# AUTOMATEN UND FORMALE SPRACHEN

**1. Test am 18. Januar 2002**

| Kennnummer: | Matrikelnummer: | Vorname: | Zuname: |
|---|---|---|---|
| | | | |

1) Sei $L_1 = \left\{ w \mid w \in \{0,1,2\}^+ \wedge 30\nu(w,0) = 18\nu(w,1) = 75\nu(w,2) \right\}$.

Definieren Sie eine monotone Grammatik $G_1 = (\{S_1\}, \{0,1,2\}, P_1, S_1)$, die $L_1$ erzeugt, und erläutern Sie die Arbeitsweise Ihrer Grammatik. (28 Punkte)

$P_1 = \{(S_1, \qquad\qquad ), (S_1, \qquad\qquad )\} \cup \{(xy, yx) \mid x, y \in \{ \qquad\qquad \}\}$

(a) $S_1 \vdash_{G_1}^{n-1} \qquad\qquad \vdash_{G_1} \qquad\qquad$ für alle $n \geq 1$.

(b) $\qquad\qquad \vdash_{G_1}^{*} w$ für jedes $w \in L_1$ mit Hilfe der Vertauschungsregeln aus $\{(xy, yx) \mid x, y \in \{ \qquad\qquad \}\}$.

(c) Ist $w \in \{ \qquad\qquad \}^*$ eine in $G_1$ ableitbare Satzform, d.h. $S_1 \vdash_{G_1}^{*} w$, so gilt $30\nu(w,0) = 18\nu(w,1) = 75\nu(w,2)$, denn

- die Vertauschungsregeln $(xy, yx)$

- und die Produktionen mit $S_1$ auf der linken Seite

Aus a) und b) folgt aber sofort $L(G_1) \qquad L_1$, aus c) hingegen $L(G_1) \qquad L_1$, d.h. insgesamt also $L(G_1) = L_1$.

2) Sei $L_2 = \{0^{181n}1^{2002n} \mid n \geq 1\}$.

(a) Beweisen Sie mit Hilfe des Korollars zum Pumping Lemma für reguläre Sprachen, dass $L_2$ nicht regulär ist. (12 Punkte)

**Beweis indirekt.** Angenommen $L_2$ ist regulär. Sei $n$ die Konstante aus dem Pumping Lemma und $z = 0^{181n}1^{2002n}$; dann ist $z$ aus $L_2$ und $|z| = |0^{181n}1^{2002n}| = \qquad\qquad n > n$.

Nach dem Korollar zum Pumping Lemma kann man also $z = uvw$ mit $u, v, w \in \{0,1\}^*$, $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, schreiben, sodass $uv^iw$ für alle $i \in N$ aus $L_2$ ist. Dann muss aber $uv \in \{0\}^*$ und somit auch – wegen $|v| \geq 1$ – $v \in \{0\}^+$ gelten und $uv^0w = \qquad\qquad$ aus $L_2$ sein. Wegen $1 \leq |v| \leq n$ gilt jedoch somit $|\nu(uv^0w, 0)| \qquad\qquad$. Da das einzige Wort aus $L_2$ der Gestalt $\qquad\qquad$ für ein $k \in N$ ist, kann daher $uv^0w$ nicht aus $L_2$ sein. Widerspruch! $L_2$ ist deshalb keine reguläre formale Sprache.

Q.E.D.

(b) Definieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G_2 = (\{S_2\}, \{0,1\}, P_2, S_2)$ mit nur zwei Produktionen und mit $L(G_2) = L_2$. (14 Punkte)

$G_2 = (\{S_2\}, \{0,1\}, P_2, S_2)$. $P_2 = \{$ $\}$.

Ableitung: $S_2 \vdash_{G_2}^{n-1}$ $\vdash_{G_2}$ für alle $n \geq 1$.

(c) Sei $L_3 = \{2^{2002m} \mid m \geq 0\}$. Definieren Sie eine reguläre Grammatik $G_3 = (\{S_3\}, \{2\}, P_3, S_3)$ (mit nur zwei Produktionen der Gestalt $S_3 \to w$ oder $S_3 \to wS_3$, $w \in \{2\}^*$) mit $L(G_3) = L_3$. (10 Punkte)

$G_3 = (\{S_3\}, \{2\}, P_3, S_3)$. $P_3 = \{$ $\}$.

Ableitung: $S_3 \vdash_{G_3}^{m}$ $\vdash_{G_3}$ für alle $m \geq 0$.

(d) Definieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G$, die $L_2.L_3$ erzeugt: (8 Punkte)
(Ist $G$ in erweiterter Greibach-Normalform, so ergibt dies 10 Zusatzpunkte!)

$G = (\{S, S_2, S_3\}, \{0,1,2\}, P, S)$

$P =$

3) Sei $L_4 = \{ab\}^+ \{b\}$.

