21

PRÜFUNGSORDNER - ein Service Deiner Fachschaft Informatik!
LVA: WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG & STATISTIK Preis: ~~[illegible]~~-

KUSOLITSCH VO

Schriftliche Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Informatiker

Doz. Dr. Kusolitsch

21.4.1999

1. Die Zufallsvariable ξ sei $N(\mu, \sigma^2)$ verteilt. Man bestimme die Dichte und den Median von $\eta = \exp(\xi)$.

2. Ein Glücksspielbetreiber läßt jede Woche 5 Kandidaten aus einer Urne mit 100 Losen ziehen (die Ziehungen der 5 Kandidaten erfolgen unabhängig voneinander). Dabei entfällt auf ein Los ein Gewinn von S 1 Million, auf 2 Lose ein Gewinn von je S 500.000,-, auf 3 Lose entfallen je S 100.000,-, und auf 10 Lose je S 10.000,-. Wieviel Kapital muß der Spielbetreiber im Jahr vorsehen, damit die jährliche Gewinnausschüttung mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.90 durch diese Summe gedeckt ist?

3. Wie oft muß man im Durchschnitt mindestens würfeln um zehn "6-er" zu erhalten? Man bestimme auch die Verteilung der benötigten Anzahl von Würfen.

4. Man bestimme den ML-Schätzer für den Parameter τ einer Verteilung mit der Dichte $f(x) = \tau^{-2} x \exp(-x/\tau) \quad (x > 0)$, wenn n unabhängige Beobachtungswerte $x_1, \ldots, x_n$ zur Verfügung stehen. Ist dieser Schätzer suffizient ?

Schriftliche Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Informatiker

ao. Univ.-Prof. Dr. Kusolitsch

9. Dezember, 1998

1. Die von einer Fertigungsmaschine erzeugten Lager sind mit Wahrscheinlichkeit p_0 $0 < p_0 < 1$ unbrauchbar. Alle Lager laufen an einer Kontrolle vorbei, an der sie mit Wahrscheinlichkeit p_1 geprüft werden. Sei ξ die Wartezeit (Anzahl der Stücke) bis bei der Kontrolle das zweite unbrauchbare Lager gefunden wird, und sei η die Anzahl der fehlerhaften Stücke, die die Kontrolle bis zu diesem Zeitpunkt (ungeprüft) passiert haben. Man bestimme sowohl die gemeinsame Verteilung von ξ und η als auch die Randverteilungen.

2. ξ sei cauchyverteilt. Man bestimme die Dichtefunktion von $\eta = 1 - \xi^3$.

3. Sei $\xi_1, \ldots, \xi_n$ eine Stichprobe, deren Komponenten exponentialverteilt mit dem Parameter τ sind. Man konstruiere ein asymptotisches Konfidenzintervall für τ zur Überdeckungswahrscheinlichkeit γ. (Hinweis : Man verwende den Zentralen Grenzverteilungssatz) Berechnen Sie das Konfidenzintervall für $\gamma = 0.95$ und die konkreten Beobachtungswerte

72	42	204	52	230	440	331	333	105	342
58	07	219	90	262	111	111	501	27	504

4. Eine Zufallsvariable ξ besitze die Dichte $f(x) = ce^{-\lambda|x|}$ $x \in \mathbb{R}, \lambda > 0$. Man bestimme die Konstante c, die Verteilungsfunktion, den Erwartungswert und die Varianz von ξ.

Schriftliche Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Informatiker

ao. Univ.-Prof. Dr. Kusolitsch

24. Juni, 1998

1. 8 Plastikzahnräder gleichen Typs wurden bei 21°C bis zu ihrem Ausfall getestet. Dabei ergaben sich folgende Umdrehungszahlen (in Mio.:)

   2.30 2.21 2.67 2.2 1.77 2.32 2 2.86

   Auf Grund langer Untersuchungsreihen scheinen diese Zahlen ($L_(\mu, \sigma^2)$) logarithmisch normalverteilt zu sein. Geben Sie jeweils 90% Konfidenzintervalle für μ und σ^2 an.

2. Man bestimme den ML-Schätzer für den Parameter τ einer Verteilung mit der Dichte $f(x) = \tau^{-2} x \exp(-x/\tau) \quad (x > 0)$, wenn n unabhängige Beobachtungswerte $x_1, \ldots, x_n$ zur Verfügung stehen. Ist dieser Schätzer suffizient ?

3. ξ_1 und ξ_2 seien poissonverteilte Zufallsvariable mit den Parametern λ_1 bzw. λ_2. Man bestimme die Verteilung von $\xi_1 + \xi_2$.

4. Die 2–dimensionale Zufallsvariable (ξ, η) besitze die Dichte $f(x,y) = (x^2 + xy/c)\mathbb{1}_{[0,1]\times[0,2]} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ Man bestimme c, die Randdichten von ξ und η und die bedingten Dichten. Weiters berechne man die Wahrscheinlichkeit von $[\eta < \xi + 0.5]$.

Schriftliche Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Informatiker

ao. Univ.-Prof. Dr. Kusolitsch

15. Mai, 1998

1. Man berechne das Integral $\int_2^5 \frac{dt}{\log t}$ numerisch mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode. Wieviele Zufallszahlen benötigt man, damit das Ergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.9 um nicht mehr als 0.02 vom wahren Wert abweicht ?

