itut für Angewandte und Numerische Mathematik
Wien

WS 2001/02

Numerische Mathematik für Informatiker

2. Übungstest am 4. Dezember 2001

Name	Vorname	Kennzahl / Matrikelnummer

Beispiel 1	Beispiel 2	Beispiel 3	Gesamt
a) b) c)	a) b)	a) b) c) d) e) f)	

Der gesamte Rechengang ist auf den beiliegenden Blättern zu dokumentieren.

Zusätzlich beigefügte Zetteln werden bei der Korrektur nicht berücksichtigt.

1) (16 Punkte)

a) Geben Sie die LU-Zerlegung (ohne Pivotsuche, d.h. ohne Zeilentausch) für folgende Matrizen an. (Rechnung ausführen bzw. schriftliche Begründung, falls Zerlegung nicht existent.)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}: \qquad L = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}: \qquad L = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}: \qquad L = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}: \qquad L = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

b) Für diejenigen Fälle unter a), bei denen die LU-Zerlegung ohne Zeilentausch nicht funktioniert, gebe man eine geeignet modifizierte LU-Zerlegung an.

Antwort zu 1b):

c) Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit der Matrix $A = \alpha A_1$ (A_1 aus 1a), $\alpha \neq 0$). Die exakte Lösung sei mit x^* bezeichnet, und $\tilde{x}$ sei eine Näherungslösung, für dessen Residuum $r := A\tilde{x} - b$ gelte: $\|r\|_\infty \leq \rho$.

Geben Sie eine Abschätzung für $\|\tilde{x} - x^*\|_\infty$ an (in Abhängigkeit von α und ρ, mit genauer Herleitung).

Antwort zu 1c):

2) (17 Punkte)

a) Geben Sie die LU-Faktorisierung an für $n \times n$ - Matrizen der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & & & & 0 \\ a & (1-a^2) & -a & & & \\ & a & (1-a^2) & -a & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & a & (1-a^2) & -a \\ & & & & a & (1-a^2) \end{pmatrix}$$

($n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$ beliebig).

$$L = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie A^{-1} für den Fall $n = 5$.

$A^{-1} =$

3) (17 Punkte)

a) Wie löst man mehrere lineare Systeme

$$Ax_1 = b_1, \quad Ax_2 = b_2, \quad \ldots \quad Ax_k = b_k$$

mit möglichst geringem Aufwand?
(Anmerkung: Die Operatoren **factorize** für eine LU-Zerlegung und **solve** für eine Rücksubstitution sollen verwendet werden.)

Antwort zu 3a):

b) Wecher Aufwand ist erforderlich, um ein lineares Gleichungssystem $Tx = b$ mit einer $n \times n$ Tridiagonalmatrix effizient zu lösen?

Anzahl der arithmetischen Operationen $O(n^p)$:

$p =$

c) Welchen Aufwand kann man reduzieren, wenn man weiß, daß die Matrix A des linearen Systems $Ax = b$ symmetrisch und positiv definit ist?

(i)

(ii)

(iii)

d) Was kann man mit Hilfe der Konditionszahl $\kappa(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$ abschätzen?

$\dots\dots\dots\dots \leq \kappa(A) \cdot \dots\dots\dots\dots$

Verbale Beschreibung:

e) Wann ist ein lineares Gleichungssystem numerisch singulär?

Antwort zu 3e):

f) Kann man durch Einsatz geeigneter Pivot-Strategien numerisch singuläre Systeme mit zufriedenstellender Genauigkeit lösen?

○ ja

○ nein

Begründung:

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
TU Wien

WS 2000/2001

Numerische Mathematik für Informatiker

2. Übungstest am 5. Dezember 2000

Name	Vorname	Kennzahl / Matrikelnummer

Beispiel 1	Beispiel 2	Beispiel 3	Gesamt
a) b) c)	a) b) c) d) e)	a) b) c)	

Der gesamte Rechengang ist auf den beiliegenden Blättern zu dokumentieren.

Zusätzlich beigefügte Zetteln werden bei der Korrektur nicht berücksichtigt.

1) (17 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem ($Ax = b$)

$$\begin{aligned} -3x_1 + 8x_2 + 5x_3 &= 6, \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 9, \\ x_1 + 9x_2 - 6x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Alle folgenden Rechnungen sollen in 3-stelliger dezimaler Gleitpunktarithmetik ($\mathbb{F}(10, 3, \ldots)$ mit round-to-nearest) durchgeführt werden.

