Schriftliche Prüfung

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathematik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2-stündig mit Unterlagen

9.5.2001

.) Beispiele[1]

1. Für die Verteilung einer stochastischen Größe X gilt:

$$W\{X=-2\} = W\{X=1\} = \frac{1}{10}$$

immer x+ linkes Intervall ⇒ auf den 0-Punkt verschieben

Der Rest der Verteilung ist im Intervall $(-3,2)$ kontinuierlich uniform verteilt.

- (a) Ermitteln und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion. (Genaue Zeichnung!)
- (b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.
- (c) Bestimmen Sie den Median von X.

2. Betrachten Sie einen trinomialverteilten stochastischen Vektor:

$$(X_1, X_2, X_3) \sim M_{n;p_1,p_2,p_3}$$

mit $n = 3$ und $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$.

- (a) Schreiben Sie alle (gemeinsamen) Wahrscheinlichkeiten von (X_1, X_2) in einer (2-dim.) Ta auf und bestimmen Sie die Randwahrscheinlichkeiten.
- (b) Sind X_1 und X_2 stochastisch unabhängig? (Kommentar) S 62/63
- (c) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten von X_1 und X_2.

3. Testen Sie mittels χ^2-Anpassungstest (mit α=0,05), ob die folgenden Daten von einer Normalv teilung $N(\mu,\sigma^2)$ stammen.

3,5	2,4	1,8	3,2	2,4	3,5	3,0	3,5	4,0	1,8
2,9	3,5	2,4	2,9	3,3	2,6	2,6	1,6	3,0	1,5
3,0	2,4	3,9	2,3	2,1	2,7	2,6	4,0	2,9	1,1

Verwenden Sie dazu die Klasseneinteilung:

$$(-\infty; 2),\ [2; 2{,}5),\ [2{,}5; 3),\ [3; 3{,}5),\ [3{,}5; \infty)$$

anz. geschätzte Parameter

$\chi^2_{k-3-1;\,1-\alpha}$

≥ Klassen

[1] ro Beispiel 4 Punkte.

9-5-2001

B) Beantworten bzw. berechnen Sie:[2]

- (a) Eine Schachtel enthält 90 intakte und 10 defekte Komponenten. Wenn 10 Komponenten verwendet werden, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß alle intakt sind?
- (b) Zeigen Sie, wie man, ausgehend von auf $(0,1)$ uniform verteilten (Pseudo-) Zufallszahlen, Beobachtungen einer auf $(-10,20)$ uniform verteilten sG erzeugen kann.
- (c) X und Y sind zwei unabhängige stochastische Größen mit $X \sim D_{0,1,2,3,4}$, $Y \sim D_{0,1}$ (diskrete uniforme Verteilungen). Ermitteln Sie die Verteilung von $X+Y$ und stellen Sie das Ergebnis graphisch dar.
- (d) Das Ergebnis X der Messung einer (unbekannten) Distanz d [m] sei eine normalverteilte sG mit Mittel d und Standardabweichung 2 [m]. Jemand macht 4 unabhängige Messungen X_1, X_2, X_3, X_4. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt das arithmetische Mittel der Messungen:

$$\overline{X}_4 = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4}$$

zwischen $d \pm 0{,}5$?

- (e) Erklären Sie an Hand eines Beispiels die Bedeutung von 'konjugierten Verteilungsfamilien' in der Bayes'schen Statistik. Buch: Seite 154

[2] Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte.

Schriftliche Prüfung

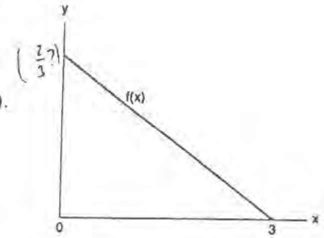
Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathematik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2–stündig mit Unterlagen

27.6.2001

A) Beispiele[1]

? 1. Die Abbildung zeigt die Dichte einer stochastischen Größe X:



(a) Bestimmen Sie die genaue Form der Dichte.

(b) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion (mit Skizze).

(c) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$.

(d) Bestimmen Sie den Median von X.

2. Bei einer Fluggesellschaft weiß man, daß im Durchschnitt 8% der Reservierungen wieder storniert werden. Für eine bessere Auslastung werden daher Überbuchungen vorgenommen. Man nehme an, daß es für einen Flug 180 Plätze gibt.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommen alle einen Platz, wenn 200 Reservierungen vorgenommen werden?

(b) Wieviele Reservierungen können höchstens vorgenommen werden, wenn mit einer Wahrscheinlichkeit von (mindestens) 0,95 kein Passagier abgewiesen werden soll?

Verwenden Sie eine passende Normalapproximation; rechtfertigen Sie deren Zulässigkeit.

3. Ein bestimmter Schaltertyp wurde einer Lebensdauerprüfung unterzogen. Dazu wurde bei 25 Schaltern die Anzahl der Betätigungen (= Lebensdauer) bis zum Ausfall gezählt, mit dem Ergebnis (geordnete Werte; in 10^4 Betätigungen):

1,9	2,5	4,5	5,0	7,3
8,2	9,5	10,0	10,6	11,3
14,1	17,0	17,1	17,5	23,3
23,4	25,6	29,7	35,7	63,7
72,2	78,2	81,4	89,8	129,9

Prüfen Sie mittels χ^2–Anpassungstest (mit $\alpha = 0,05$), ob eine Exponentialverteilung angenommen werden kann. Verwenden Sie dabei die folgende Klasseneinteilung:

$$[0, 10),\ [10, 25),\ [25, 45),\ [45, \infty)$$

Ermitteln Sie zuerst einen Schätzwert für den Parameter der Exponentialverteilung.

[1] Pro Beispiel 4 Punkte.

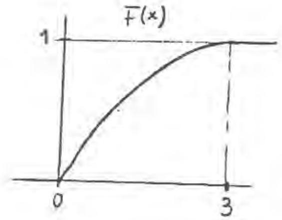
Prüfung EWST für Inf/Vm 27.6.2001

A) (1) (a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(3-x) & \text{f. } 0 \le x \le 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) $F(x) = \int_0^x \frac{2}{9}(3-\bar{u})\,du = \frac{2}{9}\left(3\bar{u} - \frac{\bar{u}^2}{2}\right)\Big|_0^x = \frac{2}{9}\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{x(6-x)}{9} & \text{für } 0 \le x \le 3 \\ 1 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$



(c) $\mathbb{E}(X^n) = \int_0^3 x^n \frac{2}{9}(3-x)\,dx =$

$= \frac{2}{9}\left(3\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right)\Big|_0^3 = \frac{2}{9}\cdot 3^{n+2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) =$

$= \frac{2\cdot 3^n}{(n+1)(n+2)}$

$\mathbb{E}(X) = \frac{2\cdot 3}{2\cdot 3} = \underline{1}$

$\mathbb{E}(X^2) = \frac{2\cdot 3^2}{3\cdot 4} = \frac{3}{2} \longrightarrow \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \underline{\frac{1}{2}}$

(d) $\frac{x(6-x)}{9} = \frac{1}{2} \rightarrow x^2 - 6x + \frac{9}{2} = 0$

$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - \frac{9}{2}} = 3 \pm \frac{3}{\sqrt{2}} = 3\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\tilde{x}_{0,5} = 3\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \doteq \underline{0,88}$

Schriftliche Prüfung

1,53 €

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathematik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2–stündig mit Unterlagen

30.1.2001

A) Beispiele[1]

1. Eine stochastische Größe X nimmt den Wert 1 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ an. Der Rest der Wahrscheinlichkeit ist im Intervall (1, 3) kontinuierlich uniform verteilt.