2. Eine Zufallsvariable ξ besitze die Verteilungsfunktion F mit

$$F(x) = 0 \cdot 1_{(-\infty,1)} + \frac{(x-0.5)^2}{2} \cdot 1_{[1,1.5)} + \frac{1}{2} \cdot 1_{[1.5,2)} + (x-1.5) \cdot 1_{[2,2.5)} + 1 \cdot 1_{[2.5,\infty)}$$

Zeichnen Sie diese Verteilungsfunktion und berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten :

$$\mathbb{P}(\xi < 1), \mathbb{P}(\xi \le 1), \mathbb{P}(\xi = 2), \mathbb{P}(2 \le \xi \le 2.5).$$

Außerdem bestimme man die p-Fraktile für $p = 0.1$ und $p = 0.5$.

3. Bei günstigem Wetter beobachtet ein Pilot den Flugplatz visuell. Die Wahrscheinlichkeit einer glücklichen Landung ist dann p_1. Bei schlechten Witterungsverhältnissen führt er eine reine Instrumentenlandung durch. Die Zuverlässigkeit (d.i. die Wahrscheinlichkeit einwandfreier Arbeit) der Apparatur ist gleich p. Die Wahrscheinlichkeit einer glücklichen Landung ist bei einwandfrei funktionierender Apparatur die gleiche wie bei visueller Beobachtung. Fällt die Apparatur aus, so hat die Wahrscheinlichkeit einer guten Landung einen sehr kleinen Wert p_1^*.

   a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit einer guten Landung, wenn bekannt ist, daß bei $k\%$ der Landungen der Pilot schlechte Sicht hat.

   b) Wie groß ist nach geglückter Landung die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Pilot eine Instrumentenlandung durchführte.

4. Von einer Zufallsvariablen wird angenommen, daß sie binomialverteilt mit den Parametern n = 5 und unbekanntem p ist.
Eine Versuchsreihe ergibt folgende Häufigkeiten für die Ausgänge $\{0, \ldots, 5\}$

x	0	1	2	3	4	5
h	3	16	36	32	11	2

Man teste die Binomialverteilungsannahme zum Niveau $\alpha = 0.05$.

Schriftliche Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Informatiker

ao. Univ.-Prof. Dr. Kusolitsch

13. März, 1998

1. Sei $\xi_1, \dots, \xi_n$ eine Stichprobe, deren Komponenten exponentialverteilt mit dem Parameter τ sind. Man konstruiere ein asymptotisches Konfidenzintervall für τ zur Überdeckungswahrscheinlichkeit γ. (Hinweis : Man verwende den Zentralen Grenzverteilungssatz) Berechnen Sie das Konfidenzintervall für $\gamma = 0.9$ und die konkreten Beobachtungswerte

72	42	204	52	230	440	331	333	105	342
58	07	219	90	262	111	111	501	27	504

2. Man berechne die Verteilung der drittgrößten von 20 positiven Zufallszahlen, wenn man weiß, daß die Zahlen mit einem exponentialverteilten Generator mit Parameter λ und unabhängig voneinander erzeugt wurden.

3. Eine Zufallsvariable ξ besitze die Dichte $f(x) = axe^{-x/2} \quad x > 0$,. Man bestimme die Konstante a, die Verteilungsfunktion, den Erwartungswert, den Modus und die Varianz von ξ. Welche Dichte besitzt $\eta := \sqrt{\xi}$?

4. 13 Urnen enthalten jeweils 13 Kugeln, wobei die i-te Urne i weiße und den Rest schwarze Kugeln beinhaltet. Eine der Urnen wird zufällig ausgewählt. Dabei wird die i-te Urne mit Wahrscheinlichkeit $i/91$ genommen. Dann wird 2-mal aus dieser Urne ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde die i-te Urne gewählt, wenn die beiden gezogenen Kugeln verschiedenfarbig sind? Aus welcher Urne stammen die Kugeln mit der größten Wahrscheinlichkeit?

Schriftliche Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Informatiker

Doz. Dr. Kusolitsch

27. Jänner, 1993

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei einer Lottoziehung (mindestens) ein Tripel der Form $i, i+1, i+2$ mit beliebigem i gezogen wird ?

2. Eine Zufallsvariable ξ kann nur Werte aus $\mathbb{N}_0$ annehmen und erfüllt die folgenden Bedingungen : $\mathbb{P}(\xi = 0) = p \quad p \in (0,1)$ und $\mathbb{P}(\xi \geq m+k \mid \xi \geq m) = \mathbb{P}(\xi \geq k) \quad \forall m, k \in \mathbb{N}_0$. Man berechne $\mathbb{P}(\xi = k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

3. Ein Würfel wird solange geworfen, bis die vierte "6" erscheint. Man bestimme den Erwartungswert und die Varianz der dafür nötigen Anzahl von Würfen. Außerdem berechne man die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man bis zur fünfzigsten "6" mindestens 500-mal würfeln muß. (Hinweis: Man approximiere die gefragte Wahrscheinlichkeit.)

4. Eine bestimmte Krankheit tritt bei 1000 Personen im Schnitt 2-mal auf. Ein Labortest, angewendet auf tatsächlich erkrankte Patienten, erkennt diese Krankheit mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95. Angewendet auf gesunde Menschen deutet das Testergebnis in 3% der Fälle irrtümlich auf eine Erkrankung hin. Man berechne die Wahrscheinlichkeit für ein positives (d.h. der Test deutet auf Erkrankung) Testergebnis. Weiters berechne man die Wahrscheinlichkeit, daß eine Person bei Vorliegen eines positiven Ergebisses tatsächlich krank ist.

!! Bitte neue Angaben bringen !!