Lösen Sie dieses Gleichungssystem mittels Gauß-Elimination

a) ohne Pivotsuche (numerische Lösung $x^{(1)}$),

$x_1^{(1)} =$

$x_2^{(1)} =$

$x_3^{(1)} =$

b) mit Spaltenpivotsuche und Skalierung (numerische Lösung $x^{(2)}$). Unter Skalierung soll hier das Dividieren jeder Gleichung durch den betragsgrößten Koeffizienten der Matrix aus der dazugehörigen Zeile verstanden werden. Damit lautet das skalierte System

$$\begin{aligned} -0.375\,x_1 + 1.00\,x_2 + 0.625\,x_3 &= 0.750, \\ 0.286\,x_1 - 1.00\,x_2 + 0.571\,x_3 &= 1.29, \\ 0.111\,x_1 + 1.00\,x_2 - 0.667\,x_3 &= 0.111. \end{aligned}$$

$x_1^{(2)} =$

$x_2^{(2)} =$

$x_3^{(2)} =$

c) Für beide Lösungen berechnen Sie das Residuum, $r^{(i)} = Ax^{(i)} - b$ (Taschenrechnergenauigkeit). Wie lautet die exakte Lösung x^* des Systems $Ax = b$? Vergleichen Sie die Näherungen mit der exakten Lösung und kommentieren Sie ihre Beobachtungen ausführlich.

$r^{(1)} = \left(\quad \right), \quad \|r^{(1)}\|_\infty =$

$r^{(2)} = \left(\quad \right), \quad \|r^{(2)}\|_\infty =$

$\|x^* - x^{(1)}\|_\infty =$

$\frac{\|x^* - x^{(1)}\|_\infty}{\|x^*\|_\infty} =$

$\|x^* - x^{(2)}\|_\infty =$

$\frac{\|x^* - x^{(2)}\|_\infty}{\|x^*\|_\infty} =$

2) (17 Punkte)

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.254 \end{pmatrix}.$$

a) Mit zwei verschiedenen numerischen Methoden wurden die numerischen Lösungen

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.341 \\ -0.087 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.999 \\ -1.000 \end{pmatrix}$$

erhalten. Man berechne die Residuen $r^{(i)} = Ax^{(i)} - b$ (Taschenrechnergenauigkeit).

$r^{(1)} =$

$r^{(2)} =$

b) Welche der Lösungen $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ ist die "bessere"?

"bessere Lösung":

kurze Begründung:

c) Wie lautet die exakte Lösung x^* des Gleichungssystems $Ax = b$?

$x^* =$

d) Wie groß ist die Konditionszahl $\kappa_1(A) = \|A\|_1 \, \|A^{-1}\|_1$?

$\|A\|_1 =$

$\|A^{-1}\|_1 =$

$\kappa_1(A) =$

e) Ist A *numerisch singulär*?

Antwort:

kurze Begründung:

3) (16 Punkte)

Man bestimme die Besetztheitsstruktur der LU-Faktorisierung von Matrizen A, die selbst die unten angegebene Besetztheitsstruktur aufweisen. Dabei werden signifikant besetzte Positionen mit dem Symbol „x" gekennzeichnet und die Struktur anhand einer 5×5-Matrix dargestellt. In analoger Weise stelle man bei der Lösungen die Strukturen von L und U dar!

Besetztheitsstrukturen von A:

(i)

$$A = \begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ & x & x & x & x \\ & & x & x & x \\ & & & x & x \end{pmatrix}, \quad \text{(Hessenberg)}$$

(ii)

$$A = \begin{pmatrix} x & & & & x \\ x & x & & & x \\ x & x & x & & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \end{pmatrix}.$$

(iii)

$$A = \begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & & & \\ x & & x & & \\ x & & & x & \\ x & & & & x \end{pmatrix}.$$

(i) $L = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

(ii) $L = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

(iii) $L = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
TU Wien

WS 1999/2000

Numerische Mathematik für Informatiker

2. Übungstest am 7. Dezember 1999

Name	Vorname	Kennzahl / Matrikelnummer

Beispiel 1	Beispiel 2	Beispiel 3	Gesamt
a)	a)	a)	
b)	b)	b)	
c)	c)	c)	
d)	d)		
	e)		
	f)		
	g)		
	h)		

Der gesamte Rechengang ist auf den beiliegenden Blättern zu dokumentieren.

Zusätzlich beigefügte Zetteln werden bei der Korrektur nicht berücksichtigt.

1) (17 Punkte)

a) Wie lautet die LU-Faktorisierung folgender Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & & 1 \\ -1 & 1 & & & 1 \\ & -1 & 1 & & 1 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$L = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

b) Man berechne A^{-1}!

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

c) Man berechne $\kappa_\infty(A)$!

$\kappa_\infty(A) =$

d) Jemand betrachtet das lineare Gleichungssystem

$$(A+E)x = b;$$

zur Definition von A vgl. Punkt a), für die Koeffizienten e_{ij} von E gelte $|e_{ij}| \leq 10^{-8}$. Wegen der starken Ähnlichkeit der Matrizen A und $A+E$ wird überlegt, ob man statt $(A+E)x = b$ das einfachere System $Ax = b$ lösen kann, und es wird als Entscheidungsgrundlage bez. dieser Frage eine (n-abhängige) Schranke $S(n)$ für die relative Lösungsdifferenz[1] der beiden Systeme berechnet. Man gebe eine möglichst scharfe Schranke $S(n)$ an!

