Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
TU Wien

SS 2001

Numerische Mathematik für Informatiker

Prüfung am 13. März 2001

[redacted]	[redacted]	881/ [redacted]
Name	Vorname	Kennzahl / Matrikelnummer

Beispiel 1	Beispiel 2	Beispiel 3	Gesamt
a) b) c) d)	a) b) c) d)	a) b) c)	

Der gesamte Rechengang ist auf den beiliegenden Blättern zu dokumentieren.

Zusätzlich beigefügte Zetteln werden bei der Korrektur nicht berücksichtigt.

1) (10 Punkte)

Der Programmabschnitt

```
x = -20;
term(1) = 1;  summe(1) = 1; k = 0;   (k+1)
while abs(term(k+1)) > const*abs(summe)
   k = k + 1;
   term(k+1) = term(k)*x/k;
   summe(k+1) = summe(k) + term(k+1);
end
```

soll eine Approximation einer Funktion liefern.

a) Welche Funktion soll approximiert werden?

Antwort zu a):

$f(x) = e^x$

b) Wie muß die Konstante `const` gesetzt werden, damit die maximal mögliche Genauigkeit erreicht wird, aber andererseits keine überflüssigen Rechenschritte ausgeführt werden?

Antwort zu b):

c) Das Programm liefert (wenn die Konstante `const` optimal gesetzt ist) statt des erwarteten Resultats $2.061153 \cdot 10^{-9}$ das völlig unbefriedigende Resultat `4.85e-009`. Was ist die Ursache dieses Programm-Versagens? (genaue verbale Begründung)

Antwort zu c):

d) Durch welche einfache Modifikation des Programms kann das Problem beseitigt werden? (mit Begründung)

Antwort zu d):

2) (10 Punkte)

Betrachtet werden 3×3-Matrizen der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon & 1+\delta \\ 1 & 1+\delta & 1+\varepsilon \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon, \delta \text{ beliebig.}$$

a) Führen Sie die LU-Zerlegung von A (ohne Pivotsuche) aus (alles als Formelausdruck in ε, δ anschreiben). Für welche Werte von ε und δ ist diese Zerlegung durchführbar?

Antwort zu a):

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{\delta}{\varepsilon} & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & \delta \\ 0 & 0 & \varepsilon - \frac{\delta^2}{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

Bedingung: $\varepsilon \neq 0$; $\varepsilon \neq \frac{\delta^2}{\varepsilon}$

b) Welche Modifikation des LU-Algorithmus ist im Falle des Versagens unter a) anzuwenden? Wann ist auch diese modifizierte Variante undurchführbar? (Erklären und anschreiben.)

Antwort zu b): /

c) Unter welcher Bedingung an die Parameter ε und δ ist die Matrix A invertierbar? (Begründen auf Grund von a) und b)!)

Antwort zu c:

$\varepsilon \neq 0$ u. $\varepsilon - \frac{\delta^2}{\varepsilon} \neq 0$

d) Es sei $\varepsilon > 0$ und $\delta = 0$. Berechnen Sie die Konditionszahl $\kappa_\infty(A)$ bezüglich der Maximum-Norm $\|\cdot\|_\infty$.
(Verwenden Sie die LU-Zerlegung aus a) und schreiben Sie Ihre Rechnung explizit an.)

Antwort zu d:

$$\kappa_\infty(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

$$\|A\|_\infty = 1 + (1+\varepsilon) + (1+0) = 3 + \varepsilon$$

$\cancel{A^{-1}}$

$\cancel{A^{-1} =}$

$$\cancel{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1+\frac{2}{\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon} \\ -\frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ -\frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}}$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right) + \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = 1 + \frac{4}{\varepsilon}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1+\frac{2}{\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon} \\ -\frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ -\frac{1}{\varepsilon} & 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

$$\kappa_\infty(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = (3+\varepsilon)\left(1+\frac{4}{\varepsilon}\right) = 3 + \frac{12}{\varepsilon} + \varepsilon + \frac{4\cancel{\varepsilon}}{\cancel{\varepsilon}} = \cancel{3+}\ 7 + \frac{12}{\varepsilon} + \varepsilon$$

3) (10 Punkte)

Für die Funktion

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in [0, 2]$$

wird eine Wertetabelle benötigt, mit der Eigenschaft, daß bei einer linearen Interpolation zwischen zwei Tabellenwerten für alle x aus dem gegebenen Intervall ungünstigstenfalls ein absoluter Fehler (Verfahrensfehler und Rechenfehler) von von 10^{-6} auftritt.

a) Wie groß darf der Abstand der Tabellenwerte höchstens sein, damit der Verfahrensfehler auf dem gesamten Intervall $5 * 10^{-7}$ nicht übersteigt? Der Abstand sollte eine Zehnerpotenz sein (oder die Form 5*Zehnerpotenz haben).