   (a) Zeichnen Sie die Verteilungsfunktion.

   (b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

   (c) Bestimmen Sie den Median der Verteilung.

   (d) Berechnen Sie $W\{1 \leq X < 2\}$.

2. Ein Zulieferer fährt jeden Tag von A nach B und dieselbe Strecke retour. Auf der Strecke gibt es 3 Ampeln; X sei die Zahl der roten Ampeln auf der Hinfahrt, und Y die Zahl der roten Ampeln auf der Rückfahrt. Auf der Basis seiner langen Erfahrung mit dieser Strecke hat der Fahrer die folgende zweidimensionale Verteilung von (X, Y) ermittelt:

		X			
		0	1	2	3
Y	0	0,01	0,02	0,07	0,01
	1	0,03	0,06	0,10	0,06
	2	0,05	0,12	0,15	0,08
	3	0,02	0,09	0,08	0,05

   (a) Ermitteln Sie die beiden Randverteilungen. Sind X und Y unabhängig? (Kommentar)

   (b) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten von X und Y. (Kommentar)

   (c) Angenommen, auf der Hinfahrt sind 2 Ampeln rot; mit wievielen roten Ampeln muß er dann auf der Rückfahrt rechnen?

3. Ein Statistikprogramm liefert die folgenden Zahlen als $N(0,1)$–verteilte Zufallszahlen (geordnet; abgeschnitten auf 2 Stellen):

-2,29	-2,19	-1,04	-1,01	-0,95	-0,87	-0,69	-0,55	-0,30	-0,28
-0,02	0,03	0,42	0,43	0,45	0,69	0,72	0,82	0,88	1,08

   (a) Gehen Sie zunächst von der Annahme (allgemein) normalverteilter Daten aus:

      i. Testen Sie ($\alpha = 0,05$) $H_0 : \mu = 0$ (gegen $H_1 : \mu \neq 0$).

      ii. Ermitteln Sie ein 95%–Konfidenzintervall für die Standardabweichung σ.

   (b) Prüfen Sie nun die (einfache) Hypothese $H_0 : X \sim N(0,1)$ wahlweise mittels:

      i. Wahrscheinlichkeitsnetz. (Kommentar)

      ii. Chiquadrat–Test ($\alpha = 0,05$); nehmen Sie dazu die folgende Klasseneinteilung: $(-\infty; u_{0,25}]$, $(u_{0,25}; u_{0,50}]$, $(u_{0,50}; u_{0,75}]$, $(u_{0,75}; \infty)$.

[1] Pro Beispiel 4 Punkte.

B) Beantworten bzw. berechnen Sie:[2]

(a) Ein Würfel wird zweimal geworfen. Ermitteln und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion für die höchste dabei erzielte Augenzahl.

(b) Die Lebensdauer T eines Bauteils sei eine exponentialverteilte sG mit Mittel 90 Stunden. Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß ein Bauteil, der bereits 5 Tage fehlerfrei gearbeitet hat, auch nach 7 Tagen noch intakt ist.

(c) Zwei unabhängige, identisch verteilte, sGn X und Y haben die folgende Verteilung:

$$W\{X = -1\} = W\{Y = -1\} = \frac{1}{4}$$

$$W\{X = 0\} = W\{Y = 0\} = \frac{1}{2}$$

$$W\{X = 1\} = W\{Y = 1\} = \frac{1}{4}$$

Ermitteln Sie die Verteilung von $X + Y$ und stellen Sie das Ergebnis graphisch dar.

(d) Die (neben der Normalverteilung) wichtigsten Verteilungen der Statistik sind die t–, die Chiquadrat– und die F–Verteilung. Erläutern Sie stichwortartig in welchen Zusammenhängen diese Verteilungen in der Vorlesung vorgekommen sind.

(e) Die A–priori–Verteilung des Ausschußanteils p eines Produktionsprozesses sei eine Beta–Verteilung $Be(5, 95)$. Bei einer zufälligen Entnahme von 10 Einheiten waren 2 Ausschuß. Wie lautet die A–posteriori–Verteilung von p ? Ermitteln Sie auch den A-posteriori–Bayes–Schätzwert von p.

[2] Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte.

Schriftliche Prüfung

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathematik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2–stündig mit Unterlagen

3.5.2000

A) Beispiele[1]

1. Eine stochastische Größe X nimmt den Wert 1 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ an. Der Rest der Wahrscheinlichkeit ist im Intervall (1, 5) kontinuierlich uniform verteilt.

(a) Zeichnen Sie die Verteilungsfunktion.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

(c) Bestimmen Sie den Median der Verteilung.

(d) Berechnen Sie $W\{1 \leq X < 3\}$.

2. Die stochastischen Größen X und Y haben die gemeinsame Dichtefunktion:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{für } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Ermitteln Sie die Randdichten von X und Y.

(b) Sind X und Y unabhängig? (Kommentar)

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

(d) Ermitteln Sie die durch $y = \frac{1}{3}$ bedingte Dichte von X. Zeichnen Sie diese Dichte.

3. Testen Sie mit Irrtumswahrscheinlichkeit $0,05$, ob den folgenden Daten eine Exponentialverteilung zu Grunde liegt:

107,3	50,8	61,7	31,6	98,2	87,3	68,5	115,3	22,3	17,1
120,2	62,3	47,2	105,3	48,3	67,2	50,6	103,4	122,1	105,2
48,1	36,2	24,1	78,2	16,3	22,8	34,2	88,3	29,3	154,1

Verwenden Sie den (zusammengesetzten) Chiquadrat–Test mit der Klasseneinteilung:

$$[0,40],\ (40,70],\ (70,100],\ (100,\infty)$$

[1] Pro Beispiel 4 Punkte.

B) Beantworten bzw. berechnen Sie: [2]

(a) Jährlich gibt es in Österreich etwa 40000 Eheschließungen. Berechnen Sie (approximativ) die Wahrscheinlichkeit, daß zumindest bei einem Paar beide Partner am 3.Mai geboren sind.

Formulieren Sie die der Berechnung zu Grunde liegenden Voraussetzungen.

(b) Die sG X ist logarithmisch normalverteilt, $X \sim LN(2,4)$. Bestimmen Sie die drei Quartile der Verteilung, d.h. bestimmen Sie das 0,25–, 0,50– und das 0,75–Quantile.

(c) Ein Professor weiß aus Erfahrung, daß die Punktezahl bei einer Abschlußprüfung eine stochastische Größe mit Mittel 75 und Varianz 25 ist.

Was läßt sich über die Wahrscheinlichkeit sagen, daß ein/e Student/in zwischen 65 und 85 Punkte erreicht?

Hinweis: Tschebyscheff'sche Ungleichung.

Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit, wenn man zusätzlich annimmt, daß die erreichte Punktezahl einer Normalverteilung folgt?

(d) Erklären Sie, was man unter einer Pivot–Größe versteht, und geben Sie ein Beispiel.

(e) Bestimmen Sie auf der Basis der folgenden fünf unabhängigen Beobachtungen einer normalverteilten stochastischen Größe:

95,6 83,3 101,2 102,8 88,5

ein 90%–Konfidenzintervall für den Mittelwert der Verteilung.