$S(n) =$

Bemerkung: Falls b) nicht gelöst wurde, kann man c) und d) in folgendem Sinn lösen: Man verwendet in den Darstellungen von $\kappa_\infty(A)$ und $S(n)$ die Größe $\|A^{-1}\|_\infty$ ohne deren explizite Kenntnis.

[1] $x_1 \ldots$ Lösung von $(A+E)x = b$; $x_2 \ldots$ Lösung von $Ax = b$

absolute Lösungsdifferenz: $\|\Delta x\|_\infty := \|x_1 - x_2\|_\infty$; relative Lösungsdifferenz: $\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x_1\|_\infty}$

2) (17 Punkte)

Die folgenden Fragen beziehen sich auf lineare Gleichungssysteme in der Standardform $Ax = b$ mit *regulärer* Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $x, b \in \mathbb{R}^n$.

a) Wie wird der absolute und der relative Abstand von Vektoren $\bar{b}, b$ und Matrizen $\bar{A}, A$ gemessen?

	absolut	relativ
$\bar{b}$ und b		
$\bar{A}$ und A		

b) Angenommen, die relativen Datenfehler von A und b liegen (z.B. auf Grund von Meßfehlern) in der Größenordnung von 10^{-3}. Aus welcher Eigenschaft von A folgt die numerische Singularität des linearen Gleichungssystems?

$\leq$

c) Angenommen, A und b weisen *keine* Datenfehler auf. Kann das lineare Gleichungssystem trotzdem numerisch singulär sein?

nein ○ ja ○

d) Hängt die Antwort der Frage c) von der bei der Lösung verwendeten Gleitpunkt-Arithmetik ab?

nein ○ ja ○

Falls es eine solche Abhängigkeit gibt, wie sieht diese im Fall der einfach genauen IEEE-Arithmetik aus?

e) Warum sollte man lineare Gleichungssysteme *nicht* unter Verwendung der Formel $x = A^{-1}b$ lösen?

(1)

(2)

f) Warum ist $x = A^{-1}b$ speziell in jenen Fällen zu vermeiden, wo A Bandstruktur besitzt?

g) Zur Lösung linearer Gleichungssysteme kann man direkte und iterative Verfahren verwenden.

Welche Gründe sprechen für direkte Verfahren?

(1)

(2)

(3)

Welche Gründe sprechen für iterative Verfahren?

(1)

(2)

(3)

h) Angenommen, die Koeffizientenmatrix ist die Hilbert-Matrix $H_8 \in \mathbb{R}^{8\times 8}$. Welches direkte Verfahren wird man in diesem Fall anwenden?

Wie groß ist die Anzahl der Gleitpunktadditionen und -multiplikationen, die man dabei ausführen muß?

Wird man eine Pivot-Strategie verwenden?

nein ○ ja ○

Warum?

3) (16 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0.003000\,x_1 + 59.14\,x_2 &= -59.11, \\ 5.291\,x_1 - 6.130\,x_2 &= 59.04. \end{aligned}$$

Alle folgenden Rechnungen sollen in 4-stelliger dezimaler Gleitpunktarithmetik ($\mathbb{F}(10, 4, \ldots)$ mit round-to-nearest) durchgeführt werden.

Lösen Sie dieses Gleichungssystem mittels Gauss-Elimination

a) ohne Pivotsuche (numerische Lösung $x^{(1)}$),

$x_1^{(1)} =$

$x_2^{(1)} =$

b) mit Spaltenpivotsuche (numerische Lösung $x^{(2)}$).

$x_1^{(2)} =$

$x_2^{(2)} =$

c) Vergleichen Sie die so erhaltenen Resultate mit der exakten Lösung $x_1 = 10.00$, $x_2 = 1.000$ und kommentieren Sie ihre Beobachtungen ausführlich.

$\|x - x^{(1)}\|_\infty \approx$

$\frac{\|x - x^{(1)}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \approx$

$\|x - x^{(2)}\|_\infty \approx$

$\frac{\|x - x^{(2)}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \approx$

1) (16 Punkte)

Im Folgenden sei α $(1 < \alpha \leq 2)$ ein reeller Parameter.[1] Wir betrachten die α-abhängige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1-\alpha \\ 1 & -1+\alpha \end{pmatrix}.$$

a) Führen Sie die *LU*-Zerlegung (ohne Zeilentausch) von A durch und berechnen Sie A^{-1}. Welche Bedeutung hat das Element l_{21} der Matrix $L = (l_{ij})$ bei dem zugrundeliegenden Eliminationsvorgang?

$L =$

$U =$

$A^{-1} =$

Algorithmische Bedeutung von l_{21}:

b) Bestimmen Sie die relative Konditionszahl $\kappa_\infty(A)$ (bezüglich der Zeilensummen-Norm $\|\cdot\|_\infty$).

