Inst. f. Angew. u. Numer. Mathematik
Dr. Ewa B. Weinmüller

WS 2003/04

Computer-Numerik

Prüfung am 30. November 2004

Familienname	Vorname	Kennzahl & Matrikelnummer

Frage 1	Frage 2	Frage 3	Gesamt
(1.1)	(2.1)	(3.1)	
(1.2)	(2.2)	(3.2)	
(1.3)	(2.3)	(3.3)	
(1.4)	(2.4)	(3.4)	
(1.5)	(2.5)		
	(2.6)		
	(2.7)		

Bitte, schreiben Sie Ihren Namen auf die erste Seite und benützen Sie nur die vorhandenen Blätter für die Beatwortung der Fragen. Viel Erfolg !

(1.1) Definieren Sie die Norm in einem linearen Vektorraum. Wozu dient die Norm? Wie werden die Abstände zwischen Elementen des Vektorraumes (Fehler) in der Norm gemessen?

(1.2) Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, mit einer reellen regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und den Vektoren x, $b \in \mathbb{R}^n$. Weiters sei das gestörte lineare Gleichungssystem $A\tilde{x} = \tilde{b}$ gegeben.

(a) Ergänzen Sie die untenstehende Abschätzung und erklären Sie alle Größen die in dieser Abschätzung auftreten

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

(b) Für welche Matrizen liegt ein schlecht-konditioniertes Problem vor?

(1.3) (a) In einer Gleitpunktarithmetik werden positive reelle Zahlen wie folgt dargestellt

$$x = m \cdot b^e = \sum_{j=1}^{p} d_j b^{-j} \cdot b^e$$

und durch das Bitmuster

$$e \quad \underbrace{d_1 d_2 d_3 \ldots d_p}_{m}$$

kodiert. Erklären Sie die in der obigen Darstellung auftretenden Größen. Wann spricht man von normalisierten Gleitpunktzahlen?

(b) Geben Sie mindestens zwei Rechengesetze an, die beim Rechnen mit reellen Zahlen gelten, doch beim Rechnen mit den Maschinenzahlen ihre Gültigkeit verlieren.

(c) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $\Box x \in \mathbb{F}$ der gerundete Wert von x. Kann man für den elementaren relativen Rundungsfehler

$$\rho(x) := \frac{\Box x - x}{x}$$

eine Schranke angeben, die im gesamten Bereich der normalisierten Maschinenzahlen (unabhängig von der Größe von x) gilt? Wenn ja, geben Sie diese Schranke an.

(1.4) Erklären Sie den Begriff *Fehlerfortpflanzung* in Zusammenhang mit einem numerischen Algorithmus. Wann nennt man einen Algorithmus numerisch stabil?

(1.5) Erklären Sie den Begriff *Auslöschung*. Warum führt die Auslöschung, im allgemeinen, zu einem großen Fehler im Ergebnis?

Die folgenden Fragen beziehen sich auf das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit regulärer Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $x, b \in \mathbb{R}^n$.

(2.1) Angenommen, A und b sind exakt, d.h. sie weisen *keine* Datenfehler auf. Kann das lineare Gleichungssystem trotzdem numerisch singulär sein?

nein ◯ ja ◯

Hängt die Antwort auf diese Frage von der bei der Lösung verwendeten Gleitpunkt-Arithmetik ab?

nein ◯ ja ◯

Falls es eine solche Abhängigkeit gibt, wie sieht diese im Fall einer Arithmetik mit *eps* $\approx 10^{-8}$ aus?

(2.2) Warum sollte man lineare Gleichungssysteme *nicht* unter Verwendung der Formel
$x = A^{-1}b$ lösen?

(2.3) Welche zwei Maßnahmen ergreift man, um den Gaußschen Algorithmus im statistischen Sinne stabil zu machen?

(1)

(2)

(2.4) Angenommen, für die Koeffizientenmatrix A liegt ihre LU−Zerlegung vor, $A = LU$, wobei L eine untere Dreiecksmatrix und U eine obere Dreiecksmatrix ist. Wie löst man dann das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ nach x auf? Welche Vorteile hat diese Vorgangsweise?

Die folgenden Fragen beziehen sich auf das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit einer rechteckigen Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und mit den Vektoren $x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m,\ m \geq n$.

(2.5) Angenommen, die Matrix A hat vollen Rang. Ist dann das Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar? D.h. gibt es dann zu jedem $b \in \mathbb{R}^m$ ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax - b = 0$?

nein ◯ ja ◯

Angenommen, die Matrix A hat vollen Rang. Ist dann das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \text{Min}$ lösbar?

nein ◯ ja ◯

Falls ja, ist eine solche Lösung eindeutig?

nein ◯ ja ◯

(2.6) Es gibt zwei Möglichkeiten das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \text{Min}$ numerisch zu lösen, mittels QR-Zerlegung oder mit Hilfe der Gaußschen Normalgleichungen. Angenommen, das Problem ist sehr gut konditioniert. Liefern beide numerische Methoden vergleichbar gute Ergebnisse?

nein ◯ ja ◯

(2.7) Wie lauten die Gaußschen Normalgleichungen?

(3.1) Ein Anwender hat sehr viele meßfehlerbehaftete Daten $(x_i, y_i), i = 1, 2, ..., n$; n groß. Er weiß, daß die Daten einem polynomialen Zusammenhang entstammen. Er weiß aber nichts über den Polynomgrad in diesem Zusammenhang. Er überlegt, ob er ein Polynom hohen Grades $(= n - 1)$ durch die Daten durchlegen soll, oder ob er einen anderen Weg beschreiten soll, um den analytischen Zusammenhang zwischen x_i und y_i aufzustellen. Welchen Rat würden Sie ihm geben und warum?

(3.2) Ein anderer Anwender hat exakte Daten $(x_i, y_i), i = 1, 2, ...25; x_i \in [-1, 1]$ und er weiß, daß diese Daten einer glatten Funktion entstammen, die er mit einem Polynom 24. Grades approximieren will. Er kann über die Lage der Konten x_i verfügen und überlegt, welches der beiden folgenden Interpolationspolynome er aufstellen soll: mit Tschebyscheff-Abszissen als Interpolationsknoten oder äquidistanten Stellen als Interpolationsknoten. Wozu würden Sie ihm raten? Geben Sie für Ihren Rat eine Begründung an.

(3.3) Geben Sie die Formel für den Verfahrensfehler an, den man begeht, wenn man eine Funktion $f \in C^{d+1}[a,b]$ durch ein Interpolationspolynom vom Grad d ersetzt. Erklären Sie alle in der Formel vorkommenden Größen. Zeichnen Sie den ungefähren Verlauf des Interpolationsfehlers, falls
(a) die Interpolation an äquidistanten Knoten vorgenommen wird,
(b) die Interpolation an den transformierten Tschebyscheff-Abszissen vorgenommen wird.
In beiden Fällen soll die Anzahl der Interpolationsstellen gleich sein.