Schriftliche Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Informatiker

ao. Univ.-Prof. Dr. Kusolitsch

28. Jänner, 1998

1. Ein Spieler wählt beim Lotto *6 aus 45* 10 der 45 Zahlen aus und spielt sämtliche Tips, die mit diesen 10 Zahlen gebildet werden können. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er mindestens einen Gewinn erzielt (d.h.: er muß bei mindestens einem Tip 3, oder mehr, richtige Zahlen haben)?

2. In einer Untersuchung wird der Treibstoffverbrauch männlicher und weiblicher Autofahrer gemessen. Dabei ergeben sich folgende Werte:

männlich [1]	10.4	11.5	10	10.6	10.2
weiblich [2]	13.7	9.8	12.2	11.6	13.4

   Man teste die Hypothese, daß kein Unterschied im Treibstoffverbrauch zwischen den beiden Gruppen besteht unter der Annahme, daß der Verbrauch annähernd normalverteilt ist. ($\alpha = 0.05$)

3. 8 Plastikzahnräder gleichen Typs wurden bei $21°C$ bis zu ihrem Ausfall getestet. Dabei ergaben sich folgende Umdrehungszahlen (in Mio.:)

   2.30 2.21 2.67 2.2 1.77 2.32 2 2.86

   Auf Grund langer Untersuchungsreihen scheinen diese Zahlen ($L(\mu, \sigma^2)$) logarithmisch normalverteilt zu sein. Geben Sie jeweils 90% Konfidenzintervall für μ und σ^2 an.

4. Man bestimme den ML-Schätzer für den Parameter τ einer Verteilung mit der Dichte $f(x) = \tau^{-2} x \exp(-x/\tau) \quad (x > 0)$, wenn n unabhängige Beobachtungswerte $x_1, \ldots, x_n$ zur Verfügung stehen. Ist dieser Schätzer suffizient ?

Schriftliche Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Informatiker

Doz. Dr. Kusolitsch

10. Dez. 1997

1. Die Zufallsvariable ξ sei $N(0,1)$ verteilt. Man berechne die Dichte von ξ^2.

2. Man berechne das Integral $\int_2^5 \frac{dt}{\log t}$ numerisch mit Hilfe der Monte–Carlo–Methode. Wieviele Zufallszahlen benötigt man, damit das Ergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 um nicht mehr als 0.01 vom wahren Wert abweicht ?

3. Man bestimme einen ML-Schätzer für den Parameter n einer Binomialverteilung $B_{n,p}$ (Der andere Parameter p sei bekannt.). Man berechne diesen Schätzwert für $k = 358$ und $p = 0.3$.

4. Eine Zufallsvariable ξ besitze die Verteilungsfunktion F mit

$$F(x) = 0 \cdot \mathbf{1}_{(-\infty,1)} + \frac{(x-0.5)^2}{2} \cdot \mathbf{1}_{[1,1.5)} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}_{[1.5,2)} + (x-1.5) \cdot \mathbf{1}_{[2,2.5)} + 1 \cdot \mathbf{1}_{[2.5,\infty)}$$

Zeichnen Sie diese Verteilungsfunktion und berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten :

$$\mathbb{P}(\xi < 1), \mathbb{P}(\xi \leq 1), \mathbb{P}(\xi = 2), \mathbb{P}(2 \leq \xi \leq 2.5).$$

Außerdem bestimme man die p-Fraktile für $p = 0.1$ und $p = 0.5$.

Schriftliche Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Informatiker

Doz. Dr. Kusolitsch

12. Nov. 1997

1. Es liegen 3 Warenlieferungen vor, von denen bekannt ist, daß in der ersten Lieferung eines von 10 Stücken fehlerhaft ist, in der zweiten Lieferung sind es 4 Stücke von insgesamt 20 und die aus 30 Einheiten bestehende drittte Lieferung enthält 8 Ausschußstücke. 5 Stücke werden nacheinander einer der 3 Lieferungen entnommen und kontrolliert. Dabei stellt sich heraus, daß ein Stück fehlerhaft ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die kontrollierten Stücke aus der ersten Lieferung stammen?

2. Wie oft muß man im Durchschnitt mindestens würfeln um fünf "6-er" zu erhalten? Man bestimme auch die Verteilung der benötigten Anzahl von Würfen.

3. Die Zufallsvariable ξ sei $\mathcal{N}(0,1)$ verteilt. Man berechne die Dichte von ξ^2.

4. Von einer Zufallsvariablen wird angenommen, daß sie binomialverteilt mit den Parametern $n = 5$ und unbekanntem p ist.
Eine Versuchsreihe ergibt folgende Häufigkeiten für die Ausgänge $\{0,\ldots,5\}$

x	0	1	2	3	4	5
h	3	16	36	32	11	2

Man teste die Binomialverteilungsannahme zum Niveau $\alpha = 0.1$.

KUSOLITSCH / GRILL

2. Übungstest

10. 1. 95

1. A die has one face with one eye, two faces with two eyes, and three faces with three eyes. The die is rolled twice. Calculate the distribution of the total number of eyes obtained.

2. X has a distribution with the density

$$f(x) = ax^2 \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Calculate a and the expectation and variance of X.

3. A traffic light is red for one minute, then it turns green for one minute. Calculate the probability that a randomly arriving person has to wait
   (a) not at all;
   (b) less than 30 seconds;
   (c) between 20 and 40 seconds.