(a) Konstruieren Sie den Graphen eines deterministischen endlichen Automaten $M_4 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, P_4, q_0, \{q_3\})$ mit $L(M_4) = L_4$ (Falle $q_{Falle}$ weglassen). (16 Punkte)


(b) Konstruieren Sie aus dem oben angegebenen deterministischen endlichen Automaten $M_4$ eine reguläre Grammatik $G_4 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, P_4, q_0)$ mit $L(G_4) = L_4$. (12 Punkte)

$P_4$ enthält die folgenden Produktionen:

$q_0 \to$ $\qquad$ $q_1 \to$

$q_2 \to$ $\qquad$ $q_3 \to$

15 –

# Automaten und Formale Sprachen - Übungen WS 1989/90

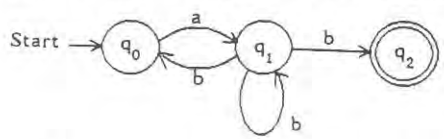
## 2. Nachtragstest am 29. Mai 1990

| Familienname: | Vorname: | Matrikelnummer: |
|---|---|---|
| | | |

1) Definieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten, der die Sprache $L = \{ w \in \{1,2,\ldots,m-1\}\{0,1,2,\ldots,m-1\}^* \mid \mu_m(w) \equiv 1 \pmod{113} \}$ akzeptiert, wobei m Ihre Matrikelnummer ist ( Falle *nicht* weglassen !)!
( Dabei bedeutet $\mu_m$ jene Abbildung, die ein Wort $w \in \{1,2,\ldots,m-1\}\{0,1,2,\ldots,m-1\}^*$ als Zahl zur Basis m interpretiert und den entsprechenden Zahlenwert zuordnet, d.h. für $w = a_1 \ldots a_n$ mit $a_i \in \{0,1,2,\ldots,m-1\}$, $1 \le i \le n$, $a_1 \ne 0$, ist $\mu_m(w) = \sum_{i=1}^{n} a_i m^{n-i}$. )

( 10 Punkte )

2) Gegeben sei der folgende nondeterministische endliche Automat M:




a) Definieren Sie nur unter Verwendung von Konkatenation und " * " einen regulären Ausdruck für L(M) ( $L(\alpha) = \{a\}$, $L(\beta) = \{b\}$ ) !

( 6 Punkte )

b) Definieren Sie eine reguläre Grammatik $G = (\{S,B\},\{a,b\},P,S)$ mit $L(G) = L(M)$ ! ( Beachten Sie die vorgegebenen Variablen ! )

( 6 Punkte )

c) Definieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten M' mit $L(M') = L(M)$ ( Fallen und unnötige Zustände weglassen ! )!

( 6 Punkte )

3) Gegeben sei die kontextfreie Sprache $L = \{ s^{23n} r^{59n} \mid n \in \mathbb{N} \}$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, daß L nicht regulär ist!

( 10 Punkte )

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (\{S\},\{r,s\},P,S)$ an, für die $L(G) = L$ gilt, und beweisen Sie dies mittels Induktion nach der Länge der Ableitung in G.

( 12 Punkte )


# Automaten und Formale Sprachen - Übungen WS 1989/90

## 2. Nachtragstest am 29. Mai 1990

| Familienname: | Vorname: | Matrikelnummer: |
|---|---|---|
| | | |


4) Definieren Sie einen Pushdown-Automaten $M = (\{q_0,q_1,q_2\},\{2,3\},\{Z_0,3\},\delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$, der die Sprache $L = \{ 2^n 3^m \mid 0 \le n \le m \le kn \}$ durch Endzustand mit leerem Stack akzeptiert, wobei k die letzte Ziffer Ihrer Matrikelnummer ist.
( Beachten Sie die vorgegebenen Zustände bzw. das vorgegebene Stackalphabet des Pushdown-Automaten M ! )

( 10 Punkte )

5) Sei $h: \{0,1\}^* \to \{r,s\}^*$ der Homomorphismus mit $h(0) = r$ und $h(1) = srr$.
Definieren Sie eine Turingmaschine $M = (Q,\{0,1,r,s\},\{0,1,r,s,X,Y,B,\$\}, \delta, q_0, \{B,\$\}, \{q_f\})$, welche die Sprache $L = \{ w\,h(w) \mid w \in \{0,1\}^+ \}$ akzeptiert, und erläutern Sie die Arbeitsweise Ihrer Maschine; M soll dabei - ausgehend von einer Startkonfiguration $\$ q_0 z$ für ein $z \in \{0,1,r,s\}^*$ - genau dann mit der Endkonfiguration $\$ q_f$ im Endzustand $q_f$ halten, wenn $z \in L$ gilt.

