$

$$f_Y(x) = \frac{dF_Y(x)}{dx} = \frac{1}{4\pi}\cdot 1_{(4\pi,8\pi)}(x)$$



b) Erwartungswert und Varianz

$$\mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\cdot y\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\frac{1}{4\pi}\cdot 1_{(4\pi,8\pi)}(y)\,dy = \frac{y^2}{8\pi}\Big|_{4\pi}^{8\pi} = \frac{(8\pi)^2}{8\pi} - \frac{(4\pi)^2}{8\pi}$$

$$= 8\pi - \frac{16\pi^2}{8\pi} = 8\pi - 2\pi = \underline{\underline{6\pi}} = \underline{\underline{18.85}}$$

$$\mathrm{Var}\,Y = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 =$$

$$\mathbb{E}\cancel{X}^2 = \int_{4\pi}^{8\pi} \cancel{x}^2\cdot\frac{1}{4\pi}\,dy = \frac{y^3}{12\pi}\Big|_{4\pi}^{8\pi} = \frac{112\cdot\pi^2}{3}$$

$$\mathrm{Var}\,Y = \frac{112\pi^2}{3} - (6\pi)^2 = \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi^2}} = 13.16$$

c) 90% Quantil

$$u_{0.9} = F(u_{0.9}) = 0.9 = \frac{x}{4\pi} - 1 \qquad x = 1.9\cdot 4\cdot\pi = \underline{\underline{23.8761}}$$

Beispiel 3)

Zehn Beobachtungen einer Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ ergaben

0.62 0.79 0.94 −0.99 0.21 0.23 −1.00 −0.74 1.08 −0.13

a) $\hat{\mu} = \bar{x}_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = 0.101$ $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2 = 0.5598$

$\hat{\sigma}^2 = s_n^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2 = 0.62201$ (Unverzerrt)

b) 95% - Konfidenzintervalle für μ und σ

μ: $\left[\bar{x}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} ; \bar{x}_n + \frac{s_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \right]$

$\alpha = 0.05$

$t_{9, 0.975} = 2.262$

$= \left[0.101 - \frac{\sqrt{0.62201}}{\sqrt{10}} \cdot 2.262 ; 0.101 + \frac{\sqrt{0.62201}}{\sqrt{10}} \cdot 2.262 \right]$

$= \underline{\underline{[-0.463 ; 0.665]}}$

σ^2: $\left[\frac{(n-1) \cdot s_n^2}{\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}} , \frac{(n-1) \cdot s_n^2}{\chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}} \right]$

$\chi^2_{9, 0.975} = 19.02$ $\chi^2_{9, 0.025} = 2.7$

σ^2: $\left[\frac{9 \cdot 0.62201}{19.02} ; \frac{9 \cdot 0.62201}{2.7} \right]$

$\underline{\underline{\sigma = [0.5425 ; 1.44]}}$

c) Stimmt die Vermutung das $\mu = 0.5$

Ja. Da μ in dem Konfidenzintervall ist. Die Hypothese wird behalten für $\alpha = 0.05$

d) Stimmt die Vermutung das $\sigma = 1$

Ja. Da σ in dem Konfidenzintervall ist. Die Hypothese wird behalten für $\alpha = 0.05$

30) Krankheit tritt bei 1000 Personen im Schnitt 5-mal auf.

Test erkennt bei erkrankten Personen die Krankheit mit 98%.
Bei nicht erkrankten Personen liefert der Test in 3% der Fälle ein falsches Ergebnis.

Wahrscheinlichkeit dass eine Person krank ist bei positivem Test.

T^+ ... positiver Test
T^- ... negativer Test
K ... krank
$\neg K$ ... nicht krank

$$W(K|T^+) = \frac{W(K \cap T^+)}{W(T^+)} = \frac{W(K) \cdot W(T^+|K)}{W(K) \cdot W(T^+|K) + W(\neg K) \cdot W(T^+|\neg K)}$$

$$= \frac{W(K \cap T^+)}{W(T^+|K) + W(T^+|\neg K)}$$

$$=$$

$$W(K) = \frac{1000 \cdot 0.05}{1000} = 0.05$$

$$= \frac{W(K) \cdot W(T^+|K)}{W(K) \cdot W(T^+|K) + W(\neg K) \cdot W(T^+|\neg K)}$$

$$= \frac{0.005 \cdot 0.98}{0.005 \cdot 0.98 + 0.995 \cdot 0.03} = \underline{\underline{0.1467}}$$

Das Problem ist dass der Test in 3% aller Fälle ein Ergebnis T^+ liefert obwohl die Leute nicht krank sind. Da die Krankheit aber nur mehr einen nur einen kleinen Teil der Bevölkerung betrifft ist der Anteil der nicht kranken relativ groß.

$W(\neg K) \cdot W(T^+|\neg K)$ ist auch groß

Lösung: Negativ Falsch Ergebnisse für T^+ reduzieren oder wiederholen.

Übung Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie 17.1.2004

B b) Die Lebensdauer eines Bauteiles sei eine exponential verteilte stochastische Größe mit Mittelwert 90 h. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit mit der ein solches Bauteil das bereits 5 Tage gearbeitet hat auch noch 7 Tage noch arbeitet

$$W(X>7 \mid X \geq 5) = \frac{W(X>7 \cap X \geq 5)}{W(X \geq 5)} = \frac{W(X>7)}{W(X \geq 5)}$$

$$W(X>x) = e^{-\frac{x}{T}}$$

$$W(X>7 \mid X>5) = 0.5886$$

B c) Für eine Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ gilt, daß das 10% Quantil gleich 12.7 und das 90% Quantil gleich 14.5 ist. Bestimme Sie μ und σ

$$u_p = \frac{x_p - \mu}{\sigma}$$

$$\begin{cases} u_{0.1} = \dfrac{x_{0.1} - \mu}{\sigma} \\ u_{0.1} = -u_{0.9} = \dfrac{-x_{0.9} - \mu}{\sigma} \\ u_{0.9} = \dfrac{x_{0.9} - \mu}{\sigma} \end{cases}$$

$$u_{0.1} - u_{0.9} = \frac{x_{0.1} - \mu}{\sigma} - \frac{x_{0.9} - \mu}{\sigma}$$

$$u_{0.1} - u_{0.9} = \frac{x_{0.1} - x_{0.9}}{\sigma}$$

$$\sigma = \frac{x_{0.1} - x_{0.9}}{u_{0.1} - u_{0.9}} = \frac{12.7 - 14.5}{-2u_{0.9}} = \frac{12.7 - 14.5}{-2 \cdot \cancel{0.8159}\ 1.28}$$

$$\sigma = \underline{\underline{0.703125}}$$

$$x_p - u_p \cdot \sigma = \mu$$

$$\mu = \underline{\underline{13.6}}$$

B d) $\alpha = W\{H_0 \text{ verwerfen} \mid H_0 \text{ richtig}\}$

H_0 richtig $B_{20, \frac{1}{2}}$ für Gesamtversuch

$$W\{5 \leq X \leq 15\} = W\{X \leq 15\} - W\{X < 5\}$$

$$= 0.988182 = 1 - \alpha$$

$$\alpha = \underline{0.011818}$$

Be) Ist $X_1, \ldots, X_n$ eine ∞ Folge von unabhängigen stochastischen Größen mit existierenden Varianzen und erfüllen die Verteilungsfunktionen die Lindeberg-Bedingung so gilt für die Folge der standardisierten Summen

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sqrt{\operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_n\right)}}$$

$$Z_n \sim N(0,1)$$

Bsp: B_{np}: $\mathbb{E}X = n \cdot p$

$\operatorname{Var} X = np(1-p)$

$$B_{np} \approx N(np, np(1-p))$$

Übungen Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie 16.1.2006

A1) Eine stochastische Größe X nimmt mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ den Wert 1 an. Der Rest ist uniform im Intervall $(1,3)$ verteilt.

a) Ermitteln und zeichnen die Verteilungsfunktion:

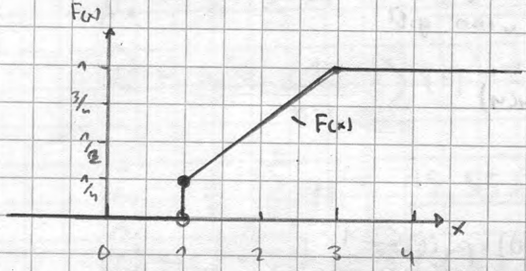
$$f^*(x) = \underbrace{\frac{3}{4}}_{(1-p)} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x-1) \cdot 1_{(1,3)}(x) = \frac{3}{8} \cdot (x-1) \cdot 1_{(1,3)}(x)$$

$$F(x) = \sum_{\substack{x_i \le x \\ p(x_i)>0}} p(x_i) + \int_{-\infty}^{x} f^*(x)\,dx$$

$F(x)$ für $1 \le x \le 3$

$$F(x) = \frac{1}{4} + \int_{1}^{x} \frac{3}{8} \cdot 1_{(1,3)}(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\Big|_{1}^{x} = \frac{1}{4} + \frac{3x}{8} - \frac{3}{8} = -\frac{1}{8} + \frac{3x}{8}$$



b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X

$$\mathbb{E}X = \sum_{\substack{x \in M_X \\ p(x)>0}} p(x)x + \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) \cdot x\,dx$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 1 + \int_{1}^{3} \frac{3}{8} \cdot x\,dx = \frac{1}{4} + \frac{3x^2}{16}\Big|_{1}^{3} = \frac{1}{4} + \frac{3 \cdot 9}{16} - \frac{3}{16} = \underline{\underline{1.75}}$$

$$\text{Var}\,X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$$
$$=$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{\substack{x \in M_X \\ p(x)>0}} p(x)x^2 + \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)x^2\,dx = \frac{1}{4} \cdot (1)^2 + \int_{1}^{3} \frac{3}{8} x^2\,dx = \frac{1}{4} + \frac{3x^3}{24}\Big|_{1}^{3} = \underline{\underline{3.5}}$$

$$\rightarrow \text{Var}\,X = 3.5 - (1.75)^2 = \underline{\underline{0.4375}}$$

c) Bestimmen den Median der Verteilung

$$W\{X \le u_{0.5}\} = 0.5 \qquad -\frac{1}{8} + \frac{3 \cdot u_{0.5}}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \underline{\underline{1.\dot{6}}}$$