[2]Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte.

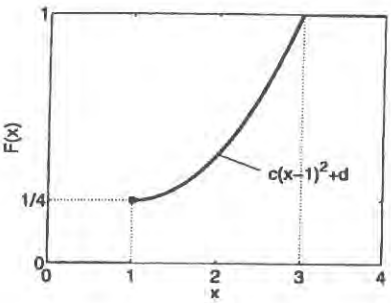
Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathematik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2–stündig mit Unterlagen

15.3.2000

A) Beispiele[1]

1. Die Verteilungsfunktion einer sG X hat die Gestalt:



(a) Ist die Verteilung kontinuierlich/ diskret/ gemischt?

(b) Ermitteln Sie die genaue Form von $F(x)$. (Bestimmen Sie c und d.)

(c) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$.

(d) Berechnen Sie den Median.

2. Die Tabelle zeigt die 2–dim. diskrete Verteilung eines stochastischen Vektors (X, Y):

		X: -1	X: 0	X: 1
Y	-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$
	0	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$
	1	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

Ermitteln Sie:

(a) die Randverteilungen von X und Y. Sind X und Y unabhängig? (Kommentar)

(b) den Korrelationskoeffizienten von X und Y.

(c) die Verteilung von $X + Y$.

(d) $\mathbb{E}(X + Y)$ und $Var(X + Y)$.

3. Die Kapazitäten (in Ampere–Stunden) von 10 Batterien (gleicher Art) sind gegeben:

140 136 150 144 148 152 138 141 143 151

Man betrachte die Daten als Stichprobe einer normalverteilten sG $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
Berechnen Sie:

(a) die plausiblen Schätzwerte für μ und σ^2.

(b) Konfidenzintervalle für μ und σ, jeweils mit ÜDW 0,90.

(c) die (approximative) Wahrscheinlichkeit, mit der die Kapazität einer Batterie größer als 150 [Ah] ist.

---

[1] Pro Beispiel 4 Punkte.

B) Beantworten bzw. berechnen Sie: [2]

(a) Ein diagnostischer Test zeigt in 99% der Fälle das korrekte Ergebnis, bei Erkrankten und bei nicht Erkrankten. Man weiß, daß 0,4% der Bevölkerung diese Erkrankung hat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person, deren Test die Erkrankung anzeigt, tatsächlich erkrankt?

Bonus-Punkt: Geben Sie eine anschauliche Erklärung für die (unerwartet?) geringe Wahrscheinlichkeit.

(b) Die Verteilungsfunktion der Lebensdauer [Jahre] eines Bauteils ist:

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\frac{t^4}{4}\right], \; t \geq 0 \qquad \big(F(t) = 0 \text{ sonst}\big)$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein bereits 1 Jahr alter Bauteil auch nach 2 Jahren noch intakt?

(c) Die sG X ist logarithmisch normalverteilt, $X \sim L(0,75\,;\,0,16)$. Berechnen Sie:

$$W\{2 < X < 3\}$$

(d) Wozu dient die Faltung von Dichten? Welche Additionstheoreme für Verteilungen kennen Sie? (Geben Sie zumindest zwei an.)

(e) Angenommen, 45% der Bevölkerung befürworten ein bestimmtes Vorhaben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind dann in einer Stichprobe des Umfangs 200 mehr als die Hälfte dafür? Verwenden Sie zur Berechnung den Zentralen Grenzverteilungssatz mit Stetigkeitskorrektur.

---

[2] Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte.

+ Statistik VIERTL

Schriftliche Prüfung

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathematik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2–stündig mit Unterlagen

26.1.2000

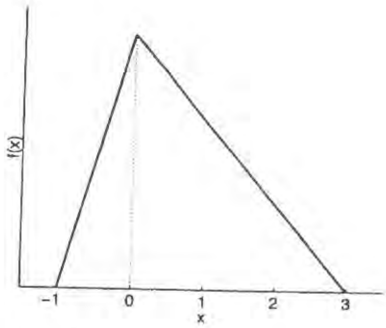
A) Beispiele[1]

1. Die Abbildung zeigt die Dichtefunktion einer sG X:

   (a) Ermitteln Sie die genaue Form der Dichte.

   (b) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion und erstellen Sie eine genaue Skizze.

   (c) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$.



2. Eine Firma bezieht die Zeilentrafos für ein bestimmtes TV–Modell von drei verschiedenenen Herstellern im Verhältnis 2:3:5. Es ist bekannt, daß die Lebensdauer dieser Trafos exponentialverteilt ist, mit Mittel 3000 Stunden (Hersteller 1), 3200 Stunden (Hersteller 2) bzw. 3500 Stunden (Hersteller 3).

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit arbeitet der Trafo eines solchen Modells länger als die Garantiezeit von einem Jahr ($\widehat{=}$ 1000 Stunden) ?

   (b) Ein Trafo fällt innerhalb der Garantiezeit aus; mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt er von Hersteller 1 (2, 3) ?

3. Die folgenden 24 Zahlen (der Größe nach geordnet; auf zwei Stellen abgeschnitten) werden von *MatLab* als standardnormalverteilte Zufallszahlen erzeugt:

-1.66	-1.33	-1.14	-0.83	-0.58	-0.43	-0.18	-0.13	-0.09	-0.03	0.05	0.11
0.12	0.17	0.28	0.29	0.32	0.71	0.72	1.06	1.18	1.19	1.62	2.18

   Überprüfen Sie das auf zwei Arten:

   (a) Ermitteln Sie (Voraussetzung: Normalverteilung) ein 95%-Konfidenzintervall für den Mittelwert μ. Läßt sich die Hypothese $\mu = 0$ vertreten?

   (b) Prüfen Sie mittels χ^2–Anpassungstest ($\alpha = 0,05$) die Hypothese, daß es sich um $N(0,1)$-verteilte Beobachtungen handelt.

   Eine bequeme Klasseneinteilung ist etwa: $(-\infty, z_{0.25}]$, $(z_{0.25}, 0]$, $(0, z_{0.75}]$, $(z_{0.75}, \infty)$
   ($z_p = p$ – Quantil der $N(0,1)$).

2) Beantworten bzw. berechnen Sie.

(a) Die Lebensdauer bestimmter Glühlampen ist exponentialverteilt mit Mittel 1000 Stunden. Auf einem Luster befinden sich 6 dieser Lampen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit brennen nach 500 Stunden noch genau 4 Lampen?

(b) Eine Münze (mit den Seiten „Kopf" und „Zahl") wird 100 Mal geworfen.

Geben Sie mit Hilfe der Tschebyscheff'schen Ungleichung eine Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit, mit der zwischen 40 und 60 Köpfe geworfen werden.

(c) Eine Münze (mit den Seiten „Kopf" und „Zahl") wird 100 Mal geworfen.

Berechnen Sie (möglichst genau) mit Hilfe des Zentralen Grenzverteilungssatzes die Wahrscheinlichkeit, mit der zwischen 40 und 60 Köpfe geworfen werden.

(d) Das Gewicht (in dag) bestimmter Orangen ist verteilt nach $N(21;\, 5)$.

Wieviele Orangen muß man in eine Schachtel geben, wenn man mit Wahrscheinlichkeit 0,95 mindestens 10 kg Füllgewicht haben möchte?