$\kappa_\infty(A) =$

[1] Alle Antworten sind in Abhängigkeit von dem Parameter α anzugeben.

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
TU Wien

WS 1998/99

Numerische Mathematik für Informatiker

2. Übungstest am 1. Dezember 1998

Name	Vorname	Kennzahl / Matrikelnummer

Beispiel 1	Beispiel 2	Beispiel 3	Gesamt
a) b) c)	a) b) c) d)	a) b) c) d)	

Punkte maximal: 50

Der gesamte Rechengang ist auf den beiliegenden Blättern zu dokumentieren.

Zusätzlich beigefügte Zetteln werden bei der Korrektur nicht berücksichtigt.

2) (17 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.003 & 59.14 \\ 5.291 & -6.130 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 59.17 \\ 46.78 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Inverse von A (Taschenrechnergenauigkeit).

$A^{-1} =$

b) Berechnen Sie die Konditionszahl $\kappa_\infty(A)$.

$\kappa_\infty(A) =$

c) Willi, ein sehr auf Effizienz bedachter Maschinenbaustudent, löst das obige System mittels Gauß-Elimination ohne Pivotsuche. Er rechnet dabei in $\mathbb{F}(10, 4, \ldots)$ mit optimaler Rundung (*round to nearest*) nach jedem Rechenschritt, und bekommt als Lösungsvektor $\tilde{x}_{\text{Willi}} = (-10.00, 1.001)^T$. Er argumentiert: *Die Kondition des Problems ist gut und deshalb ist der relative Fehler der numerischen Lösung (bezüglich der Maximumnorm) in der Größenordnung* $\kappa_\infty(A)\,eps$. Elli, eine besonnene Informatikstudentin, denkt nach, macht eine kurze Rechnung und sagt: *Deine Lösung ist unbrauchbar.* Wer hat Recht, Willi oder Elli? (Begründung!)

Sollten Sie der Meinung sein, dass Elli Recht hat, so erklären Sie die Ursache der Ungenauigkeit in $\tilde{x}_{\text{Willi}}$.

☐ Willi hat Recht ☐ Elli hat Recht

Begründung:

c) Man betrachte das Gleichungssystem $Ax = b$ mit obiger Matrix A und $b = (-3, 2)^T$. Weiters sei $\tilde{b} \approx b$ eine 'gestörte' rechte Seite, mit $\|\tilde{b} - b\|_\infty \le \delta$.

Schätzen Sie den Effekt dieser Störung auf die Differenz der Lösungen $\tilde{x}$ bzw. x^* des gestörten bzw. ungestörten Systems ab, d.h. geben Sie eine Schätzung für $\frac{\|\tilde{x}-x^*\|_\infty}{\|x^*\|_\infty}$ an.

$\frac{\|\tilde{x}-x^*\|_\infty}{\|x^*\|_\infty} \lessapprox$

3) (17 Punkte)

Jemand hat mit linearen Gleichungssystemen der Form

$$(A+E)x = b, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad E \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad b \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

zu tun, wobei A die besonders einfache Form

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & & & & \\ & -\frac{1}{2} & 1 & & & \\ & & -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

hat, und sämtliche Koeffizienten e_{ij} von E die Relation $|e_{ij}| \leq 10^{-5}$ erfüllen. Er benötigt Lösungen, deren relative Fehler (in der Maximum-Norm gemessen) kleiner als $2n \cdot 10^{-5}$ sein sollen. Er untersucht daher, ob er E vernachlässigen kann, d.h. ob die Lösung des viel einfacheren Systems $Ax = b$, als Näherungslösung für (1) betrachtet, seinem Genauigkeitsanspruch genügt.

a) Wie lautet die Lösung $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ von $Ax = b$?

$x_1 =$

$x_2 =$

$x_3 =$

$\vdots$

$x_i =$

$\vdots$

$x_n =$

d) Nun berechnet Elli die numerische Lösung des obigen Systems. Alles ist so wie bei Willi, bis auf die Pivotsuche, die sie im Gegensatz zu ihm durchführt. Sie sagt: *Meine Lösung ist sehr gut, sogar exakt.* Berechnen Sie Ellis Lösung x_{Elli}. (Machen Sie auch die Probe, d.h. überzeugen Sie sich, dass diese Lösung tatsächlich exakt ist.)

$x_{\text{Elli}} =$

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
TU Wien

WS 1997/98

Numerische Mathematik für Informatiker

2. Übungstest am 9. Dezember 1997

Name	Vorname	Kennzahl / Matrikelnummer

Beispiel 1	Beispiel 2	Beispiel 3	Gesamt
a) b)	a) b)	a) b)	

Der gesamte Rechengang ist auf den beiliegenden Blättern zu dokumentieren.

Zusätzlich beigefügte Zetteln werden bei der Korrektur nicht berücksichtigt.