A2) Gegeben 2-dim diskrete Verteilung eines stochastischen Vektors (X, Y)

$Y \backslash X$	0	1	2	$p_Y(y)$
0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$1/4$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$1/2$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$1/4$
$p_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

a) Sol:

Gilt für die gemeinsame Verteilungsfkt. G von X, Y wobei X die VF $F(\cdot)$ hat und Y die VF $H(\cdot)$

$$G(\cdot) = F(\cdot) \cdot H(\cdot)$$

so heißen X und Y unabhängig $X \perp\!\!\!\perp Y$. Dies will im diskreten Fall gleich bedeuten wenn gilt

$$p(x,y) = p_x(x) \cdot p_y(y)$$

$\Rightarrow$ Gilt nicht:

$$p(0,0) = 0 \neq p_x(0) \cdot p_y(0) = \frac{1}{16}$$

b) Berechne den Korrelation von X und Y

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var X} \cdot \sqrt{Var Y}} = \frac{-0.25}{\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{0.5}} = \underline{\underline{-0.5}}$$

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$$

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \sum_{(x,y) \in \Omega_x} x \cdot y \; p(x,y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{8} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8}$$

$$= \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = \underline{\underline{0.75}}$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \Omega_X} p_x(x) \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\mathbb{E}(Y) = 1$$

$$\Rightarrow Cov(X,Y) = 0.75 - 1 = -0.25$$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{3}{2} - (1)^2 = \frac{1}{2} = \underline{\underline{0.5}}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x \in \Omega_x} p(x) \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot (1)^2 + \frac{1}{4} \cdot (2)^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \frac{3}{2}$$

$$Var(Y) = \frac{1}{2} = \underline{\underline{0.5}}$$

A2) c) $\mathbb{E}(X+Y)$ und $Var(X-Y)$

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 2$$

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) - 2\,Cov(X,Y)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 \cdot (-0.25) = \underline{\underline{1.5}}$$

A3) Die folgenden Daten stammen aus unabhängigen Normalverteilungen $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ bzw. $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$

x	7.61	11.01	11.78	8.55	10.40	11.82		
y	16.01	19.34	16.00	15.82	12.91	14.71	15.11	12.75

$n = 6$
$m = 8$

a) Schätzwerte für alle Parameter:

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \underline{10.195}$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = s_n^2 = \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2 = \underline{3.04947} \quad \text{(unverzerrt)}$$

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} y_i = \underline{15.4563}$$

$$\hat{\sigma}_y^2 = s_m^2 = \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{m}(y_i - \bar{y}_1)^2 = \underline{3.74423}$$

b) Test auf Gleichheit der Varianzen:

$$T = \frac{S_x^2}{S_y^2}$$

H_0 verwerfe falls für zwei Varianzen SP $X_1, \dots, X_n$ und $Y_1, \dots, Y_m$ gilt

$$\frac{s_x^2}{s_y^2} \notin \left(F_{n-1,m-1,\frac{\alpha}{2}}, F_{n-1,m-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$F_{5,7,0.05} = \frac{1}{F_{7,5,0.95}} = 0.205 \quad F_{5,7,0.95} = 3.97 \quad \text{mit} \quad F_{m,n,p} = \frac{1}{F_{n,m,1-p}}$$

$$\frac{n \leftarrow S_x^2}{m \leftarrow S_y^2} = 0.8144 \in (0.205, 3.97)$$

$\Rightarrow$ H_0 wird nicht verworfen wobei H_0 die Hypothese ist, dass die Varianzen gleich sind.

c) Test auf Gleichheit der Mittelwerte von X und Y

$$t = \left| \frac{\overline{x}_m - \overline{y}_n}{\sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{(m-1)\cdot s_m^2 + (n-1)\cdot s_n^2}{m+n-1}}} \right|$$

$m = 6$ $\overline{x}_m = 10.195$ $s_m^2 = 3.04947$

$n = 8$ $\overline{y}_n = 15.5563$ $s_n^2 = 3.74927$

$t = 5.45535$

$t_{m+n-2, 1-\frac{\alpha}{2}} = t_{12, 0.975} = 2.179$

$5.45 > 2.179$. Die Hypothese H_0 wird verworfen.

B0) Bonbons werden in vier Produktionslinien A_1, A_2, A_3, A_4 in Schachteln verpackt. Ein kleiner Prozentsatz wird falsch verpackt.

1% bei A_1, 3% bei A_2, 2.5% bei A_3, 2% bei A_4

Das Verhältnis der Produktion ist 35 : 20 : 24 : 21. Aus welcher Maschine stammt eine Fehlerhafte Packung am Wahrscheinlichsten

$$W(A_1|D) = \frac{W(A_1 \cap D)}{W(D)} = \frac{W(D|A_1)\cdot W(A_1)}{\sum_{i=1}^{4} W(D|A_i)\cdot W(A_i)}$$

$W(D|A_1)\cdot W(A_1) = 0.01 \cdot 0.35 = 0.0035$

$W(D|A_2)\cdot W(A_2) = 0.03 \cdot 0.2 = 0.006$

$W(D|A_3)\cdot W(A_3) = 0.025 \cdot 0.24 = 0.006$

$W(D|A_4)\cdot W(A_4) = 0.02 \cdot 0.21 = 0.0042$

$ 0.0197$

$W(A_1|D) = \frac{0.0035}{0.0197} = \underline{0.177665}$

$W(A_2|D) = \frac{0.006}{0.0197} = \underline{0.304569}$

$W(A_3|D) = \frac{0.006}{0.0197} = 0.304569$

$W(A_4|D) = \frac{0.0042}{0.0197} = 0.213198$

Aus A_2 oder A_3

Beispiel B8)

Simulieren von Beobachtung einer stochastischen Größe mit Dichte

$f(x) = 4x^3$ mit $0 < x < 1$

X hat VF $F(\cdot)$

F^{-1} bilde $Y \sim U_{0,1}$

$F^{-1}(Y) = ?$

$W\{F^{-1}(Y) \leq x\} = W\{Y \leq F(x)\}$ $= F(x)$

$Y \sim U_{0,1}$ $\Rightarrow$ Y hat VF $F_Y(y) = y$

$F_X(x) = \int_0^x 4t^3 \cdot dt = \cancel{4} x^4$

$F^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$

Man erzeugt $U_{0,1}$ verteilt Zufallszahl Y. Darauf wendet man $F^{-1}(\cdot)$ an und erhält dann eine neue stochastische Größe X' welche wie X verteilt ist.

Bc) Der Radius eines Kreises sei eine im Intervall $(0,10)$ stetig uniform verteilte stochastische Größe. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Kreisfläche

$\psi(r) = r^2 \pi$

$Y = \psi(X)$

$\mathbb{E}Y = \int_0^{10} \psi(x) \cdot f_X(x)\, dx = \int_0^{10} x^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{10}\, dx = \frac{\pi}{10} \int_0^{10} x^2\, dx = \frac{\pi}{30} \cdot x^3 \Big|_0^{10}$

$= \underline{\underline{104{,}72}}$

8d) DS .. Durchmesser Schraube $\sim N(8, 0.01)$

DM .. Durchmesser Mutter $\sim N(8.2, 0.01)$

$Y = DM - DS$ ist neue stochastische Größe

$$W\{0.1 \le Y \le 0.3\} = ?$$

$$Y \sim N(8.2 - 8.0,\ 0.02) = N(0.2,\ 0.02)$$

$$W\{0.1 \le Y \le 0.3\} = W\{Y \le 0.3\} - W\{Y \le 0.1\}$$

$$= \Phi\left(\frac{0.3-0.2}{\sqrt{0.02}}\right) - \Phi\left(\frac{0.1-0.2}{\sqrt{0.02}}\right)$$

$$= \Phi(0.707) - \Phi(-0.707)$$

$$= \Phi(0.707) - (1 - \Phi(0.707))$$

$$= 2\,\Phi(0.707) - 1 = 2 \cdot 0.7794 - 1 = \underline{\underline{0.5222}}$$

e) Was ist und wozu dient die Faltung von zwei Verteilungen?

Für unabhängige stochastische Größen kann man die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Summe mit Hilfe der Faltung berechnen.

$X \sim Ex_\tau$

$Y \sim Ex_\tau$

$$W\{X + Y \le t\} = \iint_{x+y \le t} f(x) \cdot f(y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t-y} f(x) \cdot f(y)\, dx\, dy$$

$y \quad + \quad t-y \qquad 0 \qquad t-0$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(t-y) \cdot f(y)\, dy \qquad \int_{-\infty}^{t}$$

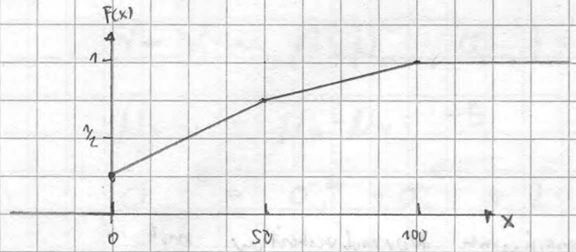
$$h_{x+y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)\, f(x)\, dx \qquad f(x) = \frac{1}{\tau}\, e^{-\frac{x}{\tau}} \cdot 1_{(0,\infty)}(x)$$

$$= \frac{1}{\tau^2} \int_0^t e^{-\frac{(t-x)}{\tau}} \cdot e^{-\frac{x}{\tau}}\, dx = \frac{1}{\tau^2} \cdot \int_0^t e^{\frac{-t+x-x}{\tau}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\tau^2} \cdot \int_0^t e^{-\frac{t}{\tau}}\, dx = \frac{t}{\tau^2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Beispiel 1)

Die Verteilungsfunktion einer nicht negativen stochastischen Größe X ist gegeben durch.