Hinweis: 1 kg = 100 dag

(e) $X_1, \ldots, X_n$ ist eine Stichprobe aus einer auf dem Intervall $[0,\, a]$ (mit $a > 0$) kontinuierlich uniform verteilten sG X.

Erklären Sie, was unter der „Unverzerrtheit" eines Schätzers zu verstehen ist, und untersuchen Sie, ob:

$$S(X_1, \ldots, X_n) = 2 \cdot \overline{X}_n$$

ein unverzerrter Schätzer für a ist.

[2] Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte.

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathematik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2-stündig mit Unterlagen

1.12.1999

A) Beispiele[1]

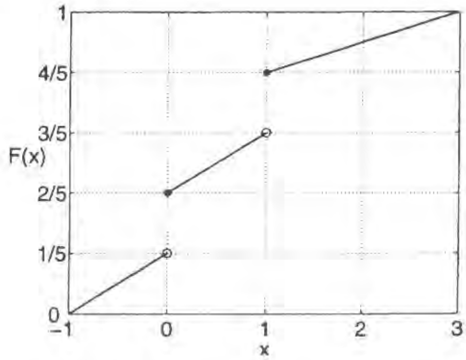
1. Die Abbildung zeigt die Verteilungsfunktion $F(x)$ einer sG X:

(a) Ist die Verteilung diskret, kontinuierlich oder gemischt?

(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$.

(c) Ermitteln Sie den Median.

(d) Ermitteln Sie das 0,95–Quantil.



2. Körpergröße H (in cm) und Gewicht G (in kg) einer (Sub–) Population seien 2–dimensional normalverteilte sGn:

$$(H, G) \sim N\Big(170,4;\ 68,1;\ 77,3;\ 133,1;\ 0,73\Big)$$

(a) Ermitteln Sie die beiden Randverteilungen von H und G.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person schwerer als 80 kg ?

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine 180 cm große Person schwerer als 80 kg ?

(d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine 80 kg schwere Person größer als 180 cm ?

3. Über einen längeren Zeitraum wurde die Zahl X der Reparaturen je Monat bei mehreren Annahmestellen einer Firma registriert:

Zahl der Reparaturen/Monat	0	1	2	3	4	5	6 und mehr
Häufigkeit	16	17	13	10	3	1	0

(a) Wenn man davon ausgeht, daß die Reparaturen „zufällig" vorkommen, d.h. wenn man von einer Poissonverteilung P_μ für X ausgeht, was ist dann der plausible Schätzwert von μ ?

(b) Prüfen Sie mittels χ^2–Anpassungstest (mit $\alpha = 0,05$), ob die Hypothese einer Poissonverteilung für X zutrifft. (Achten Sie auf die Regel $n\widehat{w}_i \geq 5$!)

---

[1] Pro Beispiel 4 Punkte.

2) Beantworten bzw. berechnen Sie.[2]

(a) In einer Schachtel befinden sich 100 Kugeln, davon sind 50 weiß und 50 schwarz. Zwei Kugeln werden zugleich (d.h. durch Ziehungen ohne Zurücklegen) entnommen. Welches der beiden folgenden Ereignisse ist wahrscheinlicher?

„Die Kugeln sind von gleicher Farbe."

„Die Kugeln sind von verschiedener Farbe."

(b) Von einer normalverteilten sG $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ ist folgendes bekannt:

$$W\left\{X > 50\right\} = 0,8 \qquad W\left\{X < 120\right\} = 0,9$$

Bestimmen Sie μ und σ.

(c) Ein Hersteller von elektronischen Geräten kauft 1000 ICs von einer Firma. Er weiß aus Erfahrung, daß bei dieser Firma im Durchschnitt jeder hundertste IC dieser Art unbrauchbar ist. Mit welcher (approximativen) Wahrscheinlichkeit sind von den gekauften ICs mindestens 10 unbrauchbar?

(d) Von der Varianz–Kovarianzmatrix eines 2–dimensional normalverteilten stochastischen Vektors (X, Y) mit $\rho_{X,Y} = \dfrac{3}{4}$ ist folgendes bekannt:

$$\begin{pmatrix} 4 & * \\ 15 & * \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die fehlenden Werte.

(e) Die folgenden sechs (der Größe nach geordneten) Beobachtungen stammen von einer logarithmisch normalverteilten sG $X \sim LN\left(\mu, \sigma^2\right)$:

627,1 642,4 695,7 785,6 884,3 969,4

Ermitteln Sie Schätzwerte für μ und σ.

[2] Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte.

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathem ıtik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2–stündig mit Unterlagen

13.10.1999

A) Beispiele[1]

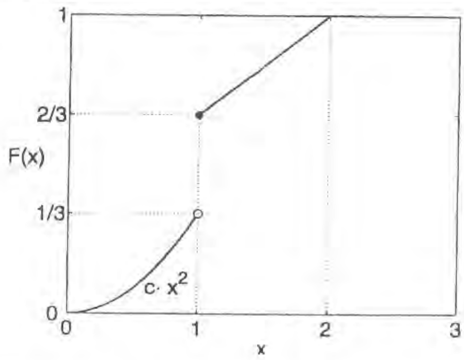
1. Die Abbildung zeigt die Verteilungsfunktion einer sG X:

(a) Ist die Verteilung diskret, kontinuierlich oder gemischt?

(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$.

(c) Ermitteln Sie das 0,75–Quantil.

(d) Berechnen Sie $\mathbb{E}\left(\sqrt{X}\right)$.



2. Zwei (regelmäßige) Tetraeder T_1 und T_2 mit den Augenzahlen 1,2,3,4 werden geworfen. X_1 und X_2 seien die Augenzahlen der jeweils unten liegenden Seite.

(a) Ermitteln Sie die gemeinsame Verteilung (2–dim. Tabelle) von $S := X_1 + X_2$ und $D := X_1 - X_2$ und die beiden Randverteilungen von S und D.

(b) Sind S und D stochastisch unabhängig? (Kommentar!)

(c) Zeigen Sie, daß S und D unkorreliert sind. (Dazu genügt es, zu zeigen, daß $\mathrm{Cov}(S, D) = 0$!)

3. Bei den folgenden Daten handelt sich um zwei (unabhängige) Stichproben aus normalverteilten Grundgesamtheiten, $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $N(\mu_2, \sigma_2^2)$:

I	101	91	95	94	97	105	100	103	100	98
II	90	94	100	96	93	89	97	93		

(a) Prüfen Sie mittels F–Test (α=0,05), ob die beiden Varianzen übereinstimmen.

(b) Prüfen Sie mittels (Zwei–Stichproben–) t–Test, ob die beiden Mittelwerte übereinstimmen. Nehmen Sie zuerst $\alpha = 0,05$ und dann $\alpha = 0,01$ und kommentieren Sie die Ergebnisse.

(c) Ermitteln Sie ein 95%–Konfidenzintervall für die Differenz $\Delta = \mu_1 - \mu_2$ der Mittelwerte. Vergleichen Sie mit (b).

---

[1]Pro Beispiel 4 Punkte

2) Beantworten bzw. berechnen Sie.[2]

(a) An einem Zigarettenautomaten gibt es 10 Knöpfe (für die verschiedenen Marken). Folgendes ist bekannt:

- Ein Knopf (unbekannt, welcher) funktioniert nie.
- Zwei Knöpfe (unbekannt, welche) funktionieren die Hälfte der Zeit.
- Die restlichen Knöpfe funktionieren immer.