Antwort zu a):

$$|e_1(x)| \leq \frac{M_2}{8} h^2$$

$$\max_{x \in I} |f''(x)| \leq M_2$$

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0{,}5e^x + 0{,}5e^{-x}$$

$$f'(x) = 0{,}5e^x - 0{,}5e^{-x}$$

$$f''(x) = 0{,}5e^x + 0{,}5e^{-x}$$

$$f.\ x \in [0,2]: \quad M = 3{,}7622$$

$$\cancel{|e_1(x)| \leq 0{,}470275\, h^2}$$

$$5 \cdot 10^{-7} \leq 0{,}470275\, h^2$$

$$\frac{5 \cdot 10^{-7}}{0{,}470275} \leq h^2$$

$$1{,}063 \cdot 10^{-6} \leq h^2$$

$$0{,}001031018 \leq h$$

b) Will man den Wert $f(x)$ für ein x mit $x_i < x < x_{i+1}$ berechnen, so bezieht man die Tabellenwerte $(x_i, f_i = f(x_i), (x_{i+1}, f_{i+1} = f(x_{i+1}))$ ein und wertet die folgende Formel mit $h = x_{i+1} - x_i$ aus:

$$f(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h} f_i - \frac{x_i - x}{h} f_{i+1}.$$

Berechnen Sie die Schranke für den absoluten Rechenfehlereffekt, der bei der Auswertung des obigen Ausdruckes in einer Gleitpunktarithmetik ensteht. Nehmen Sie dabei an, daß bei den Subtraktionen $x_{i+1} - x$ und $x_i - x$ keine Rechenfehler enstehen und alle involvierten Größen Maschinenzahlen sind. Die Rechnungen werden in der IEC/IEEE-Arithmetik, im einfachen Format mit optimaler Rundung durchgeführt.
Hinweis: Im Intervall [0,2] ist $f(x)$ positiv und monoton wachsend.

Antwort zu b): $z_1 = \left(\frac{x_{i+1} - x}{h}\right)(1 + \rho_1)$

$$z_2 = \left(\frac{x_{i+1} - x}{h}\right)(1 + \rho_1) \cdot f_i \, (1 + \rho_2)$$

$$z_3 = \frac{x_i - x}{h}(1 + \rho_3)$$

$$\cancel{z_4 = \left(\frac{x_i - x}{h}(1 + \rho_3)\right)(1 + \rho_4)}$$

$$z_4 = \frac{x_i - x}{h}(1 + \rho_3) \cdot f_{i+1} \, (1 + \rho_4)$$

$$z_5 = \left[\left(\frac{x_{i+1} - x}{h}\right)(1 + \rho_1) \cdot f_i \, (1 + \rho_2) - \right.$$

$$\left. - \frac{x_i - x}{h}(1 + \rho_3) \cdot f_{i+1} (1 + \rho_4)\right](1 + \rho_5) =$$

$$= \left[\left(\frac{x_{i+1} - x}{h} + \frac{\rho_1 (x_{i+1} - x)}{h}\right) \cdot (f_i + \rho_2 f_i) - \left(\frac{x_i - x}{h} + \frac{\rho_3 (x_i - x)}{h}\right)\right.$$

$$\left. \cdot \left(f_{i+1} + \rho_4 f_{i+1}\right)\right](1 + \rho_5) =$$

c) Kann man garantieren, daß die Schranke für den Gesamtfehler bei der obigen Interpolation gleich 10^{-6} ist? Wenn nicht, welche Maßnahme(n) würden Sie ergreifen, um die Toleranzforderung für den absoluten Gesamtfehler von 10^{-6} zu erfüllen?

Antwort zu c):