a) Um welchen Verteilungstyp handelt es sich:

Um eine gemischte Verteilung

$$F(x) = \begin{cases} 3/4 + \frac{1}{200} \cdot (x-50) & \text{für } 50 \le x \le 100 \\ 1/4 + \frac{1}{100} \cdot x & \text{für } 0 < x \le 50 \\ 1/4 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

b) Berechnung Mittelwert und Streuung

$$p(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x \ne 0 \end{cases}$$

$$f_1^*(x) = \frac{1}{100} \cdot 1_{(0,50)}(x) \qquad f_2^*(x) = \frac{1}{200} \cdot 1_{(50,100)}(x)$$

$$\mathbb{E}X = \sum_{\substack{x \in M_x \\ p(x) > 0}} p(x) \cdot x + \int_{-\infty}^{\infty} f_1^*(x)\, x\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} f_2^*(x)\, x\, dx$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{4} + \int_0^{50} \frac{1}{100}\, x\, dx + \int_{50}^{100} \frac{1}{200}\, x\, dx$$

$$= \frac{1}{200} x^2 \Big|_0^{50} + \frac{1}{400} x^2 \Big|_{50}^{100} = \underline{\underline{31.25}}$$

$$\text{Var}\, X = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2$$

$$\mathbb{E}X^2 = \sum_{\substack{x \in M_x \\ p(x)}} p(x) x^2 + \int_0^{50} \frac{1}{100} x^2\, dx + \int_{50}^{100} \frac{1}{200} x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{300} x^3 \Big|_0^{50} + \frac{1}{600} x^3 \Big|_{50}^{100} = \underline{\underline{1875}}$$

$$\text{Var}\, X = 1875 - (31.25)^2 = \underline{\underline{898.438}}$$

$$\sigma = +\sqrt{\text{Var}\, X} = \underline{\underline{29.9739}}$$

c) 90% Quantile der Verteilung

$$F(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{200}(x-50) \qquad \text{für} \quad 50 \le x \le 100$$

$$F(x_{0.9}) = 0.9$$

$$0.9 = \frac{3}{4} + \frac{1}{200}(x-50)$$

$$x = \underline{\underline{80}}$$

Beispiel 2) X und Y genügen einer gemeinsamen Normalverteilung mit

$$\mu_x = 20 \qquad \mu_y = 25 \qquad \sigma_x = 3 \qquad \sigma_y = 4 \qquad \rho = 0.6$$

a) Bestimme die Kovarianzmatrix.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 7.2 \\ 7.2 & 16 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen des 10% Quantils von X.

$$u_p = \frac{x_p - \mu_x}{\sigma_x} \qquad \Rightarrow \qquad x_p = u_p \cdot \sigma_x + \mu_x$$

$$W\{X \le x_p\} = p$$

$$\Phi(u_p) = p$$

$$\Rightarrow u_{0.1} = -\Phi(u_{0.9}) \Rightarrow -1.28 = u_{0.1}$$

$$x_{0.1} = -1.28 \cdot 3 + 20 = \underline{\underline{16.16}}$$

c) Bestimme $W(20 < Y \le 25)$

$$W(20 < Y \le 25) = W(Y \le 25) - W(Y \le 20)$$

$$= \Phi\left(\frac{25-25}{4}\right) - \Phi\left(\frac{20-25}{4}\right)$$

$$= \Phi(0) - \Phi\left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$= \Phi(0) - \left(1 - \Phi\left(\frac{5}{4}\right)\right) = -\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$= 0.3944$$

2d) $W(Y>X)$

$$W(Y>X) = W(Y-X>0)$$

$$Y-X \sim N(\mu_{x-y}, \sigma_{x-y}^2)$$

$$\mu_{x-y} = \mu_x - \mu_y = +5$$

$$\sigma_{x-y}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\cdot 1\cdot(-1)\cdot \varrho_{xy}\cdot\sqrt{\mathrm{Var}X}\cdot\sqrt{\mathrm{Var}Y}$$

$$= 9 + 16 - 2\cdot 0.6\cdot 4\cdot 3 = 10.6$$

$$\Rightarrow Y-X \sim N(+5, 10.6)$$

$$W(Y-X>0) = 1 - W(Y-X\leq 0)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{0-(+5)}{\sqrt{10.6}}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{-5}{\sqrt{10.6}}\right) = \cancel{1-}\,\Phi(1.536)$$

$$= \cancel{1-}\,\underline{0.9382} = 0.0618$$

3) Eine stochastische Größe X mit Merkmalraum $M_X = \{0,1,2,\dots\}$ wurde hundert Mal beobachtet

x	0	1	2	3	4	5	≥ 6
Häufigkeit	22	37	20	13	6	2	0

H_0: $X \sim P_\mu$

$e^{\mu x}$ ist EF d. Folge $\left\langle \frac{\mu^k}{k!} \right\rangle$

$$P_\mu \Rightarrow \quad W(X=k) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$

$$\mathbb{E}Y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}\cdot k = e^{-\mu}\cdot\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\frac{\mu^k}{k!} = e^{-\mu}\cdot\mu\cdot e^{\mu} = \underline{\underline{\mu}}$$

$$e^{\mu x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k x^k}{k!} \qquad x\,\mu^2\cdot e^{\mu x} = \sum_{k\geq 1} k\frac{\mu^k}{k!}x^k$$

$$\mu\,\cancel{x}\,e^{\mu x} = \sum_{k\geq 1} k\cdot\frac{\mu^{k-1} x^{k-1}}{k!} \qquad \Rightarrow A(x) = x\cdot\mu\cdot e^{\mu x}$$

$$A(1) = \mu\cdot e^{\mu}$$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{ist unverzerrter Schätzer für } EX_i$$

$$\overline{x}_n = \frac{0\cdot 22 + 1\cdot 37 + 2\cdot 20 + 3\cdot 13 + 4\cdot 6 + 5\cdot 2 +}{22+37+20+13+6+2} = \frac{150}{100} = \frac{3}{2}$$

$n = 100$

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2 = 1.56566$$

X	$Y_j^{(n)}$	$n\cdot w_j$	$(Y_j^{(n)} - n\cdot w_j)^2 / n\cdot w_j$
0	22	22.313	0.004391
1	37	33.4695	0.372412
2	20	25.1021	1.03702
3	13	12.5511	0.016055
4	6	4.70665	0.355402
≥ 5	2	1.85759	0.010517
~~6~~	~~0~~	~~0.445598~~	~~0.445598~~

$\Sigma = \underline{1.7962}$

$$\chi^2_{r-s-1,\,1-\alpha} \Rightarrow \chi^2_{6-1-1,\,0.95} = \chi^2_{4,\,0.95} = 9.49$$

$1.7962 < 9.49 \Rightarrow$ <u>H_0 wird nicht verworfen</u>

B0) System aus drei unabhängigen Komponenten. Arbeitet nur dann korrekt wenn alle funktionieren.

$\tau_1 = 10000h$, $\tau_2 = 20000h$, $\tau_3 = 40000h$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit arbeitet das System länger als 1000h

$$\begin{aligned}
W(\min(X_1, X_2, X_3) > t) &= W(X_1 > t,\ X_2 > t,\ X_3 > t) \\
&= W(X_1 > t)\, W(X_2 > t)\ W(X_3 > t) \\
&= (1 - W(X_1 \leq t)) \cdot (1 - W(X_2 \leq t))(1 - W(X_3 \leq t)) \\
&= \prod_{i=1}^{3} (1 - F_i(t))
\end{aligned}$$

$$F_i(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \Rightarrow 1 - F_i(t) = e^{-\frac{t}{\tau_i}}$$

$$= e^{-t\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3}\right)} =$$

$$= \underline{\underline{0.839}}$$

B b) X sei eine stochastische Größe mit Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \qquad x \geq 0$$

Wie sind nach $U_{(0,1)}$ verteilte Zufallszahlen u zu transformieren um wie X verteilte Zufallszahlen zu bekommen.

$$F^{-1}(x) = ?$$

$$y = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$1 - y = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$x+1 = \frac{1}{\sqrt{1-y}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-y}} - 1$$

$$F^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1$$

$$Y = F^{-1}(Z)$$

$$W\{Y \leq x\} = W\{F^{-1}(Z) \leq x\} = W\{Z \leq F(x)\} = \underline{F(x)}$$

$$Z \sim U_{0,1}$$

B c) $X_1, \ldots, X_n$ sei eine Stichprobe einer Normalverteilung mit Mittel μ und Standardabweichung σ. Welche der folgenden Aussagen sind für das Stichprobenmittel $\overline{X}_n$ korrekt.

$$\mathbb{E}\overline{X}_n = \mathbb{E}X_i = \mu$$

$$\mathrm{Var}\,\overline{X}_n = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \mathrm{Var}\left(\sum X_i\right) = \frac{1}{n} \cdot \mathrm{Var}\,X_i = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\Rightarrow \overline{X}_n \sim \underline{N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)}$$

Bd) Definition:

Eine stochastische Größe die eine Funktion $q(X_1, \dots, X_n, \Theta)$ einer Stichprobe von $X \sim W_\Theta$, $\Theta \in \Theta$ und des Parameters Θ ist, deren Verteilung nicht von Θ abhängig ist heißt Pivot-Größe

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}} \sim N(0,1)\ t_{n-1}$$

$$\frac{(n-1)\cdot S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$$

Mit ihr kann man Konfidenzintervalle konstruieren.

Bc) Die folgenden Beobachtungen stammen von einer Normalverteilung

-0.01 -0.03 0.00 0.02 -0.02 -0.03 0.00 -0.01 -0.01 -0.04

Ist der Mittelwert der Verteilung Null ($\alpha = 5\%$)

H_0: $\mu = 0$

$$\frac{|\overline{x}_n - \mu_0|}{s_n/\sqrt{n}} = \frac{0.013}{0.01767/\sqrt{10}} = 23.2654$$

$$\overline{x}_n = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} x_i = -0.013$$

$$s_n^2 = \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{10} (x_i + 0.13)^2 = 0.000312$$

$s_n = 0.01767$

$t_{9,0.975} = 2.262$

$2.32654 > 2.262 \Rightarrow H_0$ verwerfen.