1) (17 Punkte)

Gegeben sei eine reelle symmetrische 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Wir nehmen an, daß $a_{11} > 0$ und $a_{22} > 0$ gilt (dies ist eine *notwendige* Bedingung dafür, daß A positiv definit ist).

a) Es soll die Cholesky-Zerlegung von A bestimmt werden, d.h. zu ermitteln ist eine reelle reguläre untere Dreiecksmatrix $L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{12} & l_{22} \end{pmatrix}$ so daß gilt $A = LL^T$. Dies funktioniert jedoch nur, wenn die Koeffizienten von A außer $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ noch eine weitere Bedingung (X) erfüllen (dann ist A auch tatsächlich positiv definit).

- Wie lautet Bedingung (X)?
- Mit welchem Laufzeitfehler würde ein Programm abbrechen, das die Cholesky-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 'brute force'[1] zu berechnen versucht?
- Geben Sie (unter der Annahme, daß Bedingung (X) erfüllt ist) die Matrix L an, d.h. die l_{ij} sind als Formelausdrücke in den a_{ij} darzustellen.

Ergebnis zu a):

(Fortsetzung des Beispiels auf nächster Seite)

[1] Mit 'brute force' ist gemeint: Es sei angenommen, daß keine internen Abfragen eingebaut sind, die während des algorithmischen Ablaufs überprüfen, ob diese Zerlegung überhaupt durchführbar ist.

b) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung (d.h. geben Sie L an) für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, und benützen Sie diese Zerlegung zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit obiger Matrix A und $b = (14, 19)^T$.

(Bitte Rechengang genau dokumentieren.)

Ergebnis zu b):

2) (17 Punkte)

Ein Ingenieur will ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, lösen. Da er die rechte Seite b experimentell ermittelt, liegt tatsächlich das System $A\tilde{x} = \tilde{b}$ vor, wobei der relative Fehler von b bezüglich der Maximumnorm ungefähr 10^{-7} ist, d.h.

$$\frac{\|\tilde{b} - b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \approx 10^{-7}$$

gilt.

Er berechnet die Lösung des Gleichungssystems $A\tilde{x} = \tilde{b}$ mit dem Gauß-Algorithmus (Eliminationsalgorithmus mit Spalten-Pivotsuche und Skalierung) in einer Arithmetik mit $eps = 10^{-10}$ und erhält eine Lösung, der er aufgrund seiner Erfahrung ansieht, daß sie sehr wahrscheinlich nur eine korrekte Stelle aufweist. Nun besinnt er sich auf die Numerik-Vorlesung und vermutet, daß die Matrix A schlecht konditioniert ist.

(a) Ist seine Vermutung richtig oder falsch? Kann der Verlust der Genauigkeit eine andere Ursache haben, z.B. Rechenfehlereffekte infolge von Instabilität des Näherungsverfahrens, Verfahrensfehler oder zu geringe Rechnergenauigkeit? Begründen Sie Ihre Ansicht!

(b) Um die Konditionszahl von A zu schätzen, berechnet er für verschiedene Vektoren x_i ihre Bilder $y_i = Ax_i$, siehe (2), und stellt fest:

Eh klar!

$$\mathrm{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \, \|A^{-1}\|_\infty > 2.2 \cdot 10^5, \tag{1}$$

und deshalb ist ein relativer Datenfehlereffekt der Größenordnung

$$\mathrm{cond}_\infty(A) \cdot \frac{\|\tilde{b} - b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \approx 10^{-2}$$

zu erwarten, was einer, höchstens zwei, korrekten Stellen entspricht.

Zeigen Sie anhand der untenstehenden Vektorpaare (x_i, y_i) mit $Ax_i = y_i$, daß die Abschätzung (1) richtig ist.

$$\begin{gathered} x_i : \begin{pmatrix} 0.666 \\ 3000. \\ 0.866 \\ -3000. \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.0160 \\ -3000.0 \\ 10\,000. \\ -0.0070 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3000. \\ 3000. \\ -0.133 \\ -0.016 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.1330 \\ 0.8330 \\ -10\,000. \\ 10\,000. \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10\,000. \\ -10\,000. \\ 0.6660 \\ 0.8330 \end{pmatrix} \\ y_i : \begin{pmatrix} 1.532 \\ 6002. \\ 4.730 \\ 6008. \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7000. \\ 16\,999. \\ 36\,999. \\ 76\,999. \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.149 \\ 0.050 \\ 0.052 \\ -0.148 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.9660 \\ -29\,999. \\ -29\,999. \\ -89\,999. \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.499 \\ -0.501 \\ 1.497 \\ 1.498 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{2}$$

Hinweise:

- Aus der Definition der Matrixnorm für ein $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

$$\|B\|_\infty = \max_{u\neq 0} \frac{\|Bu\|_\infty}{\|u\|_\infty}$$

folgt für alle $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$,

$$\|Bu\|_\infty \leq \|B\|_\infty \|u\|_\infty.$$

- Für die betrachtete Matrix A gilt $\|A\|_\infty = 11$.