Test aus

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Informatiker

Doz. Dr. Kusolitsch

27. Jänner, 1994

1. Eine Münze wird n–mal geworfen. Sei ν_n die Anzahl der Folgen (K, K, K) im Verlauf dieser n Würfe. Man berechne $E\nu_n$ und $\operatorname{var}\nu_n$.
2. Eine Zufallsvariable ξ besitze die Dichte $f(x) = ce^{-\lambda|x|}$ $x \in \mathbb{R}, \lambda > 0$. Man bestimme die Konstante c, die Verteilungsfunktion, den Erwartungswert und die Varianz von ξ.
3. Die von einer Fertigungsmaschine erzeugten Lager sind mit Wahrscheinlichkeit p_0 $0 < p_0 < 1$ unbrauchbar. Alle Lager laufen an einer Kontrolle vorbei, an der sie mit Wahrscheinlichkeit p_1 geprüft werden. Sei ξ die Wartezeit (Anzahl der Stücke) bis bei der Kontrolle das erste unbrauchbare Lager gefunden wird,und sei η die Anzahl der fehlerhaften Stücke, die die Kontrolle bis zu diesem Zeitpunkt (ungeprüft) passiert haben. Man bestimme sowohl die gemeinsame Verteilung von ξ und η als auch die Randverteilungen.

EWST KUSOLITSCH WS 94/95

1. Übungstest

1. 3 Ereignisse A, B und C erfüllen folgende Relationen:

$$\mathbf{P}(A) = 0.7,\ \mathbf{P}(B) = 0.6,\ \mathbf{P}(C) = 0.5,$$

$$\mathbf{P}(A \cap B) = 0.4,\ \mathbf{P}(A \cap C) = 0.3,\ \mathbf{P}(B \cap C) = 0.2,$$

$$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = 0.1$$

   Bestimmen Sie $\mathbf{P}(A \cup B)$, $\mathbf{P}(A - B)$, $\mathbf{P}(A \cup B \cup C)$.

2. In einer Urne sind 3 weiße und 2 schwarze Kugeln. Es wird eine Kugel gezogen, und zwei Kugeln derselben Farbe werden in die Urne zurückgelegt. Anschließend wird eine zweite Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die zwite Kugel weiß ist?
3. A und B spielen folgendes Spiel: es wird gewürfelt. Wenn eine "1" oder "6" kommt, erhält A einen Punkt, sonst B. Wer zuerst 3 Punkte hat, gewinnt den gesamten Einsatz. Wie müssen die Einsätze für A und B gewählt werden, damit das Spiel fair ist?

Test aus

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Informatiker

Doz. Dr. Kusolitsch

27. Jänner, 1993

1. Die 2–dimensionale Zufallsvariable (ξ, η) besitze die Dichte $f(x, y) = (x^3 + xy/c)\mathbb{1}_{[0,1]\times[0,2]} \quad \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$ Man bestimme c, die Randdichten von ξ und η und die bedingten Dichten. Weiters berechne man die Wahrscheinlichkeit von $[\eta < \xi + 1]$.
2. Man bestimme die Dichte der Zufallsvariablen $\eta = \xi^n, n \in \mathbb{N}$, wenn ξ die Dichte $f_\xi(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$ besitzt ($a > 0, x \in \mathbb{R}$).
3. Eine Münze wird n–mal geworfen. Sei ν_n die Anzahl der Folgen (K, K, K) im Verlauf dieser n Würfe. Man berechne $\mathbb{E}\nu_n$ und $\operatorname{var}\nu_n$.

Test aus

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Informatiker

Doz. Dr. Kusolitsch

16. Dezember, 1993

1. Die 2–dimensionale Zufallsvariable (ξ, η) besitze die Dichte $f(x,y) = (x^2 + xy/c)1_{[0,1]\times[0,2]} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ Man bestimme c, die Randdichten von ξ und η und die bedingten Dichten. Weiters berechne man die Wahrscheinlichkeit von $[\eta < \xi + 0.5]$.

2. Ein Kartenpaket mit 50 Karten enthält 6 Asse, ein zweites Paket besteht aus 60 Karten unter denen sich 10 Asse befinden. Eines der beiden Pakete wird zufälllig ausgewählt ($p = 1/2$) und danach werden aus diesem Paket 15 Karten mit Zurücklegen gezogen. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, daß das erste Paket gewählt wurde, wenn sich unter den 15 gezogenen Karten 3 Asse befinden.

3. Ein Spieler wählt beim Lotto *6 aus 45* 10 der 45 Zahlen und spielt sämtliche Tips, die mit diesen Zahlen gebildet werden können. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er mindestens einen Gewinn (d.h. in mindestens einem Tip müssen 3 oder mehr richtige Zahlen vorkommen) ?

Test aus

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Informatiker

Doz. Dr. Kusolitsch

27. Jänner, 1993

1. Die 2–dimensionale Zufallsvariable (ξ, η) besitze die Dichte $f(x,y) = (x^3 + xy/c)1_{[0,1]\times[0,2]}$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ Man bestimme c, die Randdichten von ξ und η und die bedingten Dichten. Weiters berechne man die Wahrscheinlichkeit von $[\eta < \xi + 1]$.
2. Man bestimme die Dichte der Zufallsvariablen $\eta = \xi^n, n \in \mathbb{N}$, wenn ξ die Dichte $f_\xi(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$ besitzt ($a > 0, x \in \mathbb{R}$).
3. Eine Münze wird n–mal geworfen. Sei ν_n die Anzahl der Folgen (K, K, K) im Verlauf dieser n Würfe. Man berechne $\mathbb{E}\nu_n$ und $\operatorname{var}\nu_n$.