A1) Für eine stochastische Größe X gilt:

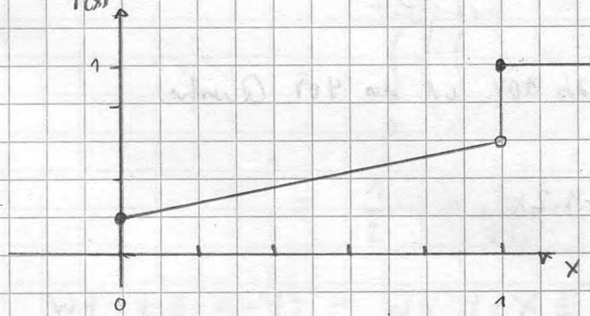
$$W\{X=0\} = \frac{1}{5} \qquad W\{X=1\} = \frac{2}{5}$$

Der Rest der Verteilung ist im Intervall $(0,1)$ kontinuierlich verteilt.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{für } x=0 \\ \frac{2}{5} & \text{für } x=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad f^*(x) = \frac{2}{5} \cdot 1_{(0,1)}(x)$$

a) Ermitteln und zeichnen der Verteilungsfunktion

$$F(x) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}x \quad \text{für } 0 \le x < 1$$
$$= 1 \quad \text{für } 1 \le x < \infty$$



b) Berechnen sie $\mathbb{E}(X)$

$$\mathbb{E}X = \sum_{p(x)>0} p(x) \cdot x + \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\, x\, dx$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} + \int_0^1 \frac{2}{5} x\, dx$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{3}{5}$$

c) Berechnen sie Var X

$$\text{Var}\, X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{p(x)>0} p(x) x^2 + \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) x^2\, dx$$

$$= \left(0^2 \cdot \frac{1}{5}\right) + 1^2 \cdot \frac{2}{5} + \int_0^1 \frac{2}{5} x^2\, dx$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{2}{15} = \frac{8}{15}$$

$$\text{Var}\, X = \underline{\underline{0.1733}}$$

A2) Die folgende 13 Werte sind Messung eines Parameters für die Qualität von Wasser:

47 53 61 57 65 44 56 52 63 58 49 51 54

Unter der Voraussetzung normalverteilter Beobachtungen $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

a) Plausible und unverzerrte Schätzwerte von μ und σ^2

$$\left.\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = 54.6154 \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu})^2 = 38.5897 \end{aligned}\right\} \text{unverzerrt}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\mu} &= 54.6154 \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu})^2 = 35.6213 \end{aligned}\right\} \text{plausibel}$$

b) Ermitteln von Schätzwerten für das 10% und das 90% Quantil der Verteilung

$u_{0.9} = 1.28 \qquad u_{0.1} = -1.28$

$$u_p = \frac{x_p - \mu}{\sigma}$$

$$x_p = u_p \cdot \sigma + \mu$$

$x_{0.9} = 1.28 \cdot \sqrt{35.6213} + 54.6154 = \underline{\underline{62.2549}}$

$x_{0.1} = -1.28 \cdot \sqrt{35.6213} + 54.6154 = \underline{\underline{46.9759}}$

c) Ermitteln Sie 95% Konfidenzintervall für μ + σ

μ: $t_{13-1,\, 1-\frac{0.05}{2}} = t_{12;\, 0.975} = 2.179$

$$\left[\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1;\, 1-\frac{\alpha}{2}} \; ; \; \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,\, 1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

$[50,8612 \; ; \; 58.3696]$

σ^2: $\chi^2_{n-1,\, 1-\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{12,\, 0.975} = 23.34$

$\chi^2_{n-1,\, \frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{12,\, 0.025} = 4.4$

$$\left[\frac{(n-1) \cdot S_n^2}{\chi^2_{n-1,\, 1-\frac{\alpha}{2}}} \; ; \; \frac{(n-1) \cdot S_n^2}{\chi^2_{n-1,\, \frac{\alpha}{2}}} \right]$$

$[19.8405 \; ; \; 105.245]$

σ: $[4.454 \; ; \; 10.259]$

Übung Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie

Bsp) Zwei Personen kommen unabhängig im Zeitintervall $[0,T]$ zu einem vereinbarten Treffpunkt. Die zuerst eintreffende Person wartet auf die andere. Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss keiner länger als t warten

$$W\{|X-Y| \le t\} = W\{-t \le X-Y \le t\}$$

$$W\{X-Y \le t\} = \iint_{x-y\le t} f(x)\cdot f(y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{t+y} f(x)\cdot f(y)\,dx\,dy$$

$t=3 \qquad y=2 \qquad x \Rightarrow (0,\ 3-2)$

$$= \int_0^{T-t}\left(\int_0^{t+y} f(x)\,dx\right) f(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{t^2}{2 t y^2}$$

$T-t$

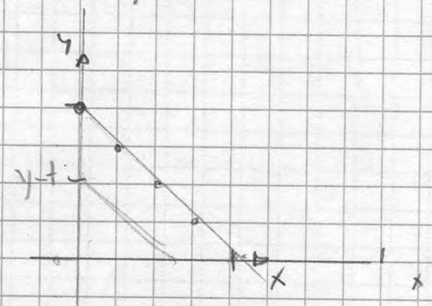
$(t,\ T-t) \qquad T-(T-t) = t$

$$W\{-t \le X-Y\} = W\{Y-X \le t\}$$

$$= \iint_{y-x\le t} f(x)\cdot f(y)\,dx\,dy$$

$x = y+t \qquad y-t \le x$

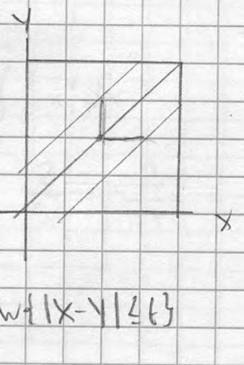
$$= \int_t^{T}\int_{y-t}^{\infty} f(x)\cdot f(y)\,dx\,dy$$

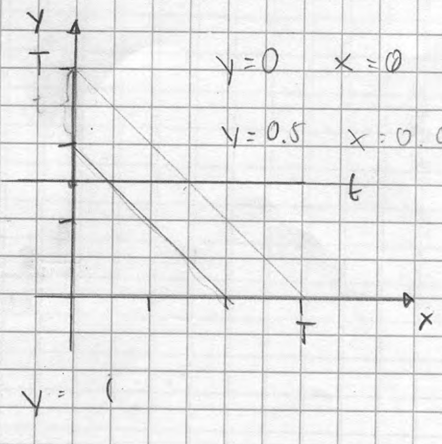


$T \qquad T-t$

$$\Rightarrow W\{X-Y \le t\} = \frac{(t-T)^2}{T^2}$$

$$W\{X-Y \ge t\} = 1 - \frac{(t-T)^2}{T^2}$$





$W\{|X-Y| \le t\}$

$y = ($

B e) Gedächtnislosigkeit. z.B. bei Exponential- oder Geometrischer Verteilung.

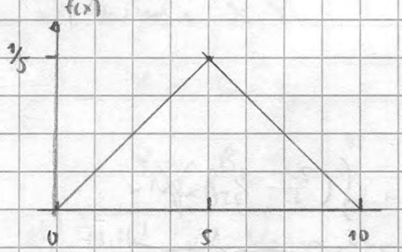
Gedächtnislos heißt

$$W\{X > s+t \mid X > s\} = W\{X > t\}$$

Übung Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie 26.1.2009

Beispiel 1)

Die Dichte einer stochastischen Größe hat die unten dargestellte Form



a) Genaue Form der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{25} x \cdot 1_{(0,5)}(x) & \text{für } 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{25}(x-5) & \text{für } 5 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

b) Verteilungsfunktion

$$F(x) = \int_0^x f(x)\, dx$$

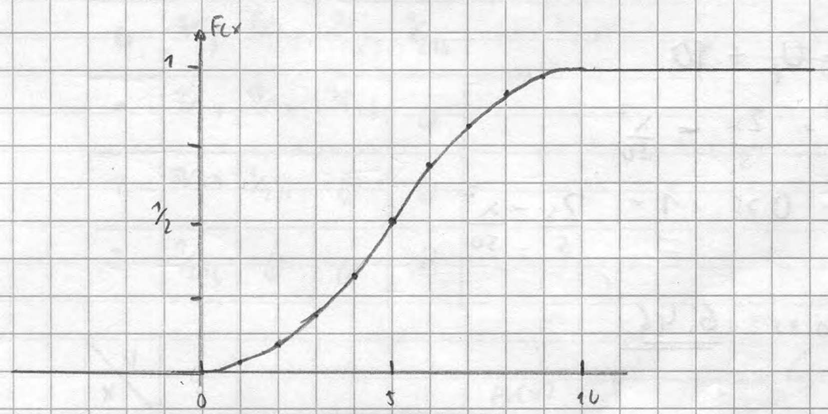
$F(x)$ für $0 \leq x \leq 5$:

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{25} x = \frac{1}{50} x^2 \Big|_0^x = \frac{x^2}{50}$$

$F(x)$ für $5 \leq x \leq 10$

$$F(x) = \int_0^5 f(x)\, dx + \int_5^x f(x)\, dx = \frac{25}{50} + \int_5^x \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25}(x-5)\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2x}{5} - \frac{x^2}{50} - \frac{3}{2} = -1 + \frac{2x}{5} - \frac{x^2}{50}$$



c) Berechnen $\mathbb{E}(X)$, $Var(X)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{25} x & \text{für } 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{25}(x-5) & \text{für } 5 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{25} x \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{25} x + \frac{5}{25} = \frac{2}{5} - \frac{1}{25} x \end{cases}$$

$$\mathbb{E} X = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, x\, dx = \underbrace{\int_0^5 \frac{1}{25} x^2\, dx}_{} + \underbrace{\int_5^{10} \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{25} x\right) x\, dx}_{}$$

$$= \frac{5}{3} + \frac{10}{3} = \frac{15}{3} = \underline{\underline{5}}$$

$$Var\, X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E} X)^2$$

$$\mathbb{E} X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, x^2\, dx = \underbrace{\int_0^5 \frac{1}{25} x^3\, dx}_{} + \underbrace{\int_5^{10} \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{25} x\right) x^2\, dx}_{}$$

$$= \frac{25}{4} + \frac{275}{12} = 29.1667$$

$$\Rightarrow Var\, X = 29.1667 - 25 = \underline{\underline{4.16667}}$$

d) Median, 0,25 Fraktil und 0,75 Fraktil:

$$F(x) = \frac{x^2}{50} \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 5$$