( 15 Punkte )

6) Sei $L = \{ w \in \{a,b,c\}^* \mid \nu(w,a) = 2\nu(w,b) = 3\nu(w,c) \}$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen, daß L keine kontextfreie Sprache sein kann!

( 13 Punkte )

b) Geben Sie eine monotone Grammatik $G = (\{S\},\{a,b,c\},P,S)$ an, die L erzeugt, und begründen Sie, warum $L(G) = L$ gilt!
( Beachten Sie, daß $\varepsilon$ aus L ist und S die einzige Variable in G ist! )

( 12 Punkte )

# AUTOMATEN UND FORMALE SPRACHEN

**1. ÜBUNGSTEST am 24. November 1994**

| Kennzahl/Matrikelnummer | Familienname | Vorname |
|---|---|---|
| | | |

1) Definieren Sie eine monotone Grammatik $G = (\{S\},\{a,0,1,2\},P,S)$ mit $L(G) = \{a^n w \mid w \in \{0,1,2\}^+ \wedge 5v(w,0) = 10v(w,1) = 15v(w,2) = n\}$ und erläutern Sie die Arbeitsweise Ihrer Grammatik.

( 30 Punkte )

2) Sei $L = \{1^{5n+2}0\,2^{10n+5} \mid n \geq 1\}$.

a) Definieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (\{S\},\{0,1,2\},P,S)$ mit $L(G) = L$ und beweisen Sie dies mittels Induktion über den Mengen $SF(G,n)$ der in $G$ in $n$ Schritten ableitbaren Satzformen.

( 20 Punkte )

b) Beweisen Sie mit Hilfe des Korollars zum Pumping Lemma, daß $L$ nicht regulär ist.

( 20 Punkte )

3) Sei ein nichtdeterministischer endlicher Automat $M = (\{q_0,q_1,q_2\},\{0,1,2\},\delta,q_0,\{q_0\})$ durch die folgende Tabelle für $\delta$ gegeben:

| $\delta$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $q_0$ | $\{q_0,q_1,q_2\}$ | $\{q_0,q_1\}$ | $\{q_0\}$ |
| $q_1$ | $\{q_0,q_1\}$ | $\{q_2\}$ | $\{q_1,q_2\}$ |
| $q_2$ | $\{q_1,q_2\}$ | $\{q_0,q_2\}$ | $\{q_1\}$ |

a) Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten $M'$ mit $L(M') = L(M)$ ( unnötige Zustände weglassen ).

( 16 Punkte )

b) Konstruieren Sie aus der oben angegebenen Übergangstabelle von $M$ eine reguläre Grammatik $G = (\{A_0,A_1,A_2\},\{0,1,2\},P,A_0)$ mit $L(G) = L(M) - \{\varepsilon\}$.

( 14 Punkte )

# AUTOMATEN UND FORMALE SPRACHEN

**Lösungen zum 1. ÜBUNGSTEST am 24. November 1994**

**BEISPIEL 1.** Sei $L = \{a^n w \mid w \in \{0,1,2\}^+ \wedge 5v(w,0) = 10v(w,1) = 15v(w,2) = n\}$.
Dann wird $L$ von der monotonen Grammatik $G = (\{S\},\{a,0,1,2\},P,S)$ mit $P = \{(S,a^{30}S0^6 1^3 2^2),(S,a^{30}0^6 1^3 2^2)\} \cup \{(xy,yx) \mid x,y \in \{0,1,2\}\}$ erzeugt.
Wie man sofort sieht, gilt nämlich

a) $S \vdash_G^{m-1} a^{30(m-1)}S(0^6 1^3 2^2)^{m-1} \vdash_G a^{30m}(0^6 1^3 2^2)^m$ für alle $m \geq 1$.

b) $a^{30m}(0^6 1^3 2^2)^m \vdash_G^* a^{30m}w$ für jedes $w \in \{0,1,2\}^+$, $5v(w,0) = 10v(w,1) = 15v(w,2) = 30m$, mit Hilfe der Vertauschungsregeln aus $\{(xy,yx) \mid x,y \in \{0,1,2\}\}$.

c) Ist $v \in \{S,a,0,1,2\}^*$ eine in $G$ ableitbare Satzform, d. h. $S \vdash_G^* v$, so gilt $v = a^n w$ für ein $n \geq 1$, sodaß $5v(w,0) = 10v(w,1) = 15v(w,2) = n$.

Aus a) und b) folgt aber sofort $L(G) \supseteq L$, aus c) hingegen $L(G) \subseteq L$, d. h. insgesamt also $L(G) = L$.