Da es Ihnen auf die Marke nicht ankommt, drücken Sie willkürlich einen Knopf.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben Sie den nie funktionierenden Knopf gedrückt, wenn sich nichts tut?

(b) Ein TV–Gerät enhält eine Bildröhre, deren Lebensdauer exponentialverteilt ist, mit Mittel 10000 Stunden. Das Gerät ist durchschnittlich 6 Stunden pro Tag in Betrieb.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es innerhalb der ersten 5 Jahre keinen Ausfall?

(c) Ein File mit 10000 Zeichen wird von einem Computer an einen anderen übertragen. Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Zeichen fehlerhaft übertragen wird, ist 0,001.

Mit welcher (approximativen) Wahrscheinlichkeit werden mindestens 10 Zeichen fehlerhaft übertragen?

(d) Ermitteln und skizzieren Sie das Ergebnis der Faltung von zwei unabhängigen, auf $M = \{0, 1, 2, 3\}$ diskret uniform verteilten, sGn.

(e) $X_1, \ldots, X_n$ ist eine Stichprobe aus einer normalverteilten sG mit bekanntem Mittelwert μ_0, $X \sim N(\mu_0, \sigma^2)$. Welche der folgenden Schätzer für σ^2 sind unverzerrt?

1. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \mu_0\right)^2$
2. $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \mu_0\right)^2$
3. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$
4. $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$

[2] Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte.

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathematik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2–stündig mit Unterlagen

23.6.1999

A) Beispiele[1]

1. Die Verteilung einer sG X sei gegeben durch:

$$W\{X = 1\} = \frac{1}{5}, \qquad f(x) = \frac{12}{5\,x^4} \quad \text{für} \quad x > 1 \quad (= 0 \ \text{sonst})$$

   (a) Zeigen Sie, daß es sich um eine „richtige" Verteilung handelt.

   (b) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion und erstellen Sie eine genaue Zeichnung.

   (c) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$ und $Var(X)$.

2. Ein System enthalte eine Komponente, deren Lebensdauer T [h] exponentialverteilt ist, mit Mittel 125 [h]. Fällt die Komponente aus, wird sie unverzüglich durch eine (gleichartige) neue ersetzt. Das System wird für eine Betriebszeit von 5000 [h] benötigt.

   (a) Angenommen, man hat insgesamt 40 (= 5000/125) Komponenten. Welche (exakte) Verteilung hat dann die Gesamtlebensdauer $T_g = \sum_{i=1}^{40} T_i$? Mittel, Streuung von T_g ?

   (b) Mit welcher (approximativen) Wahrscheinlichkeit kommt man mit insgesamt 40 Komponenten über die benötigte Betriebszeit?

   (c) Wieviele Komponenten muß man bereitstellen, wenn man mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 für die benötigte Betriebszeit auskommen möchte?

   Verwenden Sie bei (b) und (c) den Zentralen Grenzverteilungssatz.

3. Werkstücke aus Kunststoff wurden periodisch bis zum Bruch kurzzeitigen Belastungen (z.B. starken Verformungen) unterworfen. Bei insgesamt 50 Werkstücken ergab sich:

Anzahl von Belastungen bis zum Bruch

Anzahl k	1	2	3	4	5	6	≥ 7
Häufigkeit	23	13	8	4	1	1	0

   (a) Wenn man annimmt, daß die obigen Daten Beobachtungen einer geometrisch verteilten sG X,

$$W\{X = k\} = p\,(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

   sind, was ergibt sich dann als plausibler Schätzwert für p ?

   (b) Testen Sie mittels χ^2–Anpassungstest (mit $\alpha = 0,05$), ob die Annahme einer geometrischen Verteilung gerechtfertigt ist.

   Achten Sie darauf, daß die zu erwartenden Klassenhäufigkeiten nicht zu klein sind.

---

[1] Pro Beispiel 4 Punkte.

B) Beantworten bzw. berechnen Sie: [2]

(a) Auf einer Kreislinie befinden sich $n > 2$ Punkte (in äquidistanten Abständen). Zwei (verschiedene) Punkte werden zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind sie benachbart? Ermitteln Sie einen – möglichst einfachen – allgemeinen Ausdruck.

Für $n = 2$ und $n = 3$ ist diese Wahrscheinlichkeit natürlich 1.

(b) Ein Hersteller von Glühlampen möchte, daß höchstens eine von 1000 Lampen innerhalb der ersten 5 Stunden ausfällt. Wie groß müßte für diese Zielsetzung die mittlere Lebensdauer dieser Lampen zumindest sein?

Man nehme an, daß die Lebensdauern exponentialverteilt sind.

(c) Jemand möchte die genau 21 m lange Seite seines Grundstücks mit einem Holzzaun eingrenzen. Dazu kauft er 10 Einheiten zu je (nominell) 2 m Länge. Tatsächlich sind die Längen der Einheiten aber normalverteilt, mit Mittel 2,05 m und Streuung 0,1 m. Weiter kauft er noch 11 Metallpfosten von je (exakt) 9 cm Dicke, die zwischen den Holzeinheiten (bzw. an den beiden Rändern) plaziert werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird er feststellen, daß der Zaun insgesamt (i) zu kurz; (ii) zu lang; (iii) genau richtig lang ist?

Summe von unabhängigen, normalverteilten sGn ...

(d) Ermitteln und skizzieren Sie die Dichte des Maximums von 3 unabhängigen, auf dem Intervall [0, 10] kontinuierlich uniform verteilten, sGn.

(e) Die A-priori-Verteilung des Anteils $\widetilde{p}$ der Personen, die an einer Pollenallergie leiden, sei gegeben durch die Dichte:

$$\pi(p) = 2\,(1-p), \quad 0 \le p \le 1$$

8 Personen werden untersucht, darunter befinden sich 3 Allergiker. Ermitteln Sie (i) die A-posteriori-Verteilung, sowie (ii) den (A-posteriori-) Bayes-Schätzer dieses Anteils.

Resultate aus der Vorlesung/Übung können verwendet werden.

[2] Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte.

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathematik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2–stündig mit Unterlagen

21.4.1999

A) Beispiele[1]

1. Für eine diskrete sG X gelte:

$$W\{X = k\} = \begin{cases} c\,(k+1) & \text{für } k = 0,1,2,3,4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie c.

(b) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion und erstellen Sie eine genaue Zeichnung.

(c) Berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz von X.

(d) Simulieren Sie auf der Basis der folgenden (kontinuierlich auf $(0,1)$ uniform verteilten, unabhängigen) Zufallszahlen:

0,0470 0,6789 0,6793 0,9347 0,3835 0,5194 0,8310 0,0346

acht (unabhängige) Beobachtungen von X.

2. Die (normalverteilten) Messungen der Zugfestigkeit an 12 Textilfasern, von denen 6 vorher einer speziellen Behandlung unterworfen werden, und 6 nicht, ergeben das folgende Bild (Werte in entsprechenden Einheiten):

Keine Behandlung	3,5	2,6	3,4	3,9	3,4	3,8
Mit Behandlung	4,5	3,9	3,2	4,8	4,3	4,1

(a) Prüfen Sie zunächst mit $\alpha = 0,05$, ob die Varianzen übereinstimmen.