$\underline{\underline{u_{0.5} = 5}}$ (Median)

$$u_{0.25} \Rightarrow F(u_{0.25}) = 0.25$$

$$0.25 = \frac{u_{0.25}^2}{50} \Rightarrow u_{0.25} = +\sqrt{12.5} = 3.53553$$

$$\cancel{u_{1-p} = -u_p + 10}$$

$$F(x) = -1 + \frac{2x}{5} - \frac{x^2}{50}$$

$$u_{0.75} \Rightarrow 0.75 + 1 = \frac{2x}{5} - \frac{x^2}{50}$$

$$\Rightarrow u_{0.75} = \underline{6.46}$$

12) Ein symmetrischer Würfel wird dreimal geworfen. X ist die Anzahl der dabei erzielten Einser und Y die Anzahl der Sechser.

a) Verteilung X, Y

$X \sim B_{3,1/6}$

$Y \sim B_{3,1/6}$

b) Mittel und Varianz von X, Y

$$W_x(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k} \cdot k$$

$(x+y)^n$ ist EF für $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} y^{n-k} x^k$

$n(x+y)^{n-1}$ ist EF für $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \cdot y^{n-k} \cdot x^{k-1} k$

$x \cdot n(x+y)^{n-1}$ ist EF für $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \cdot y^{n-k} \cdot x^k \cdot k$

$\Rightarrow \mathbb{E}X = p \cdot n(p+1-p)^{n-1} = np \checkmark = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

$\text{Var}\,X = np(1-p) = \frac{5}{12}$

c) Gemeinsame Verteilung von X und Y

X \ Y	0	1	2	3
0	8/27	6/27	3/54	1/216
1	2/27	8/54	3/216	0
2	3/54	3/216	0	0
3	1/216	0	0	0

X \ Y	0	1	2	3	$P_X(x)$
0	64/216	48/216	12/216	1/216	125/216
1	48/216	24/218	3/216	0	75/216
2	12/216	3/216	0	0	15/216
3	1/216	0	0	0	1/216
$P_Y(y)$	125/216	75/216	15/216	1/216	

6 6 x
6 x 6
x 6 6 6

$\frac{3!}{2!}$

6 1 x
1 6 x
1 x 6
6 x 1
x 6 1
x 1 6

$\frac{6!}{2! \cdot 1!}$

6 x 6 x 6

4 x 4 x 4

~~8~~ x 4 x 7 x 3

d) Korrelationskoeffizient von X und Y

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var X} \cdot \sqrt{Var Y}}$$

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{12}$$

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \sum_{(x,y) \in \Omega} x \cdot y \cdot p(x,y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{24}{216} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{216} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{216}$$

$$= \frac{1}{6}$$

$$\rho = \frac{-1/12}{\sqrt{5/12}\,\sqrt{5/12}} = \frac{-1}{12} \cdot \frac{12}{5} = -0.2$$

13) Die folgenden Datensätze sind Stichproben aus unabhängigen Normalverteilungen $N(\mu_x, \sigma_x^2)$, $N(\mu_y, \sigma_y^2)$

x	192	179	181	193	215	181	178						$m = 7$
y	173	194	194	187	168	186	176	191	191	178	185	160	$n = 12$

a) Teste ob die Varianzen als gleich angesehen werden können

$\alpha = 0.1 \qquad \mathcal{H}_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$

$$T = \frac{S_x^2}{S_y^2}$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_m)^2 = 174.613 \qquad \bar{x}_m = 188.429$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}_n)^2 = 119.356 \qquad \bar{y}_n = 181.917$$

$$t = \frac{174.613}{119.356} = 1.46307$$

$$F_{m-1,\, n-1,\, 1-\frac{\alpha}{2}} = F_{6,11;\,0.95} = \underline{\underline{3.09}}$$

$t \in (>1,\ 3.09) \Rightarrow \mathcal{H}_0$ nicht verwerfen

3e) Ermittelt einen 95% Konfidenzintervall für die Mittelwerte $\mu_x - \mu_y$. Entscheiden auf der Basis des Konfidenzintervalls ob die Mittelwerte als gleich angesehen werden können.

$\cancel{(n-1) \cdot S_n}$

$$W\{t_{m+n-2,\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq t_{m+n-2,1-\frac{\alpha}{2}}\} = 1-\alpha$$

$$W\left\{t_{m+n-2,\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} \cdot S_g \leq \bar{X}_m - \bar{Y}_n - \mu_x + \mu_y \leq t_{m+n-2,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} \cdot S_g\right\}$$

$$W\{t_{m+n-2,\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} \cdot S_g + \bar{Y}_n - \bar{X}_m \leq U_y - U_x \leq t_{m+n-2,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} \cdot S_g + \bar{Y}_n - \bar{X}_m\}$$

$$W\{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - t_{m+n-2,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} \cdot S_g \leq U_x - U_y \leq \bar{X}_m - \bar{Y}_n - t_{m+n-2,\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} \cdot S_g\}$$

$$\Rightarrow \left(\bar{X}_m - \bar{Y}_n - t_{m+n-2,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} \cdot S_g \;;\; \bar{X}_m - \bar{Y}_n + t_{m+n-2,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} \cdot S_g\right)$$

$$t_{m+n-2,\frac{\alpha}{2}} = -t_{m+n-2,1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$t_{7+12-2\,;\,0.975} = 2.110$$

$$S_g = \sqrt{\frac{(m-1) \cdot S_m^2 + (n-1) \cdot S_n^2}{m+n-2}} = 11.7838$$

$$(-5.3131 \,;\, 18.3371)$$

Nullpunkt ist Element des Intervalls. Daher Hypothese nicht verworfen.

Ba) A und B unabhängige Ereignisse $W(A) = W(B) = \frac{1}{2}$

$$W(A \cap B \mid A \cup B) = \frac{W((A \cap B) \cap (A \cup B))}{W(A \cup B)}$$

$$= \frac{W(A \cap A \cap B \cup A \cap B \cap B)}{W(A \cup B)}$$

$$= \frac{W(A \cap B \cup A \cap B)}{W(A \cup B)} = \frac{W(A \cap B)}{W(A \cup B)}$$

$$= \frac{W(A) \cdot W(B)}{W(A) + W(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$W(A \cup B) = W(A) + W(B) - W(A \cap B)$$

Bb) Behauptung: Die Varianz der Summe zweier stochastischer Größen X und Y ist stets größer oder gleich der Differenz

$$Var(X+Y) \geq Var(X-Y)$$

$$Var(X+Y) = Var X + Var Y + 2 \cdot Cov(X,Y)$$

$$Var(X-Y) = Var X + Var Y - 2 \cdot Cov(X,Y)$$

Aussage falsch. Wenn $Cov(X,Y) < 0$ ist ist. Sie ist nicht wenn $Cov(X,Y) \geq 0$

Bc) Wie lautet die Dichte des Minimums von 10 unabhängigen nach $U_{0,1}$ verteilten Größen

$$W(\min(X_1, \ldots, X_{10}) > x) = W(X_1 > x) \cdot \ldots \cdot W(X_{10} > x)$$

$$= \prod_{i=1}^{10} (1 - F_i(x))$$

$$F(x) = 1 - \prod_{i=1}^{10} (1 - F_i(x)) = 1 - (1-x)^{10}$$

$$F_i(x) = x \cdot 1_{(0,1)}(x)$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = 10(1-x)^9$$

Bd) Nein sind nicht immer unverzerrt. Beispiel ist plausibler Schätzer für die Varianz

$$\frac{1}{n} \cdot \sum (x_i - \bar{x}_n)^2$$

18.12.2001 Test)

Beispiel 1)

Eine bestimmte Komponente fällt mit Wahrscheinlichkeit 1/5 sofort beim Einschalten aus. Ist die Lebensdauer genügt sie einer Dichte der Form

$$C \cdot e^{-x/10} \qquad x > \emptyset$$

a) Um welchen Typ von Verteilung handelt es sich (diskret, kontinuierlich, gemischt)

gemischte Verteilung

b) Bestimmen der Konstante C

$$f^*(x) = C \cdot e^{-x/10} \qquad u = \frac{-x}{10} \quad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{10} \quad dx = -10 \cdot du$$

$$\int_0^\infty f^*(x) = -10 \cdot C \cdot e^{\frac{-x}{10}} \Big|_\emptyset^\infty = 0 - -10C = 10C$$