Test aus

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Informatiker

Doz. Dr. Kusolitsch

16. Dezember, 1993

1. Die 2–dimensionale Zufallsvariable (ξ, η) besitze die Dichte $f(x,y) = (x^2 + xy/c)1_{[0,1]\times[0,2]} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ Man bestimme c, die Randdichten von ξ und η und die bedingten Dichten. Weiters berechne man die Wahrscheinlichkeit von $[\eta < \xi + 0.5]$.

2. Ein Kartenpaket mit 50 Karten enthält 6 Asse, ein zweites Paket besteht aus 60 Karten unter denen sich 10 Asse befinden. Eines der beiden Pakete wird zufälllig ausgewählt ($p = 1/2$) und danach werden aus diesem Paket 15 Karten mit Zurücklegen gezogen. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, daß das erste Paket gewählt wurde, wenn sich unter den 15 gezogenen Karten 3 Asse befinden.

3. Ein Spieler wählt beim Lotto *6 aus 45* 10 der 45 Zahlen und spielt sämtliche Tips, die mit diesen Zahlen gebildet werden können. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er mindestens einen Gewinn (d.h. in mindestens einem Tip müssen 3 oder mehr richtige Zahlen vorkommen) ?

Test aus

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Informatiker

Doz. Dr. Kusolitsch

17. Dezember, 1992

1. Es liegen 3 Warenlieferungen vor, von denen bekannt ist, daß in der ersten Lieferung eines von 10 Stücken fehlerhaft ist, in der zweiten Lieferung sind es 4 Stücke von insgesamt 20 und die aus 30 Einheiten bestehende drittte Lieferung enthält 8 Ausschußstücke. 5 Stücke werden nacheinander einer der 3 Lieferungen entnommen und kontrolliert. Dabei stellt sich heraus, daß ein Stück fehlerhaft ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die kontrollierten Stücke aus der ersten Lieferung stammen.

2. Die Lebensdauer von Batterien ist exponentialverteilt mit dem Mittel 6 Stunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit arbeitet ein Elektrogerät, das zum Betrieb eine dieser Batterien benötigt, länger als 16 Stunden, wenn zwei Ersatzbatterien zur Verfügung stehen ?

3. Eine Zufallsvariable ξ besitze die Verteilungsfunktion F mit

$$F(x) = 0 \cdot 1_{(-\infty,1)} + \frac{(x-0.5)^2}{2} \cdot 1_{[1,1.5)} + \frac{1}{2} \cdot 1_{[1.5,2)} + (x-1.5) \cdot 1_{[2,2.5)} + 1 \cdot 1_{[2.5,\infty)}$$

Zeichnen Sie diese Verteilungsfunktion und berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten :

$$\mathbb{P}(\xi < 1), \mathbb{P}(\xi \leq 1), \mathbb{P}(\xi = 2), \mathbb{P}(2 \leq \xi \leq 2.5).$$

Außerdem bestimme man die p-Fraktile für $p = 0.1$ und $p = 0.5$.

Prüfung aus "WaRe.u.Stat.f.Informatiker" - Doz. Kusolitsch

16.12.1992

1. X ist eine Zufallsvariable, die nur Werte aus $\{0, 1, 2, \ldots\}$ annehmen kann. Es ist bekannt, daß

$$P\{X = 0\} = p \in (0, 1)$$

und

$$P\{X \geq m + k | X \geq m\} = P\{X \geq k\}$$

ist. Berechnen Sie $P\{X = k\} k \geq 1$.

2. Wir haben zwei Würfel A und B. A hat 4 rote und 2 weiße Seiten, B hat 2 rote und 4 weiße Seiten.
Wir wählen zufällig einen Würfel aus (d.h. mit $W. = 1/2$) und würfeln ab nun nur mit diesem.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß der Würfel A verwendet wird, wenn die ersten n Würfe rot waren.

3. Ein Würfel wird solange geworfen bis die zweite "6" erscheint.
   a. Bestimme Erwartungswert und Varianz der Wartezeit.
   b. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man bis zur fünfzigsten "6" mehr als 400 mal würfeln muß ? (Verwende eine geeignete Approximation.)

4. Man konstruiere einen schärfsten Test für $H_0 := \{P_{0,2}\}$ gegen $H_1 := \{P_1\}$, wobei $P_\lambda \lambda > 0$ eine Poissonverteilung mit dem Parameter λ ist. Wie groß muß die kritische Größe für diesen Test bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.01$ und $n = 10$ sein?

Schriftliche Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Informatiker

Doz. Dr. Kusolitsch

29. Juni, 1992

1. Es liegen 3 Warenlieferungen vor, von denen bekannt ist, daß in der ersten Lieferung eines von 10 Stücken fehlerhaft ist, in der zweiten Lieferung sind es 4 Stücke von insgesamt 20 und die aus 30 Einheiten bestehende drittte Lieferung enthält 8 Ausschußstücke. 5 Stücke werden nacheinander einer der 3 Lieferungen entnommen und kontrolliert. Dabei stellt sich heraus, daß ein Stück fehlerhaft ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die kontrollierten Stücke aus der ersten Lieferung stammen.

2. Wie oft muß man im Durchschnitt mindestens würfeln um fünf "6-er" zu erhalten? Man bestimme auch die Verteilung der benötigten Anzahl von Würfen.

3. Die Zufallsvariable ξ sei $N(0, 1)$ verteilt. Man berechne die Dichte von ξ^2.

4. Von einer Zufallsvariablen wird angenommen, daß sie binomialverteilt mit den Parametern n = 5 und unbekanntem p ist.
Eine Versuchsreihe ergibt folgende Häufigkeiten für die Ausgänge $\{0, \ldots, 5\}$

x	0	1	2	3	4	5
h	3	16	36	32	11	2

Man teste die Binomialverteilungsannahme zum Niveau $\alpha = 0.1$.