3) (16 Punkte)

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *obere Hessenbergmatrix*, falls $a_{ij} = 0$ für $j + 1 < i$ gilt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ & & a_{43} & \cdots & a_{4,n-1} & a_{4n} \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

a) Man adaptiere den Eliminationsalgorithmus (ohne Pivotsuche, siehe Vorlesungsskriptum S. 221 oder 'Computer-Numerik II' S. 242) für obere Hessenberg-Matrizen, so daß unnötige Operationen (mit Null) vermieden werden.

   Anmerkung: Man benütze die Pseudocode-Notation des Vorlesungsskriptums (des Buchs 'Computer-Numerik') und unterstreiche die geänderten Teile.

b) Welche asymptotische Komplexität hat der in a) entwickelte Algorithmus? (Man gebe eine Begründung!)

3) (18 Punkte)

Betrachten Sie die Daten der folgenden Tabelle:

i	x_i	y_i	$\ln y_i$	x_i^2	$x_i \ln y_i$
1	1.00	5.10	1.629		
2	1.25	5.79	1.756		
3	1.50	6.53	1.876		
4	1.75	7.45	2.008		
5	2.00	8.46	2.135		
$\sum$	7.50		9.404		

Der annähernd lineare Zusammenhang zwischen den Werten x_i und $\ln y_i$ motiviert die Wahl der folgenden Funktion zur Beschreibung der Relation zwischen x und y:

$$y = b\,e^{ax} \quad \text{oder} \quad \ln y = \ln b + a\,x.$$

Ergänzen Sie die obige Tabelle und bestimmen Sie die Werte a und b so, daß die Relationen $\ln y_i = \ln b + a\,x_i$ möglichst gut im Sinne der kleinsten quadratischen Ordinatenabweichung erfüllt sind (Taschenrechnergenauigkeit).

$a =$

$\ln b =$

$b =$

Inst. f. Angew. u. Numer. Math.
TU Wien

WS 1996/97

Numerische Mathematik für Informatiker

2. Übungstest am 10. Dezember 1996

Name	Vorname	Kennzahl / Matrikelnummer

Beispiel 1	Beispiel 2	Beispiel 3	Gesamt
a)	a)	a)	
b)	b)	b)	
c)	c)	c)	
		d)	

Bitte verwenden Sie nur die beiliegenden Blätter.
Zusätzlich beigefügte Zetteln werden bei der
Korrektur nicht berücksichtigt.

1) (16 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0.003000\,x_1 + 59.14\,x_2 &= 59.17, \\ 5.291\,x_1 - 6.130\,x_2 &= 46.78. \end{aligned}$$

Alle folgenden Rechnungen sollen in 4-stelliger dezimaler Gleitpunktarithmetik ($\mathbb{F}(10,4,\ldots)$ mit round-to-nearest) durchgeführt werden.

Lösen Sie dieses Gleichungssystem mittels Gauss-Elimination

a) ohne Pivotsuche (numerische Lösung $x^{(1)}$),

$x_1^{(1)} =$

$x_2^{(1)} =$

b) mit Spaltenpivotsuche (numerische Lösung $x^{(2)}$).

$x_1^{(2)} =$

$x_2^{(2)} =$

c) **Vergleichen Sie die so erhaltenen Resultate mit der exakten Lösung** $x_1 = 10.00$, $x_2 = 1.000$ und kommentieren Sie ihre Beobachtungen ausführlich.

$\|x - x^{(1)}\|_\infty \approx$

$\frac{\|x-x^{(1)}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \approx$

$\|x - x^{(2)}\|_\infty \approx$

$\frac{\|x-x^{(2)}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \approx$

2) (17 Punkte)

Nach einem Satz der Linearen Algebra ist eine Matrix A der Gestalt $A = I + B$ (I = Einheitsmatrix) mit $\|B\| < 1$ invertierbar und es gilt

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$$

a) Geben Sie mit Hilfe dieser Aussage eine Abschätzung für die relative Konditionszahl (bezüglich der Maximum-Norm) der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

an.

b) Berechnen Sie diese Konditionszahl von A exakt (exakte rationale Rechnung).

c) Gesucht sei die Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit obiger Matrix A; die rechte Seite b sei durch Rundung (round-to-nearest) in den Gleitpunktzahlenbereich $\mathbb{F}(10, 4, \ldots)$ verfälscht:

$$\Box b = \tilde{b} = \begin{pmatrix} 5.124 \\ 6.321 \\ 5.987 \end{pmatrix}$$

Mit welchem relativen Fehler im Ergebnis x muß man dann – selbst bei Vernachlässigung von Rechenfehlern bei der Auflösung des Systems – rechnen? (Normabschätzung angeben.)