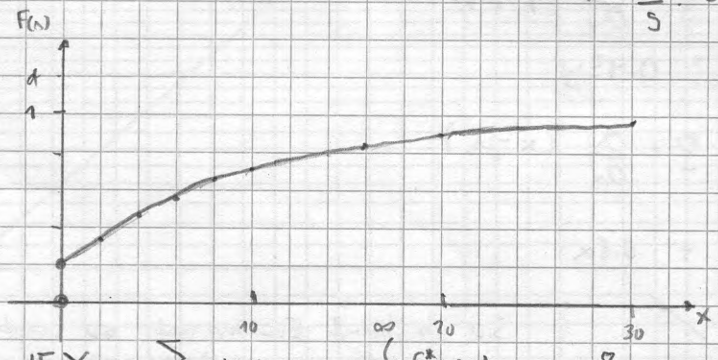
$$C\,10 = \frac{4}{5} \qquad C = \frac{40}{50} = \frac{2}{25} =$$

c) $$F(x) = \frac{1}{5} + \int_0^x f^*(x)\,dx = \frac{1}{5} + \int_0^x \frac{2}{25} \cdot e^{-x/10}\,dx$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{-20}{25} \cdot e^{-x/10} \Big|_0^x = \frac{1}{5} + \frac{-4}{5} \cdot \left(e^{\frac{-x}{10}} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \cdot e^{\frac{-x}{10}}$$

$$= 1 - \frac{4}{5} \cdot e^{-x/10}$$



d) $$\mathbb{E}X = \underbrace{\sum_{\substack{x \in M_x \\ p(x) > 0}} p(x) \cdot x}_{0} + \int_0^\infty f^*(x)\,dx = \underline{\underline{8}}$$

e) $$u_{0.5} \Rightarrow F(X \le x) = 0.5 \qquad 0.5 = 1 - \frac{4}{5} e^{\frac{-x}{10}}$$

$$-\frac{1}{2} = -\frac{4}{5} \cdot e^{\frac{-x}{10}}$$

$$\frac{5}{8} = e^{\frac{-x}{10}}$$

$$= \ln\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{-x}{10} \qquad x = -10 \cdot \ln\left(\frac{5}{8}\right)$$

$$x = \underline{\underline{4.7}}$$

Beispiel 2)

Die stochastische Größe X und Y genügen einer gemeinsamen Normalverteilung mit folgenden Parametern

$$\mu_x = 20 \quad \mu_y = 25 \quad \sigma_x = 3 \quad \sigma_y = 4 \quad \rho = 0.6$$

a) Berechne $W\{20 < Y \leq 25\} = \Phi\left(\frac{25-25}{4}\right) - \Phi\left(\frac{20-25}{4}\right)$

$$= \Phi(0) - \Phi\left(-\tfrac{5}{4}\right) = \Phi(0) - 1 + \Phi\left(\tfrac{5}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - 1 + 0.8944 = \underline{\underline{0.3944}}$$

b) Berechne $W\{20 < X \leq 25 \mid Y = 15\}$

$$X \mid Y = y \sim N\left(\mu_x + \rho \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y),\ (1-\rho^2)\cdot \sigma_x^2\right)$$

$$\sim N(15.5,\ 5.76)$$

$$W\{20 < X \leq 25 \mid Y = 15\} = \Phi\left(\frac{25-15.5}{\sqrt{5.76}}\right) - \Phi\left(\frac{20-15.5}{\sqrt{5.76}}\right) \quad ! \text{ Wurzel}$$

$$= \Phi(3.96) - \Phi(1.875)$$

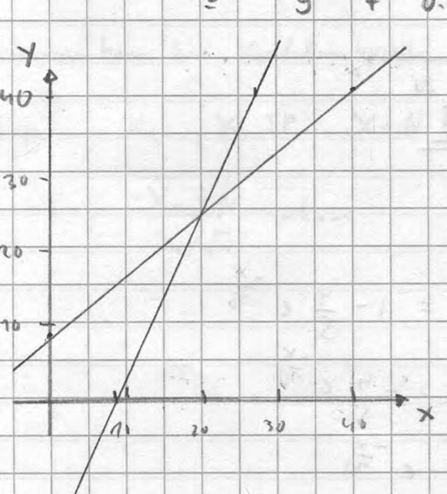
$$= 1 - 0.9699 = \underline{0.0301}$$

c) Regressionsfunktion

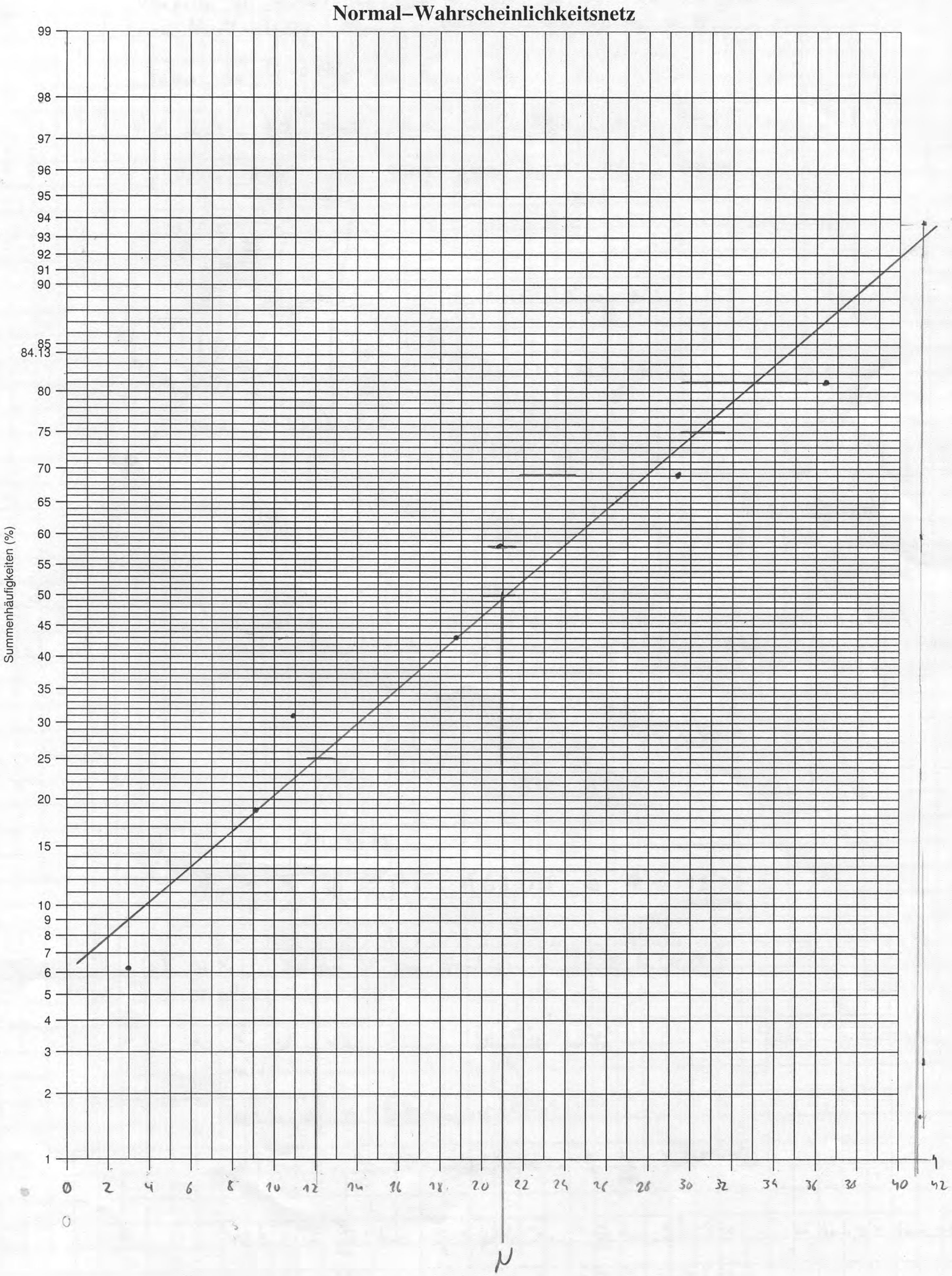
$$\mathbb{E}(X \mid Y = y) = \mu_x + \rho \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y)$$
$$= 8.75 + 0.45y$$

$$\mathbb{E}(Y \mid X = x) = \mu_y + \rho \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x)$$

$$= 9 + 0.8x$$

c) 

Sind ab beliebige Erwartungswerte zu verstehen. Wenn $X = x$ ist und der lineare Zusammenhang besteht, so ist $\mathbb{E}(Y \mid X = x) = \ldots$


Normal–Wahrscheinlichkeitsnetz
Summenhäufigkeiten (%)
99
98
97
96
95
94
93
92
91
90
85
84.13
80
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42
μ

Beispiel 3:

Überprüfen Sie mittels beiliegendem W-Papier ob die Daten tatsächlich aus einer Normalverteilung stammen. Entnehmen von Nichtparameter μ, σ

Eintrag von $(i-0.5)/n$ gegen $x_{(i)}$ in Netz

a)

x_i	2.5	9.1	10.9	18.7	23.8	29.3	36.3	41.1
p	0.0625	0.1875	0.3125	0.4375	0.5625	0.6875	0.8125	0.9375

$n=8$

$\mu = 21$

$$u_p = \frac{x_p - \mu}{\sigma} \qquad u_{0.75} = \frac{x_{0.75} - \mu}{\sigma}$$

$$u_{0.75} = -u_{0.25} \qquad u_{0.25} = \frac{x_{0.25} - \mu}{\sigma} = -u_{0.75}$$

$$u_{0.75} = -u_{0.25}$$

$$-u_{0.75} = \frac{x_{0.25} - \mu}{\sigma}$$

$$2u_{0.75} = \frac{(x_{0.75} - \mu) - (x_{0.25} - \mu)}{\sigma}$$

$$2u_{0.75} = \frac{2x_{0.75}}{\sigma}$$

$$\sigma = \frac{x_{0.75} - x_{0.25}}{2u_{0.75}}$$

$$\sigma = \frac{30.3 - 12}{2 \cdot 0.7734}$$

$$\sigma = \underline{\underline{11.83}}$$

b) $\bar{x}_n = \hat{\mu} = 21.4625$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum (x_i - \bar{x}_n)^2 = 163.035 \Rightarrow \hat{\sigma} = \underline{\underline{12.77}}$$

c) Ist $X_1, \dots, X_n$ eine SP einer Normalverteilung von $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ so gilt

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \qquad \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$$

$$W\{t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \le Z \le t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\} = 1-\alpha$$

$$W\{t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n}} - \bar{X}_n \le -\mu \le t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n}} - \bar{X}_n\} = 1-\alpha$$

$$W\{\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \le \mu \le \bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\} = 1-\alpha \qquad \text{mit } t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} = -t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$W\{\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \le \mu \le \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\} = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \left[\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} ; \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2$$

$\bar{x}_n = 21.46$ $\qquad \alpha = 0.05$

$s_n^2 = 163.04 \Rightarrow s_n = 12.769$ $\qquad 1 - \frac{0.05}{2} = 0.975$

$t_{7,0.975} = 2.365$

$[10.7861 ; 32.1389]$

d) $\alpha = 0.01 \quad \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.005 = 0.995$

$\chi_{7,0.995} = 20.28 \qquad \chi_{7,0.005} = 0.99$

$$\left[\frac{(n-1)\cdot S_n^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}} ; \frac{(n-1)\cdot S_n^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}} \right] = [56.2744 ; 1152.77]$$

$$= [7.5 ; 33.95]$$

<u>Achtung:</u> 31.1 vergessen!