Schriftliche Prüfung aus
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Informatiker
11. März, 1992

1. Bei günstigem Wetter beobachtet ein Pilot den Flugplatz visuell. Die Wahrscheinlichkeit einer glücklichen Landung ist dann p_1. Bei schlechten Witterungsverhältnissen führt er eine reine Instrumentenlandung durch. Die Zuverlässigkeit (d.i. die Wahrscheinlichkeit einwandfreier Arbeit) der Apparatur ist gleich p. Die Wahrscheinlichkeit einer glücklichen Landung ist bei einwandfrei funktionierender Apparatur die gleiche wie bei visueller Beobachtung. Fällt die Apparatur aus, so hat die Wahrscheinlichkeit einer guten Landung einen sehr kleinen Wert p_1^*.
   a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit einer guten Landung, wenn bekannt ist, daß bei k% der Landungen der Pilot schlechte Sicht hat.
   b) Wie groß ist nach geglückter Landung die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Pilot eine Instrumentenlandung durchführte.

2. X_1 und X_2 seien 2 unabhängige poissonverteilte Zufallsvariable mit dem Parameter λ_1 bzw. λ_2. Man bestimme die Verteilungen von $X_1 + X_2$.

3. Eine Fabrik erzeugt 7000 Einheiten pro Arbeitsschicht, die mit einer Wahrscheinlichkeit von p = 0.03 defekt sind. Defekte Stücke werden in einem Behälter gesammelt, welcher am Ende einer jeden Schicht entleert wird.
   Wieviele Einheiten muß dieser Behälter aufnehmen können, damit er höchstens mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.005 während einer Schicht überfüllt wird?

4. Von einer Zufallsvariablen wird angenommen, daß sie binomialverteilt mit den Parametern n = 5 und unbekanntem p ist.
   Eine Versuchsreihe ergibt folgende Häufigkeiten für die Ausgänge $\{0, \ldots, 5\}$

x	0	1	2	3	4	5
h	3	16	36	32	11	2

Man teste die Binomialverteilungsannahme zum Niveau $\alpha = 0.05$.

Prüfung aus Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Informatiker
(Doz. Kusolitsch)
29. 1.1992

1. Aus einer Menge von N Elementen werden zunächst r Elemente entnommen, danach wird eine 2-te Stichprobe vom Umfang s gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die beiden Stichproben kein Element gemeinsam haben? Wie kann diese Wahrscheinlichkeit für großes N approximiert werden kann? Man berechne die obige Wahrscheinlichkeit für N = 100 000, r = 2 500, s = 187.

2. Eine Verkehrsampel zeigt eine Minute lang grünes Licht und schaltet dann für 40 Sekunden auf Rot. Man bestimme die Verteilungsfunktion für die Wartezeit τ eines zufällig zur Kreuzung kommenden Autofahrers.

3.Sei $\xi_1,\ldots,\xi_n$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter ZV mit $P(\xi_1=1)= P(\xi_1=0) = 1/2$. Eine Folge $(\xi_{i+1}(\omega),\ldots,\xi_{i+k}(\omega))$ heißt ein " Run" der Länge k, wenn i= 0 oder $\xi_i(\omega)\neq \xi_{i+1}(\omega)$,wenn weiters $\xi_{i+1}(\omega)=\ldots=\xi_{i+k}(\omega)$ und wenn i+k=n oder $\xi_{i+k}(\omega)\neq\xi_{i+k+1}(\omega)$ Die Anzahl der Runs in $\xi_1(\omega),\ldots,\xi_n(\omega)$ bezeichnen wir mit R(ω).
a) Man berechne ER und VR.
b) Man versuche zu beurteilen, ob die untenstehende Folge tatsächlich durch das Werfen einer Münze entstanden ist oder ob es sich eher um eine willkürlich hingeschriebene Folge handelt: 10010 11010 01011 00010 11001 01011 00010 10100.

4. Sei ξ eine $N(\mu,\sigma^2)$ = verteilte ZV und $\xi_1,\ldots,\xi_n$ eine zugehörende Stichprobe vom Umfang n und $\gamma \in (0,1)$. Erstellen Sie zunächst ein 100γ % - Konfidenzintervall $I_\sigma(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ für den Mittelwert μ bei bekannter Varianz σ^2, und betrachten Sie dann das 100γ % - Konfidenzintervall $I_s(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ für μ bei unbekannter Varianz. Vergleichen Sie die durchscnittliche Länge von I_σ und I_s für $\gamma = 0.9$ und n = 3,5,10,50.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik f. Inf. - Doz. Kusolitsch
Mündliche Fragen

- Eigenschaften der Verteilungsfunktion
- Limes superior und inferior einer Mengenfolge, die Lemmas von Borel-Cantelli
- Bedingte Verteilung zweier Zufallsvariablen
- Anpassungstests (Chi-Quadrat und Kolmogoroff-Smirnoff)
- Transformation von Zufallsvariablen
- mögliche Eigenschaften von Schätzern

7

Prüfung aus Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Informatiker

(Doz. Kusolitsch)

29. 1.1992

1. Aus einer Menge von N Elementen werden zunächst r Elemente entnommen, danach wird eine 2-te Stichprobe vom Umfang s gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die beiden Stichproben kein Element gemeinsam haben? Wie kann diese Wahrscheinlichkeit für großes N approximiert werden kann? Man berechne die obige Wahrscheinlichkeit für N = 100 000, r = 2 500, s = 187.