(b) Testen Sie mit $\alpha = 0,05$, ob die Behandlung einen Einfluß auf die Zugfestigkeit hat.

(c) Ermitteln Sie ein Konfidenzintervall (ÜW 0,95) für die mittlere Größe des Einflusses.

3. Bei einem Spiel, bei dem 5 Würfel geworfen werden, bestehen Zweifel hinsichtlich der „Echtheit" der Würfel. Zur Überprüfung werden die fünf Würfel 200 Mal geworfen und die jeweils erzielte Anzahl von Sechsern registriert:

Anzahl der Sechser	Häufigkeit
0	60
1	88
2	39
3, 4 oder 5	13

(a) Welche Verteilung hat die Anzahl der Sechser bei fünf echten Würfeln?

(b) Prüfen Sie mittels Chiquadrat–Anpassungstest ($\alpha = 0,05$) die Echtheit der Würfel.

---

[1] Pro Beispiel 4 Punkte.

(a) Aus einer Kommission, bestehend aus 8 Mitgliedern der Partei A, 4 Mitgliedern der Partei B und 4 Mitgliedern der Partei C, werden drei Personen durch Los ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehören diese Personen alle zu verschiedenen Parteien?

(b) X sei eine normalverteilte sG, $X \sim N(5,4)$. Berechnen Sie:

$$W\{\,|X-5|>3\}$$

(c) Ein Student möchte die Dicke seines Druckerpapiers messen; dazu steht ihm ein Meßschieber zur Verfügung, dessen Meßfehler (in mm) nach $N(0;\,0,5^2)$ verteilt ist. Zur Erhöhung der Genauigkeit wählt er folgende Vorgangsweise: Er legt n Blätter übereinander, mißt deren gemeinsame Dicke mit dem Meßschieber, und teilt das Ergebnis durch n. Wieviele Blätter muß er zumindest übereinander legen, wenn die Streuung des resultierenden Fehlers kleiner als $0,02\,mm$ sein soll?

(d) Ermitteln Sie die Dichte des Minimums einer Stichprobe des Umfangs 5 aus einer exponentialverteilten SG mit Mittel 1.

(e) X sei eine auf dem Intervall $(0,\theta)$ $(\theta>0)$ kontinuierlich uniform verteilte sG, $X \sim U_{0,\theta}$. Zur Schätzung von θ verwendet jemand den Schätzer (auf Basis einer Stichprobe $X_1,\dots,X_n$):

$$\widehat{\theta} = 2\,\overline{X}_n$$

Untersuchen Sie diesen Schätzer auf Unverzerrtheit und Konsistenz.

[2] Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte.

Schriftliche Prüfung

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathematik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2–stündig mit Unterlagen

14.10.1998

A) Beispiele[1]

1. Die Grünphase (einschließlich Blinkphase) einer Fußgängerampel betrage 25 Sekunden, die Rotphase 75 Sekunden. Ermitteln Sie:

   (a) die Verteilungsfunktion (mit genauer Zeichnung)

   (b) den Median, das Mittel und die Streuung

   der Wartezeit von zufällig ankommenden Fußgängern.

   (c) Erzeugen Sie auf Basis der folgenden (uniform auf $(0,1)$ verteilten) Zufallszahlen:

   $$0,2406 \quad 0,7365 \quad 0,2889 \quad 0,7951 \quad 0,4548$$

   fünf simulierte Wartezeiten bei dieser Ampel.

2. Auf einem Würfel sind 2 Einser, 2 Zweier und 2 Dreier. Jemand wirft diesen Würfel. Erzielt er dabei den Wert X, so wirft er anschließend X Münzen. Davon fallen Y auf Kopf.

   (a) Bestimmen Sie die 2–dim. Verteilung von (X,Y) und die Randverteilung von Y. Sind X und Y unabhängig?

   (b) Berechnen Sie $\mathbb{E}(Y)$ und $Var(Y)$.

   (c) Ermitteln Sie die Regressionsfunktion von Y bezüglich X, d.h. $\mathbb{E}(Y|X = x)$ für $x = 1,2,3$.

3. Gleichartige Bauteile von Firma A und Firma B werden einer vergleichenden Lebensdauerprüfung unterzogen:

	Stunden							
Firma A	955,4	1029,9	1224,6	1036,1	1157,7	1064,0	1086,4	965,1
	973,0	1198,5						
Firma B	1195,5	1120,1	1123,5	1286,2	1194,4	1251,3	1239,7	1275,6

   Man nehme an, daß es sich in beiden Fällen um normalverteilte Beobachtungen handelt.

   (a) Testen Sie, ob die Streuungen bei beiden Herstellern übereinstimmen ($\alpha = 0,1$).

   (b) Gibt es einen Unterschied bei den mittleren Lebensdauern ($\alpha = 0,05$) ? Falls ja, ermitteln Sie ein 95%-Konfidenzintervall für die Differenz der mittleren Lebensdauern.

[1] Pro Beispiel 4 Punkte

B) Beantworten bzw. berechnen Sie: [2]

(a) Zwei Personen werfen je eine (symmetrische) Münze 5 mal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten sie dabei dieselbe Anzahl von Köpfen?

(b) Eine Komponente mit exponentialverteilter Lebensdauer funktioniert laut Hersteller mit Wahrscheinlichkeit 0,9 für mehr als 50 Stunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert dann eine solche Komponente für mehr als 100 Stunden?

(c) Eine Maschine erzeugt Bolzen mit einem Ausschußanteil von 8%. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit mit der eine Packung zu 500 Stück zwischen 35 und 45 defekte Bolzen enthält.
(Verwenden Sie eine Approximation; rechtfertigen Sie ihre Zulässigkeit.)

(d) $X_1, \ldots, X_n$ sei eine Stichprobe einer auf dem Intervall $(0,\theta)$ (kontinuierlich) uniform verteilten SG, $X \sim U_{0,\theta}$. Geben Sie auf Basis dieser Stichprobe einen unverzerrten Schätzer für θ an und überprüfen Sie, ob er konsistent ist.

(e) Eine Stichprobe des Umfangs 20 wird einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert θ und Varianz 1 entnommen. Das arithmetische Mittel der Stichprobe ist $\overline{x} = 10$ und die A-priori-Verteilung von θ ist eine $N\left(0, \frac{1}{5}\right)$-Verteilung. Ermitteln Sie die A-posteriori-Verteilung sowie den Bayes-Schätzer von θ.

[2] Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte

Schriftliche Prüfung

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathematik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2-stündig mit Unterlagen

24.6.1998

A) Beispiele[1]

1. Die Lebensdauer eines Produkts sei eine sG mit Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^5} & x \geq 10 \\ 0 & x < 10 \end{cases}$$

Ermitteln Sie:

(a) c.

(b) die Verteilungsfunktion (mit genauer Skizze!).

(c) den Median (= 0,5–Quantil) der Verteilung.

(d) $\mathbb{E}(X)$ und $Var(X)$.

2. Eine Münze werde fünfmal geworfen. Die sG X beschreibe die Anzahl der „Köpfe" unter den ersten zwei Würfen; die sG Y die Anzahl der „Köpfe" bei allen fünf Würfen.

(a) Ermitteln Sie die Verteilungen von X und Y (Um welche Verteilungen handelt es sich?) sowie die gemeinsame Verteilung von (X, Y).