Inst. f. Angew. u. Numer. Math.
Prof. Dr. Hans J. Stetter

WS 1995/96

Numerische Mathematik für Informatiker

2. Übungstest am 12. Dezember 1995

Name	Vorname	Kennzahl / Matrikelnummer

Beispiel 1	Beispiel 2	Beispiel 3	Gesamt
	a) b) c)	a) b) c)	

Bitte verwenden Sie nur die beiliegenden Blätter. Zusätzlich beigefügte Zetteln werden bei der Korrektur nicht berücksichtigt.

1) (14 Punkte)

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{10}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{19}{2}\sqrt{3} & \frac{-23}{3}\sqrt{3} & \frac{-47}{6}\sqrt{3} \\ \frac{7}{3}\sqrt{3} & 6\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{-31}{6}\sqrt{3} & \frac{-29}{6}\sqrt{3} \\ \frac{5}{2}\sqrt{3} & \frac{17}{2}\sqrt{3} & \frac{-13}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{-13}{2}\sqrt{3} \\ \frac{11}{6}\sqrt{3} & 3\sqrt{3} & \frac{-19}{6}\sqrt{3} & \frac{-17}{6}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

gilt $A^3 = I$. Man betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit dieser Matrix und schätze den relativen Datenfehlereffekt $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$ bezüglich einer Datenstörung $\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq 10^{-5}$ ab! ($\|\cdot\|$ ... Maximumnorm!)

$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq$

2) (18 Punkte)

Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 10^{-5} & 1 \\ 10^{-5} & -10^{-5} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^{-5} \\ -2 \cdot 10^{-5} \\ 1 \end{pmatrix},$$

soll numerisch gelöst werden. Seine *exakte* Lösung lautet

$$x = \begin{pmatrix} -1.00002 \\ 2.00000 \\ 1.00002 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}.$$

a) Man berechne die numerische Lösung $x^{(1)}$ mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren *ohne* Pivotsuche. Arithmetik: $\mathbb{M}(10,3,9,-9)$, Abschneiden.

$x_1^{(1)} =$

$x_2^{(1)} =$

$x_3^{(1)} =$

b) Man berechne die numerische Lösung $x^{(2)}$ mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren mit *partieller* Pivotwahl, d.h. mit Spaltenpivotsuche und anschließendem Zeilentausch. Arithmetik wie in a).

$x_1^{(2)} =$

$x_2^{(2)} =$

$x_3^{(2)} =$

c) Man vergleiche die Näherungslösungen aus a) und b) mit der exakten Lösung x und kommentiere das Ergebnis.

$\|x - x^{(1)}\|_\infty \approx$

$\frac{\|x-x^{(1)}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \approx$

$\|x - x^{(2)}\|_\infty \approx$

$\frac{\|x-x^{(2)}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \approx$

Kommentar:

3) (18 Punkte)

Die Poisson-Matrix - eine spezielle schwach besetzte Matrix - hat in ihrer einfachsten Form folgende Blockstruktur:

$$A = \begin{pmatrix} T & -I & \\ -I & T & -I \\ & -I & T \end{pmatrix}$$

Dabei ist $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Tridiagonalmatrix

$$T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

und $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix $I = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1)$.

a) Welche Gestalt hat die LU-Zerlegung (ohne Pivotsuche) von T? Welche Elemente der Faktormatrizen kann man (ohne sie berechnen zu müssen) sofort angeben?

b) Welche Gestalt hat die Block-LU-Zerlegung (ohne Pivotsuche) von A? Wie ist die Besetzungsstruktur der dabei auftretenden Blockmatrizen?

c) Wieviele Gleitpunkt-Rechenoperationen sind zur LU-Zerlegung von A erforderlich:

c1) ohne Berücksichtigung der Besetzungsstruktur;

c2) unter (möglichst weitgehender) Berücksichtigung der Besetzungsstruktur.

Inst. f. Angew. u. Numer. Math.
Prof. Dr. Hans J. Stetter

WS 1994/95

Numerische Mathematik für Informatiker

2. Übungstest am 13. Dez. 1994

Name	Vorname	Kennzahl / Matrikelnummer

Beispiel 1	Beispiel 2	Beispiel 3	Gesamt
a) b) c)	a) b) c)	a) b) c) d)	

Bitte verwenden Sie nur die beiliegenden Blätter. Zusätzlich beigefügte Zetteln werden bei der Korrektur nicht berücksichtigt.