2. Eine Verkehrsampel zeigt eine Minute lang grünes Licht und schaltet dann für 40 Sekunden auf Rot. Man bestimme die Verteilungsfunktion für die Wartezeit τ eines zufällig zur Kreuzung kommenden Autofahrers.

3. Sei $\xi_1,\dots,\xi_n$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter ZV mit $P(\xi_1=1)= P(\xi_1=0) = 1/2$. Eine Folge $(\xi_{i+1}(\omega),\dots,\xi_{i+k}(\omega))$ heißt ein " Run" der Länge k, wenn $i= 0$ oder $\xi_i(\omega)\neq \xi_{i+1}(\omega)$, wenn weiters $\xi_{i+1}(\omega)=\dots=\xi_{i+k}(\omega)$ und wenn $i+k=n$ oder $\xi_{i+k}(\omega)\neq\xi_{i+k+1}(\omega)$ Die Anzahl der Runs in $\xi_1(\omega),\dots,\xi_n(\omega)$ bezeichnen wir mit $R(\omega)$.

a) Man berechne ER und VR.

b) Man versuche zu beurteilen, ob die untenstehende Folge tatsächlich durch das Werfen einer Münze entstanden ist oder ob es sich eher um eine willkürlich hingeschriebene Folge handelt: 10010 11010 01011 00010 11001 01011 00010 10100.

4. Sei ξ eine $N(\mu,\sigma^2)$ = verteilte ZV und $\xi_1,\dots,\xi_n$ eine zugehörende Stichprobe vom Umfang n und $\gamma \in (0,1)$. Erstellen Sie zunächst ein 100γ % - Konfidenzintervall $I_\sigma(\xi_1,\dots,\xi_n)$ für den Mittelwert μ bei bekannter Varianz σ^2, und betrachten Sie dann das 100γ % - Konfidenzintervall $I_s(\xi_1,\dots,\xi_n)$ für μ bei unbekannter Varianz. Vergleichen Sie die durchscnittliche Länge von I_σ und I_s für $\gamma = 0.9$ und $n = 3,5,10,50$.

Prüfung "W.-Rechnung und Statistik für Informatiker"

Doz. Kusolitsch

12.4.1989

1) Eine telegraphische Nachricht besteht aus den Signalen "Punkt" und "Strich".
Bei der Übertragung können folgende Störungen auftreten:
Wird "Punkt" gesendet, so wird mit Wahrscheinlichkeit 2/5 "Strich" empfangen, wird "Strich" gesendet, so wird mit W. 1/3 "Punkt" empfangen.
Außerdem ist bekannt, daß die Signale "Punkt" und "Strich" im Verhältnis 5:3 gesendet werden.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß
a) "Punkt" gesendet wurde, wenn "Punkt" empfangen wird.
b) "Strich gesendet wurde, wenn "Strich" empfangen wird,
c) das Signal, das empfangen wird, auch gesendet wurde.

2) Die folgende Stichprobe stammt aus einer Normalverteilung $N(\mu,\sigma^2)$:
9.9 12.5 10.3 9.2 6.0 10.9 10.3 11.8 11.6 9.8 14.0 .
Geben Sie Konfidenzintervalle für μ und σ^2 mit Überdeckungswahrscheinlichkeit 0.9 an.

3) Die Zufallsvariable K ist binomialverteilt mit den Parametern n und p, wobei p=1/3 bekannt ist.
Eine Stichprobe ergibt k=100. Berechnen Sie einen ML-Schätzer für n.

4) X ist eine Zufallsvariable, die nur Werte aus {0,1,2,...} annehmen kann. Es ist bekannt, daß

$P\{X=0\}=p\epsilon(0,1)$

und

$P\{X\geq m-k | X\geq m\}=P\{X\geq k\}$

ist.
Berechnen Sie $P\{X=k\}$ $k\geq 1$.

Bitte neue Angaben bringen!

Prüfung aus Einführung
in die Wahrscheinlichkeitsrechnung
und Statistik für Informatiker

1. Ein Würfel wird 4-mal geworfen. Man bestimme die Verteilung der kleinsten Augenzahl unter den 4 Würfen.

2. Wie kann man cauchy-verteilte Zufallszahlen mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators erzeugen, der auf (0,1) stetig gleichverteilte Zahlen generiert?
(VF der Cauchyverteilung: $F(x) := 1/\pi \arctan x$).

3. Seien $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ auf $(0,\theta)$ stetig gleichverteilte Zufallsvariable. Der Parameter θ sei unbekannt. Man konstruiere mit Hilfe von $\xi_{(n)} := \max \xi_i$ einen erwartungstreuen Schätzer für θ und berechne die Varianz dieses Schätzers.

4. Ein Würfel wird 120-mal geworfen. Dabei treten folgende Ausgänge auf.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	20	22	17	18	19	24

Man teste auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ ob der Würfel fair ist.

Schriftliche Prüfung aus "Wahrscheinlichkeitstheorie"

[redacted]

9. Nov. 1988

1. X und Y seien unabhängig zufällige Variablen mit Dichte [redacted].

Bestimme die Verteilung von $X + Y$.

2. Ein Würfel wird solange geworfen bis die zweite [redacted] "6" erscheint.

   (a) Bestimme Erwartungswert und Varianz der Wartezeit.

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man bis zur fünfzigsten "6" mehr als 400 mal würfeln muß? (Verwende eine geeignete Approximation.)