(b) Diskutieren Sie die stochastische Un/Abhängigkeit von X und Y.

(c) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten $\rho(X, Y)$.

3. Schalter eines bestimmten Typs wurden einer Lebensdauerprüfung unterzogen. Gezählt wurde bei 25 Schaltern die Anzahl der Betätigungen (= Lebensdauer) bis zum Ausfall. Dabei ergaben sich die folgenden Ausfallwerte (in 10^4 Betätigungen):

17,5	5,0	89,8	78,2	17,0
10,6	129,9	25,6	72,2	23,3
10,0	14,1	1,9	4,5	17,1
63,7	11,3	23,4	9,5	2,5
7,3	35,7	81,4	8,2	29,7

Prüfen Sie mittels χ^2–Anpassungstest (mit $\alpha = 0,1$), ob eine Exponentialverteilung angenommen werden kann. Verwenden Sie dabei z.B. die folgende Klasseneinteilung (Achten Sie aber darauf, daß die zu erwartenden Klassenhäufigkeiten nicht zu klein werden !):

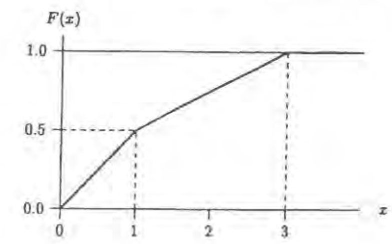
$$[0, 10),\ [10, 25),\ [25, 45),\ [45, 85),\ [85, \infty)$$

Hinweis: Ermitteln Sie zuerst den plausiblen Schätzwert für den Parameter der Exponentialverteilung.

[1] Pro Beispiel 4 Punkte

B) Beantworten bzw. berechnen Sie: [2]

(a) Handelt es sich bei der folgenden Funktion um die Verteilungsfunktion einer diskreten, kontinuierlichen oder gemischten Verteilung ? Erstellen Sie außerdem eine genaue Skizze der entsprechenden Punktwahrscheinlichkeiten und/oder der entsprechenden Dichtefunktion.



(b) Ein System bestehe aus fünf parallel geschalteten Bauelementen, deren Lebensdauern, unabhängig voneinander, exponentialverteilt sind, jeweils mit Mittel 100. Ermitteln Sie die Verteilungs– und Dichtefunktion der Lebensdauer des Systems.

(c) Eine Packung von Schrauben enthalte 1000 Stück; erfahrungsgemäß erfolgt die Produktion mit 1% Ausschuß. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in einer Packung mehr als 15 Schrauben fehlerhaft sind?

Hinweis: Verwenden Sie eine Approximation; rechtfertigen Sie ihre Zulässigkeit.

(d) Bei einer Befragung von 100 Personen gaben 15 an, ein bestimmtes Produkt zu kennen. Geben Sie ein 95%–Konfidenzintervall für den Bekanntheitsgrad p $(0 \leq p \leq 1)$ an.

(e) Ermitteln Sie auf der Basis der Befragung von (d) den Bayes–Schätzer des Bekanntheitsgrades, falls a-priori für p eine Verteilung mit Dichte:

$$\pi(p) = 2\,(1-p),\ 0 \leq p \leq 1$$

genommen wird.

[2] Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte

Schriftliche Prüfung

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathematik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2–stündig mit Unterlagen

15.5.1998

A) Beispiele[1]

1. Bei einer Fluggesellschaft weiß man nach längerer Beobachtung, daß im Durchschnitt 8% der Reservierungen für einen Flug storniert, umgebucht, etc. werden. Um eine bessere Auslastung zu erzielen, werden daher Überbuchungen vorgenommen. Man nehme an, daß es für einen Flug 180 Plätze gibt.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommen alle einen Platz, wenn 200 Reservierungen vorgenommen werden ?

   (b) Wieviele Reservierungen können höchstens vorgenommen werden, wenn mit einer Wahrscheinlichkeit von (mindestens) 0,95 kein Passagier abgewiesen werden soll ?

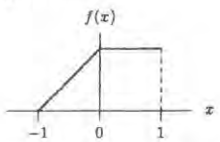
   Verwenden Sie für die Berechnungen eine passende Approximation (mit Stetigkeitskorrektur); rechtfertigen Sie deren Verwendbarkeit sowie Zulässigkeit !

2. Die Dichtefunktion einer sG X habe die in der Abbildung gezeigte Form:

   (a) Geben Sie die genaue Form der Dichte an.

   (b) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion von X und erstellen Sie eine genaue Zeichnung.

   (c) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$ und $Var(X)$.



3. Der (normalverteilte) Benzinverbrauch ($l/100km$) zweier Autotypen T_1 und T_2 wurde mehrmals festgestellt:

T_1	7,61	11,01	11,78	8,55	10,40	11,82		
T_2	16,01	19,34	16,00	15,82	13,91	14,71	15,11	12,75

   (a) Entscheiden Sie mit 90% Sicherheit, ob die Streuungen beider Verbrauchswerte gleich sind.

   (b) Entscheiden Sie mit 95% Sicherheit, ob der mittlere Verbrauch bei beiden Typen als gleich angesehen werden kann und ermitteln Sie ein 95%–Konfidenzintervall für die Differenz der Mittelwerte $\Delta = \mu_2 - \mu_1$.

[1] Pro Beispiel 4 Punkte

B) Beantworten bzw. berechnen Sie:[2]

(a) Eine Schachtel enthält 3 Münzen mit einem „Kopf" auf beiden Seiten, 4 Münzen mit einer „Zahl" auf beiden Seiten und 2 faire Münzen. Eine Münze wird zufällig ausgewählt und einmal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt sie auf „Kopf" ?

(b) Für die SGn X_1, X_2, X_3 gelte $E(X_i) = 1$, $Var(X_i) = 1$, $(i = 1, 2, 3)$ und daß je zwei der sGn eine Korrelation von $\frac{1}{2}$ aufweisen. Berechnen Sie Mittel und Varianz von:

$$X_1 + 2\,X_2 + 3\,X_3$$

(c) X_1, X_2, X_3 seien drei unabhängige Beobachtungen einer nach $U_{(0,1)}$ verteilten sG X; ermitteln Sie die Verteilungs- und Dichtefunktion von $Y = min(X_1, X_2, X_3)$.

(d) Für die gemeinsame Verteilung von zwei SGn X und Y gelte:

$$(X, Y) \sim N\left(100, 200, 16, 25, \frac{1}{2}\right)$$

Ermitteln Sie die Regressionsfunktionen von Y bezüglich X und von X bezüglich Y und geben Sie eine Interpretation dieser Funktionen.

(e) Schätzen Sie auf der Basis der folgenden Beobachtungen einer kontinuierlichen sG ihre Verteilungsfunktion (genaue Zeichnung) und diskutieren Sie die Eigenschaften der Schätzfunktion.

0,91 1,22 1,28 0,02 2,33

[2] Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte.