13o) Auf einer Bundesstrasse der Länge 500km ereignen sich je 100km und Tag durchschnittlich 0.05 Unfälle.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ereignen sich auf einer Bundesstrasse je Tag genau drei Unfälle unter der Bedingung, dass einer vorkommt

$\Rightarrow$ Poisson-Verteilung $\quad W(\{k\}) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} \quad k \in \mathbb{N}_0$

$$\mu' = \frac{0.05 \text{ Unfälle}}{\text{Tag} \cdot \text{km}} \quad \Rightarrow \quad \mu' = \frac{0.25 \text{ Unfälle}}{\text{Tag}}$$

$$X \sim \frac{\mu^k \cdot e^{-\mu}}{k!}$$

$$W(U3 \mid U1) = \frac{W(U3 \cap U1)}{W(U1)} = \frac{W(U3)}{W(U1)}$$

$$W(U3) = \frac{\mu^3 \cdot e^{-\mu}}{3!} = 0.002028$$

$W(U1) = \cancel{0.1947} \qquad 1 - W(U_0) = 0.221194$

$$\Rightarrow W(U3 \mid U1) = \frac{0.002028}{0.221194} = \cancel{0.010417} = \underline{0.009169}$$

Test 18.12.2001)

B) a) Für $X \sim L(2,9)$ berechne man $W\{1 \leq X \leq 3\}$

$$W\{1 \leq X \leq 3\} = W\{X \leq 3\} - W\{X \leq 1\}$$

$$= \Phi\left(\frac{\ln(3)-2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{\ln(1)-2}{3}\right)$$

$$= \Phi(-0.3) - \Phi(-0.6\dot{6})$$

$$= 1 - \Phi(0.3) - (1 - \Phi(0.6\dot{6}))$$

$$= \Phi(0.6\dot{6}) - \Phi(0.3)$$

$$= 0.7454 - 0.6179 = \underline{\underline{0.1275}}$$

c) Ist $F(\cdot)$ eine invertierbare Verteilungsfunktion, $Y \sim U_{0,1}$

$\Rightarrow F^{-1}(Y)$ hat Verteilungsfunktion $F(\cdot)$

$X = F^{-1}(y)$

$$F_X(x) = W\{X \leq x\} = W\{X \leq x\} = W\{F^{-1}(Y) \leq x\}$$

$$= W\{Y \leq F(x)\}$$

Aus a) $F(x) = 1 - \frac{4}{5} e^{-\frac{x}{10}} = y$

$$1 - y = \frac{4}{5} e^{-\frac{x}{10}}$$

$$\frac{5}{4} \cdot (1-y) = e^{-\frac{x}{10}}$$

$$\ln\left(\frac{5}{4}\right) + \ln(1-y) = \frac{-x}{10}$$

$$x = -10\left(\ln\left(\frac{5}{4}\right) + \ln(1-y)\right) = 27.7459$$

$0.9501 \mathrel{\hat{=}} 27.7459$

$0.1811 \mathrel{\hat{=}} \cancel{0}$ 0.23

$0.6068 \mathrel{\hat{=}} 7.103$

d) Man ermittle und skizziere das Ergebnis der Faltung von zwei auf $M=\{-2,-1,0,1,2\}$ diskret uniform verteilte Größen.

X, Y unabhängig

$$W\{X+Y=t\} = \sum_{x+y=t} p(x)\cdot p(y) = \sum_{x=-2}^{2} p(x)\cdot p(t-x)$$

$t=0 \Rightarrow (-2,0),(0,-2),(-1,-1),(1,-1),(0,0)$

$x + t - x = t$

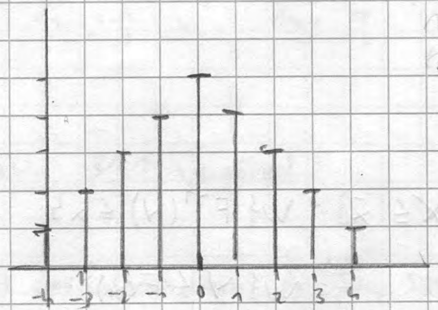
t	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$

$-3 = (-2,-1),(-1,-2)$

$-2 = (-2,0),(-1,-1),(0,-2)$

$-1 = (-2,1),(-1,0),(0,-1),(1,-2)$

$0 = (-2,2),(-1,1),(0,0),(1,-1),(2,-2)$



e) Was versteht man unter einer Pivot-Größe, In welchem Zusammenhang kommen sie vor. Zwei konkrete Beispiele.

Pivot-Größe: Ist $X_1,\dots,X_n$ eine SP der stochastischen Größe $X\sim W_\theta$, $\theta\in\Theta$ und ist $Q=g(X_1,\dots,X_n;\theta)$ eine SG deren Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht von θ abhängt, so heißt Q eine Pivot-Größe.

Kurz: Eine SG, die eine Funktion $g(X_1,\dots,X_n,\theta)$ einer SP $X\sim W_\theta$ und des Parameters θ ist, deren Verteilung nicht von θ abhängt heißt Pivot-Größe.

Zusammenhang bei Konfidenzbereichen

Bsp: $X_1,\dots,X_n$ SP $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$$\frac{\bar{X}_n-\mu}{S_n/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \qquad \frac{(n-1)\cdot S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$$

Übung Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie 14.1.2004

Test : 14.10.2003

1) Für eine stochastische Größe X gilt:

$$W\{X=0\}=\frac{1}{5} \quad , \quad W\{X=1\}=\frac{2}{5}$$

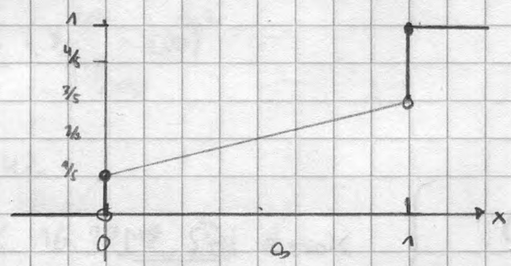
Der Rest der Verteilung ist uniform auf $(0,1)$ verteilt

a) $U_{0,1}$ hat Dichte $f(x) = 1$

$$\sum_{i=1}^{2} W\{X=i\} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow f^*(x) = \frac{2}{5} \cdot 1_{(0,1)}(x)$$

a) Gemeinsame Verteilungsfunktion



b) $$\mathbb{E}X = \sum_{x \in M_X,\, p(x)>0} p(x)\cdot x_i + \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f^*(x)\, dx$$

$$= \left(0\cdot\frac{1}{5} + 1\cdot\frac{2}{5}\right) + \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\frac{2}{5}\cdot 1_{(0,1)}x\, dx$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{2}{5}\cdot\int_0^1 x\,dx = \frac{2}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}(1-0) = \underline{\underline{\frac{3}{5}}}$$

c) $$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$$

$$\mathbb{E}X^2 = \sum_{x_i \in M_X:\, p(x)>0} x_i^2 \cdot p(x) + \int_0^1 x^2 \cdot f^*(x)\, dx$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{2}{15} = \frac{6}{15} + \frac{2}{15} = \frac{8}{15} = \underline{\underline{0.53}}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{8}{15} - \frac{9}{25} = \underline{\underline{0.1733}}$$

Beispiel 2)

Messung Wasser: 47 53 61 57 65 44 56 52 63 58 49 51 54

a) plausibler Schätzer für $\hat{\mu}$

$$\hat{\mu} = \bar{x}_n = \underline{\underline{54.62}}$$

plausibler Schätzer für σ^2

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2 = \underline{\underline{35,6213}}$$

unverzerrter Schätzer für $\hat{\mu}$

$$\hat{\mu} = \bar{x}_n = \underline{\underline{54.62}}$$

unverzerrter Schätzer für σ^2

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2 = \underline{\underline{38.56}}$$

b) $u_p = \frac{x_p - \mu}{\sigma}$

$\Rightarrow x_p = u_p \cdot \sigma + \mu$

$u_{0.9} = 1.29$ (Tabelle)

mit $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$\Rightarrow u_{0.1} = -1.29$

$x_{0.9} = \underline{\underline{62.31}}$

$x_{0.1} = \underline{\underline{46.92}}$

c) 95% Konfidenzintervall für μ

$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = \frac{0.05}{2} = 0.025$

$$\left[\bar{x}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} , \bar{x}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

$t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} = t_{12, 0.975} = 2.201$

$s_n = \sqrt{s_n^2} = 6.21$

$[50.8232 ; 58.4075]$

95% Konfidenzintervall für σ^2

$$\left[\frac{(n-1) \cdot s_n^2}{\chi^2_{n-1; 1-\alpha/2}} ; \frac{(n-1) s_n^2}{\chi^2_{n-1; \alpha/2}} \right]$$

$\chi^2_{12, 0.975} = 23.34$ $\chi^2_{12, 0.025} = 4.4$

$$\left[\frac{12 \cdot 38.56}{23.34} ; \frac{12 \cdot 38.56}{4.4} \right] = [19.84 ; 105.245]$$

$\Rightarrow \sigma = [4.45 ; 10.26]$

Test 14.10.2003:

3) Tabelle mit Häufigkeiten der Ziffern 0, ..., 9 für die ersten 2000 Stellen von π

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
181	213	207	189	195	205	200	197	202	211

Chiquadrat-Test ob die Ziffern einer diskreten Gleichverteilung folgen ($\alpha = 5\%$)

$$Z_n = \sum_{j=1}^{v} \frac{(Y_j^{(n)} - n \cdot w_j)^2}{n \cdot w_j} \qquad \lim_{n\to\infty} W_0\{Z_n \le \chi^2_{v-1,p}\} = p$$

$$V = \{(x_1, ..., x_n) \mid Z_n(x_1, ..., x_n) \ge \chi^2_{v-1;\,1-\alpha}\}$$

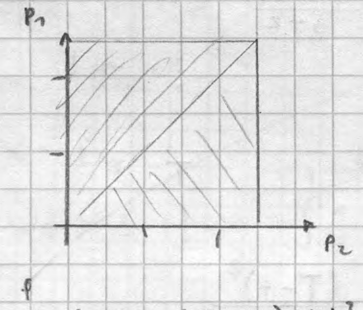
$$\chi^2_{v-1;\,1-\alpha} = \chi^2_{9,\,0.95} = 16.92$$

$$Z_n = \sum_{j=1}^{v} \frac{(Y_j^{(n)} - 200)^2}{200} \qquad w_j = \frac{1}{10}$$

$Z_n = 4.42$

$4.42 \le 16.92 \Rightarrow$ Test okay.