1) (15 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1+\delta & 2+\delta \\ 2+\delta & 4+\delta \end{pmatrix}$$

(δ ein kleiner Parameter: $0 < \delta \ll 1$).

a) Man berechne die Inverse von A und bestimme die Konditionszahl von A (bezüglich der Maximumnorm) in Abhängigkeit von δ.

b) Wie löst man das Gleichungssystem $A^2x = b$, ohne A^2 explizit aufzustellen?

c) Für das Gleichungssystem $A^2x = b$ gebe man eine Schranke (in Abhängigkeit von δ) für den relativen Fehler in x an, der durch Runden der rechten Seite b auf m geltende Dezimalstellen bewirkt wird. (Keine Berücksichtigung von Rechenfehlern.)

b) $\underbrace{A^{-1} \cdot A^2}_{A} \cdot x = \underbrace{A^{-1} \cdot b}_{c}$

$A \cdot x = c$ ist dann „normal" zu lösen

2) (17 Punkte)

Cholesky-Faktorisierung ist eine spezielle Variante der Dreieckszerlegung, die für symmetrische[1] Matrizen A anwendbar ist:

$$A = U^T U,$$

wobei $U = (u_{ij})$ eine obere Dreiecksmatrix ist (d.h. $u_{ij} = 0$ für $i > j$).

Im Hinblick auf effizienten Einsatz auf modernen Rechnerarchitekturen verallgemeinert man diesen Algorithmus zur 'Block-Cholesky-Faktorisierung'. Für ein einfaches Beispiel denke man sich eine (symmetrisch positiv definite) $2n \times 2n$ - Matrix A gegeben und in 4 Blöcke der Dimension $n \times n$ partitioniert, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{pmatrix},$$

(mit A sind auch A_{11} und A_{22} symmetrisch positiv definit). Nun macht man für U einen analogen Block-Ansatz:

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die 3 Beziehungen an, aus denen sich die 3 gesuchten $n \times n$-Blöcke U_{ij} bestimmen lassen.

Antwort zu a):

[1] Eigentlich: für *symmetrisch positiv definite* Matrizen; bei diesem Beispiel soll jedoch der Einfachheit halber dieser Unterschied außer Betracht bleiben. Bei der Beantwortung der den Fragen a)–c) darf – falls erforderlich – angenommen werden, daß jede auftretende symmetrische Matrix Cholesky-zerlegbar ist; ein mathematischer Nachweis der Definitheit wird nicht verlangt.

b) In welcher Reihenfolge benützt man diese Bestimmungsgleichungen, um die U_{ij} konkret auszurechnen, und welche 'Level 3'-Basisalgorithmen der Linearen Algebra werden dabei benötigt? Kommentieren Sie jeden einzelnen Schritt und geben Sie an, was jeweils zu tun ist (z.B. Matrix-Matrix-Multiplikation, Dreieckszerlegung bzw. Variante davon, ...).

Antwort zu b):

c) Für den Fall, daß n eine Potenz von 2 ist, legt obiges legt eine rekursive Vorgangsweise nahe (Rekursion bez. der Blockgröße). Beschreiben Sie, wie diese Rekursion aussehen müßte:

Antwort zu c):

3) (18 Punkte).

Bei dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ & 1 & & & 1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad n \geq 3$$

ist die Koeffizientenmatrix von besonders einfacher Struktur, sodaß die Gauß-Elimination sehr einfach abläuft und es daher möglich ist, Ausdrücke für $x_1, x_2, \dots, x_n$ für allgemeines n explizit anzugeben.

a) Man berechne die x_i als Ausdrücke in den Größen $b_1, b_2, \dots, b_n$ und n:

$$\boxed{x_n = \frac{(\sum_{i=1}^{n-1} b_i) - b_n}{n-2}} \qquad \boxed{x_i = b_i - x_n \quad ; \; i = 1, 2, \dots, n-1}$$

b) Warum muß man den Fall $n = 2$ ausschließen?

Kurze Begründung:

Da im Nenner von x_n sonst 0 stehen würde – x_n also nicht definiert wäre!

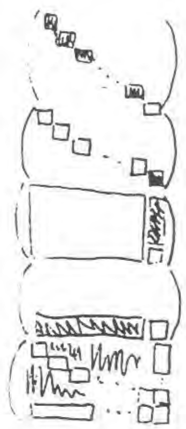
c) Man berechne die Inverse der Koeffizientenmatrix, indem man die bei Punkt a) gefundenen Lösungsformeln nach und nach auf folgende Vektoren b (als rechte Seite des Gleichungssystems) anwendet:

1. Zeile der Inv. — 2. Zeile der Inv. — n-te Zeile der Inv

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Auf diese Weise berechne man konkret die Elemente u_{ij} der Inversen als Ausdrücke in n:

$u_{ii} = \frac{n-2}{n-3}$	, $i = 1, 2, \dots, n-1$
$u_{nn} = -\frac{1}{n-2}$	
$u_{in} = \frac{1}{n-2}$	, $i = 1, 2, \dots, n-1$
$u_{ni} = \frac{1}{n-2}$	, $i = 1, 2, \dots, n-1$
$u_{ij} = -\frac{1}{n-2}$	, in allen weiteren Fällen



d) Man gebe die LU-Zerlegung der Koeffizientenmatrix an:

$L =$

$U =$