Schriftliche Prüfung

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathematik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2–stündig mit Unterlagen

22.4.1998

A) Beispiele[1]

1. Zwei Maschinen M_1 und M_2 fertigen Drehteile der gleichen Art (im Verhältnis $3:2$). Für deren Durchmesser ist ein Toleranzbereich von $250,0 \pm 2,0\,mm$ vorgeschrieben. Die Durchmesser können in guter Näherung als normalverteilt angesehen werden und zwar bei M_1 mit $\mu_1 = 249,0\,mm$ und $\sigma_1 = 1,0\,mm$, bei M_2 mit $\mu_2 = 249,5\,mm$ und $\sigma_2 = 1,5\,mm$.
   (a) Welche Maschine hat den größeren Ausschußanteil ?
   (b) Welcher Anteil der (Gesamt-) Fertigung entspricht der Vorschreibung ?
   (c) Ein zufällig der Fertigung entnommener Drehteil erweist sich als Ausschuß; mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt er von M_1 ? M_2 ?
   (d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine Lieferung zu 100 Stück mindestens 80 brauchbare Drehteile ?
   Verwenden Sie eine Approximation – rechtfertigen Sie deren Zulässigkeit !

2. Eine (symmetrische) Münze wird dreimal geworfen: X sei die Zahl der „Köpfe" unter den ersten zwei Würfen und Y die Zahl der „Adler" unter den letzten zwei Würfen.
   Bei AAK gilt beispielsweise $X = 0$ und $Y = 1$.
   (a) Ermitteln Sie die Verteilung von (X, Y) sowie die beiden Randverteilungen.
   (b) Diskutieren Sie die (Un–)Abhängigkeit von X und Y.
   (c) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten von X und Y.

3. Es bestehen Zweifel, ob für die Lebensdauer (gemessen in h) von gewissen mechanischen Bauteilen eine Normalverteilung angenommen werden kann. Zur Klärung werden 150 Bauteile einer Lebensdauerprüfung unterzogen. In der folgenden Tabelle sind die Lebensdauerwerte bereits klassiert (Stichprobenmittel $\bar{x} = 816,7\,h$; Stichprobenstreuung $s = 586,1\,h$):

Klasse	H_j
0 ... 250	20
250 ... 500	38
500 ... 750	26
750 ... 1000	17
1000 ... 1250	19
1250 ... 1500	8
1500 ... 1750	9
1750 ... 2000	5
2000 ... 2250	4
2250 ... 2500	3
2500 ... 2750	1

   Entscheiden Sie die Frage mittels χ^2-Test (mit $\alpha = 0,05$).
   Achten Sie darauf, daß die zu erwartenden Klassenhäufigkeiten nicht zu klein sind !

[1] Pro Beispiel 4 Punkte.

B) Beantworten bzw. berechnen Sie: [2]

(a) A, B und C seien drei unabhängige Ereignisse mit $W(A) = W(B) = W(C) = 0,1$; berechnen Sie:

$$W(A \cup B^c \cup C^c)$$

(b) Es sei bekannt, daß ein Bauteil mit exponentialverteilter Lebensdauer (Mittel $= 100\ ZE$) nach $200\ ZE$ noch nicht ausgefallen ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt der Bauteil innerhalb der nächsten $10\ ZE$ aus ?

(c) X und Y seien zwei unabhängige, standardnormalverteilte SGn; ermitteln Sie die Verteilung von:

$$Z = 4X - 6Y + 18$$

(d) Ermitteln Sie, auf der Basis einer Stichprobe des Umfangs n, den linearen effizienten Schätzer für den Mittelwert einer exponentialverteilten SG X und zeigen Sie, daß dieser Schätzer konsistent ist.

(e) Ermitteln Sie, auf der Basis einer Stichprobe des Umfangs n, den plausiblen Schätzer des Parameters $\theta > 0$ einer SG X mit Dichte:

$$f(x|\theta) = \theta\,(1-x)^{\theta-1},\ 0 < x < 1\ (= 0 \text{ sonst})$$

[2] Jeweils 1 Punkt. Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte.

Schriftliche Prüfung

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Studienrichtung: Informatik/Versicherungsmathematik
Vorlesung: o.Prof. R. Viertl
Übung/schriftl. Prüfung: W. Gurker
2–stündig mit Unterlagen

13.3.1998

A) Beispiele[1]

1. 200Ω–Widerstände werden zu 60% auf einer neuen Maschine M_1 und zu 40% auf einer älteren Maschine M_2 gefertigt. M_1 produziert normalverteilte Widerstände mit Mittel 200Ω und Streuung 10Ω; die Widerstände von M_2 sind normalverteilt mit Mittel 202Ω und Streuung 12Ω. Ein Widerstand ist brauchbar, falls sein Wert zwischen 182Ω und 210Ω liegt.

   (a) Welcher Anteil der Produktion ist brauchbar ?

   (b) Wieviele brauchbare Widerstände kann man in einer Packung zu 100 Stück erwarten ?

   (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine Packung zu 100 Stück mindestens 80 brauchbare Widerstände ?
   (Verwenden Sie eine Approximation – rechtfertigen Sie deren Zulässigkeit !)

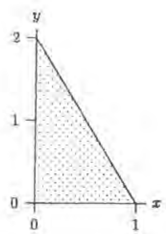
2. Die 2–dimensionale SG (X, Y) ist auf dem schattierten Bereich uniform verteilt.

   (a) Ermitteln Sie die genaue Form der gemeinsamen Dichte von X und Y.

   (b) Sind X und Y unabhängig ?
   (Argumentieren Sie ohne Rechnung !)

   (c) Ermitteln Sie die Randdichten von X und Y (jeweils plus Skizze).

   (d) Ermitteln Sie die Regressionsfunktion von Y bezüglich X (plus Skizze).
   (Die Regressionsfunktion läßt sich auch ohne Rechnung ermitteln !)



3. Für einen Vergleich der (normalverteilten) Zugfestigkeit von Drähten, die von verschiedenen Herstellern A und B stammen, wird die Reislast an jeweils 8 Drähten ermittelt (Angaben in N):

A:	240	243	239	245	237	240	244	241
B:	249	243	241	246	247	254	250	243

   (a) Testen Sie, ob die Streuungen bei beiden Herstellern übereinstimmen. ($\alpha = 0.05$)

   (b) Gibt es einen Unterschied in der (mittleren) Zugfestigkeit ? ($\alpha = 0.05$). Falls ja, ermitteln Sie ein 95%–Konfidenzintevall für die Differenz der mittleren Reislasten.

[1] Pro Beispiel 4 Punkte.

B) Beantworten bzw. berechnen Sie (Punkte in Klammern): [2]

(a)(1) X sei eine auf $(-1, 1)$ kontinuierlich uniform verteilte SG. Ermitteln Sie die Verteilung (d.h. Verteilungs– und Dichtefunktion) von $Y = X^2$.

(b)(1) Die Lebensdauer T eines Bauteils sei exponentialverteilt. Berechnen Sie (μ=Mittel; σ=Streuung):

$$W\{T \leq \mu + \sigma | T > \mu\}$$

(c)(1) Gibt es einen stochastischen Vektor (X, Y) mit:

$$\mathbb{E}(X) = 0 \quad \mathbb{E}(Y) = 1 \quad \mathbb{E}(X^2) = 1 \quad \mathbb{E}(Y^2) = 10 \quad \mathbb{E}(X \cdot Y) = 1 \quad ?$$

Falls ja, geben Sie ein konkretes Beispiel.

(d)(2) Ermitteln Sie auf der Basis einer Stichprobe des Umfangs n den plausiblen Schätzer des Parameters μ einer logarithmisch normalverteilten SG $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$.

[2] Für eine positive schriftliche Prüfung insgesamt mindestens 9 Punkte