3. In einer Fabrik werden technische Geräte hergestellt. Geräte, die an einem Montag hergestellt werden, sind mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% schlecht, an allen anderen Tagen beträgt diese Wahrscheinlichkeit 5%. Bei einer anschließenden Kontrolle werden am Montag 60%, sonst 80% der fehlerhaften Geräte ausgesondert.

   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein ausgeliefertes Gerät fehlerhaft ist?

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein ausgeliefertes fehlerhaftes Gerät an einem Montag hergestellt wurde?

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bzw.

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 2 \le x \le 3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

---

1) Eine telegraphische Nachricht besteht aus den Signalen "Punkt" und "Strich".
Bei der Übertragung können folgende Störungen auftreten:
Wird "Punkt" gesendet, so wird mit Wahrscheinlichkeit 2/5 "Strich" empfangen, wird "Strich" gesendet, so wird mit W. 1/3 "Punkt" empfangen.
Außerdem ist bekannt, daß die Signale "Punkt" und "Strich" im Verhältnis 5:3 gesendet werden.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, daß
a) "Punkt" gesendet wurde, wenn "Punkt" empfangen wird,
b) "Strich" gesendet wurde, wenn "Strich" empfangen wird,
c) das Signal, das empfangen wird, auch gesendet wurde.

2) Wie kann man mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode das Integral

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} \quad , \; x>2,$$

approximieren, wenn man einen Zufallsgenerator zur Verfügung hat, der gleichverteilte Zufallszahlen in (0,1) liefert?
Warum ist die Monte-Carlo-Methode anwendbar?

3) Wieviele unabhängige Versuche muß man durchführen, um mit Wahrscheinlichkeit 0.8 das Ereignis A, das mit Wahrscheinlichkeit P(A)=0.05 eintritt, mindestens 20mal zu beobachten?
Verwenden Sie den zentralen Grenzverteilungssatz.

4) Die Zufallsvariable K ist binomialverteilt mit den Parametern n und p, wobei p=1/3 bekannt ist.
Eine Stichprobe ergibt k=100. Berechnen Sie einen ML-Schätzer für n.

6

Prüfung "W.-Rechnung und Statistik für Informatiker"

Doz. Kusolitsch

SS 1988 4.7.1988

1) Es liegen zwei Warenpartien vor, von denen bekannt ist, daß in einer Partie jede Ware den geforderten Bedingungen genügt und in der anderen Partie 1/4 der Waren Ausschuß sind. Eine Ware, die man willkürlich aus einer der Partien auswählt, war einwandfrei. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine zweite aus dieser Partie genommene Ware Ausschuß ist, wenn man die erste Ware nach der Überprüfung wieder in die entsprechende Partie zurückgelegt hat.

2) Wie kann man mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode das Integral

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} \quad , \; x>2,$$

approximieren, wenn man einen Zufallsgenerator zur Verfügung hat, der gleichverteilte Zufallszahlen in (0,1) liefert?
Warum ist die Monte-Carlo-Methode anwendbar?

3) Die folgende Stichprobe stammt aus einer Normalverteilung $N(\mu,\sigma^2)$: 9.9 12.5 10.3 9.2 6.0 10.9 10.3 11.8 11.6 9.8 14.0 .
Geben Sie Konfidenzintervalle für μ und σ^2 mit Überdeckungswahrscheinlichkeit 0.9 an.

4) Die Zufallsvariable K ist binomialverteilt mit den Parametern n und p, wobei p=1/3 bekannt ist.
Eine Stichprobe ergibt k=100. Berechnen Sie einen ML-Schätzer für n.

Prüfung "W.-Rechnung und Statistik für Informatiker"

Doz. Kusolitsch

SS 1988 29.6.1988

1) Eine telegraphische Nachricht besteht aus den Signalen "Punkt" und "Strich".
Bei der Übertragung können folgende Störungen auftreten:
Wird "Punkt" gesendet, so wird mit Wahrscheinlichkeit 2/5 "Strich" empfangen, wird "Strich" gesendet, so wird mit W. 1/3 "Punkt" empfangen.
Außerdem ist bekannt, daß die Signale "Punkt" und "Strich" im Verhältnis 5:3 gesendet werden.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, daß
a) "Punkt" gesendet wurde, wenn "Punkt" empfangen wird,
b) "Strich" gesendet wurde, wenn "Strich" empfangen wird,
c) das Signal, das empfangen wird, auch gesendet wurde.

2) Sei $X_1,\ldots,X_n$ eine Stichprobe aus einer Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Dichte

$$f(x;\Theta_1,\Theta_2)=\frac{1}{\Theta_2}\exp\left\{-\frac{(x-\Theta_1)}{\Theta_2}\right\}$$

für $x\geq\theta$, und 0 sonst, $\theta_1>0$, $\theta_2>0$.

Ermitteln Sie ML-Schätzer für θ_1 und θ_2.

3) Die folgende Stichprobe stammt aus einer Normalverteilung $N(\mu,\sigma^2)$: 9.9 12.5 10.3 9.2 6.0 10.9 10.3 11.8 11.6 9.8 14.0 .
Geben Sie Konfidenzintervalle für μ und σ^2 mit Überdeckungswahrscheinlichkeit 0.9 an.

4) Wieviele unabhängige Versuche muß man durchführen, um mit Wahrscheinlichkeit 0.8 das Ereignis A, das mit Wahrscheinlichkeit P(A)=0.05 eintritt, mindestens 20mal zu beobachten?
Verwenden Sie den zentralen Grenzverteilungssatz.