10)



$$W\{\max(T_1, T_2) \le t\} = W\{T_1 \le t\} \cdot W\{T_2 \le t\}$$

$$= F_{T_1}(t) \cdot F_{T_2}(t)$$

$$T_1 \sim U_{0,T} = \frac{1}{T}$$

$$F_{T_1}(t) \int_0^t \frac{1}{T} \cdot 1_{(0,T)} \cdot x = \frac{x^2}{2}\Big|_0^t \cdot \frac{1}{T} = \frac{t^2}{2T} \qquad f(t_1 + t_2)$$

$$= \cancel{2t^2}\ \frac{t^2}{4T^2}$$

$$W\{|T_1 - T_2| \le t\}$$

$$= \iint_{|t_1 - t_2| \le t} f_{T_1}(t_1) \cdot f_{T_2}(t_2)\, dt_1\, dt_2$$

$$= 2 \iint_{0 \le t_1 - t_2 \le t} F_{T_1}(t_1) \cdot f_{T_2}(t_2)\, dt_1\, dt_2 = 2 \cdot \int_0^{t_2} \int_{t_1 - t}^{t_1} f_{T_1}(t) \cdot f_{T_2}($$

$t_2 = t_1 - t$

$T_1 \sim \frac{1}{T} \cdot 1_{(0,T)}(x) \qquad T_2 \sim \frac{1}{T} \cdot 1_{(0,T)}(x)$

$W\{|T_1 - T_2| \leq t\}$.

$f(t_1) \cdot f(t_2)$ ist gemeinsam Dicht.

$$W\{|T_1 - T_2| \leq t\} = \iint_{|T_1 - T_2| \leq t} f(t_1) \cdot f(t_2)\, dt_1 \cdot dt_2 = \int_0^{t_1} \int$$

$t = 2$

$t_1 = x \qquad t_2 \qquad x - t \to x$

t_1: t … $\to 0$ $\qquad$ t_2: 0 … $t_1 - t$

$x - (x - t) = t$

$x - x = 0$

$$f_{\cdot} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t) \cdot f(t)\, dt$$

$$W\{|T_1 - T_2| \leq t\} = \int_t^T \int_0^{t_1 - t} f(t_2) \cdot f(t_1) \cdot dt_2\, dt_1 = \frac{(t - T)^2}{2T^2}$$

$$W\{|T_1 - T_2| \leq t\} = \frac{2 \cdot (t - T)^2}{2T^2} = \frac{(t - T)^2}{T^2}$$

$$W\{|T_1 - T_2| > t\} = \iint_{T_1 - T_2 > t} f(t_1) \cdot f(t_2)\, dt_1\, dt_2$$

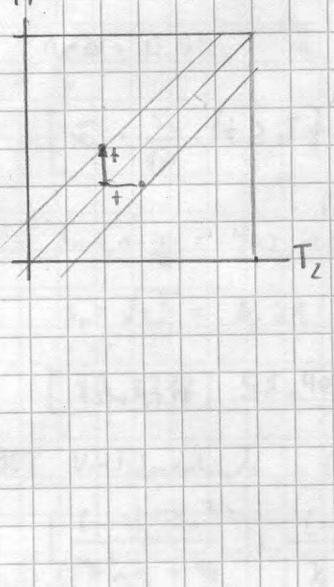
$t = 2 \Rightarrow t_2 = \{0, 3\}$

$$= 2 \int_t^T \int_0^{t_1 - t} f(t_2) \cdot f(t_1)\, dt_2\, dt_1 = \frac{(t - T)^2}{2T^2}$$

t_1: t … T $\to 5$

$$= \frac{(t - T)^2}{T^2}$$

Andere T_1



$$W(|T_1 - T_2| > t) = \frac{(T - t)^2}{T^2}$$

$$\Rightarrow W(|T_1 - T_2| \leq t) = 1 - \frac{(T - t)^2}{T^2}$$

Test 14.10.2008)

b) Gedächtnislosigkeit

$$W\{X \geq t_1 + t_2 \mid X \geq t_1\} = W\{X \geq t_2\}$$

Beispiel: Geometrische Verteilung

$$W_x \sim G_p = p \cdot (1-p)^{k-1}$$

$$W\{X < k\} = \sum_{j=1}^{k} p \cdot (1-p)^{j-1} = p \cdot \sum_{j=1}^{k} (1-p)^{j-1} \quad \Big| \; p = \tfrac{1}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum$$

$$= \frac{W\{X > t_1 + t_2 \cap X > t_1\}}{W\{X > t_2\}} = \frac{W\{X > t_1 + t_2\}}{W\{X > t_2\}}$$

$$= \frac{p(1-p)^{t_1+t_2} + p(1-p)^{t_1+t_2+1} + \dots + p(1-p)^{t_1+t_2+\infty}}{p(1-p)^{t_1} + p(1-p)^{t_1+1} + \dots}$$

$$= \frac{W\{X > t_1 + t_2\}}{W\{X < t_2\}} = \frac{1 - W\{X \leq t_1 + t_2\}}{1 - W\{X \leq t_2\}} = \frac{1 - (p + p(1-p) + \dots p(1-p)^{t_1+t_2-1})}{1 - (p + p(1-p) + p(1-p)^{t_2-1})}$$

Beispiel: Exp

$$X \sim Ex_\tau \quad \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u = -\frac{t}{\tau} \quad \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\tau}$$

$$dt = -\tau \, du$$

$$W\{X \leq t\} = \int_0^t \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} dt \quad \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^t e^{-\frac{t}{\tau}} dt$$

$$= -\int_0^t e^{u} du = -(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1) = \underline{1 - e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

$$W\{X > t\} = 1 - W\{X \leq t\} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$W\{X > t_1 + t_2 \mid X > t_1\} = \frac{W\{X > t_1 + t_2, X > t_1\}}{W\{X > t_1\}} = \frac{e^{-\frac{(t_1+t_2)}{\tau}}}{e^{-\frac{t_1}{\tau}}} = e^{-\frac{t_2}{\tau}}$$

c)

$$\cancel{x_p - \sigma} \quad \mu_p = \frac{x_p - \mu}{\sigma}$$

$$\mu_{p_1} \cdot \sigma = x_{p_1} - \mu \qquad \mu_{p_2} \cdot \sigma = x_{p_2} - \mu \qquad \mu = x_{p_2} - \mu_{p_2} \sigma$$

$$\mu_{p_1} \cdot \sigma = x_{p_1} - x_{p_2} + \mu_{p_2} \cdot \sigma$$

$$\sigma = \frac{x_{p_1} - x_{p_2}}{\mu_{p_1} - \mu_{p_2}} = \frac{75 - 83}{-1.28 - 0.84} \qquad \mu_{10} = -1.28 \quad \mu_{80} = 0.84$$

$$= \underline{3.773}$$

$$\mu = x_{p_1} - \mu_{p_1} \cdot \sigma = 75 - (-1.28) \cdot 3.773 = \underline{79.83}$$

d)' SC $X \sim U_{0,\frac{\pi}{2}}$

$\mathbb{E}Y \qquad Y = \sin(X)$

$f_X(x) = \frac{2}{\pi} \cdot 1_{(0,\frac{\pi}{2})}(x)$

$$\mathbb{E}Y = \int_0^{\frac{2}{\pi}} \sin(x) \cdot \frac{2}{\pi} \cdot x \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underset{v}{\sin(x)} \, \underset{u}{x} \, dx$$

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du \qquad u = x \quad du = 1 \qquad v = \sin(x) = -\cos(x)$$

$$\int \sin(x) x \, dx = -x \cdot \cos(x) - \int -\cos(x) \, dx$$

$$= -x \cdot \cos(x) + \int \cos(x) \, dx = -x\cos(x) + \sin(x)$$

$$\mathbb{E}Y = \frac{2}{\pi} \left(-x \cdot \cos(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{2}{\pi} \underbrace{\cos\left(\frac{2}{\pi}\right)}_{0} + \underbrace{0 \cdot \cos(0)}_{0} + \underbrace{\sin\left(\frac{2}{\pi}\right)}_{1} - \sin(0) \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot (1) = \boxed{\frac{2}{\pi}}$$

e) Zwei unabhängige SP.

$m = 2n \qquad n = m = 20 \qquad \sigma_X = \sigma^2$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \sigma_Y = 2\sigma^2$

$$S_n = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2 = \sigma_x$$

$$\frac{S_m^2}{S_n^2} \sim F_{m-1,n-1} \qquad F_{19,19,\ 0.05} = \frac{1}{2.17}$$

$$F_{19,19,\ 0.95} = 2.17$$

$[0.46 ; 2.17]$

$\frac{1}{2} \in [0.46; 2.17] \Rightarrow$ Test okay

$2 \in [0.46; 2.17] \Rightarrow$ Test okay