**BEISPIEL 2.** $L = \{1^{5n+2}0\,2^{10n+5} \mid n \geq 1\}$.

a) $G = (\{S\},\{0,1,2\},\{S \to 1^5 S 2^{10} \mid 1^7 0 2^{15}\},S)$.
Man kann nun für $n \in \mathbb{N}_+$ alle Ableitungen der Länge $n$ betrachten und die folgende Behauptung $A(n)$ zeigen:
$A(n)$: $S \vdash_G^n w \Leftrightarrow w \in \{1^{5n}S2^{10n}, 1^{5n+2}0 2^{10n+5}\}$, i. e. $SF(G,n) = \{1^{5n}S2^{10n}, 1^{5n+2}0 2^{10n+5}\}$.
**Beweis** *mittels Induktion nach $n \in \mathbb{N}_+$.*
***Induktionsbasis A(1):*** $S \vdash_G 1^5 S 2^{10}$ bzw. $S \vdash_G 1^7 0 2^{15}$ sind die einzigen direkten Ableitungen in $G$ aus dem Startsymbol $S$.
***Sei nun n > 1:***
***Induktionshypothese (IH):*** Die Aussage $A(m)$ gilt für alle $m$ mit $1 \leq m < n$.
***Induktionsbehauptung:*** Es gilt auch $A(n)$.
$S \vdash_G^n w \Leftrightarrow S \vdash_G^{n-1} v \vdash_G w$ für ein $v \in \{0,1,2,S\}^* \Leftrightarrow$ ( (IH) für $m = n-1$ )
$S \vdash_G^{n-1} v \vdash_G w$ für ein $v \in \{1^{5(n-1)}S2^{10(n-1)}, 1^{5(n-1)+2}0 2^{10(n-1)+5}\}$.
Da in einer kontextfreien Grammatik aus einem Terminalwort wie $1^{5(n-1)+2}0 2^{10(n-1)+5}$ nichts mehr weiter abgeleitet werden kann, ist dies aufgrund der Produktionen von $G$ äquivalent mit
$S \vdash_G^{n-1} 1^{5(n-1)}S2^{10(n-1)} \vdash_G w \Leftrightarrow w \in \{1^{5n+2}0 2^{10n+5}, 1^{5n}S2^{10n}\}$. **Q. E. D.**
Aus der Gültigkeit der Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_+$ folgt nun sofort $L(G) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+}(\{1^{5n}S2^{10n}, 1^{5n+2}0 2^{10n+5}\}) \cap \{0,1,2\}^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+}\{1^{5n+2}0 2^{10n+5}\} = L$.

b) **Beweis** *indirekt.* Angenommen, $L$ ist regulär.
Sei $n$ die Konstante aus dem Pumping Lemma und $z = 1^{5n+2}0 2^{10n+5}$; dann ist $z$ aus $L$ und $|z| = 15n + 8 > n$. Nach dem Korollar zum Pumping Lemma kann man also $z = uvw$ mit $u,v,w \in \{0,1,2\}^*$, $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, schreiben, sodaß $uv^i w$ für alle $i \in \mathbb{N}$ aus $L$ ist. Dann muß aber $uv \in \{1\}^*$ und somit auch – wegen $|v| \geq 1$ – $v \in \{1\}^+$ gelten und $uv^2w = 1^{5n+|v|+2}0 2^{10n+5}$ aus $L$ sein. Wegen $1 \leq |v| \leq n$ gilt jedoch $5n + 3 \leq 5n + |v| + 2 \leq 6n + 2$ und somit $5n + |v| + 2 \neq 5n + 2$. Da $1^{5n+2}0 2^{10n+5}$ das einzige Wort in $L$ der Gestalt $1^m 0 2^{10n+5}$ für ein $m \in \mathbb{N}_+$ ist, kann daher $uv^2w$ nicht aus $L$ sein.
**Widerspruch!** $L$ ist deshalb keine reguläre formale Sprache. **Q. E. D.**

**BEISPIEL 3.** $M' = (\{[q_0],[q_0,q_1],[q_0,q_1,q_2]\},\{0,1,2\},\delta',[q_0],\{[q_0],[q_0,q_1],[q_0,q_1,q_2]\})$

| $\delta'$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $[q_0]$ | $[q_0,q_1,q_2]$ | $[q_0,q_1]$ | $[q_0]$ |
| $[q_0,q_1]$ | $[q_0,q_1,q_2]$ | $[q_0,q_1,q_2]$ | $[q_0,q_1,q_2]$ |
| $[q_0,q_1,q_2]$ | $[q_0,q_1,q_2]$ | $[q_0,q_1,q_2]$ | $[q_0,q_1,q_2]$ |

b) $G = (\{A_0,A_1,A_2\},\{0,1,2\},P,A_0)$ mit
$P = \{A_0 \to 0A_0 \mid 0A_1 \mid 0A_2 \mid 0 \mid 1A_0 \mid 1A_1 \mid 1 \mid 2A_0 \mid 2,$
$A_1 \to 0A_0 \mid 0A_1 \mid 0 \mid 1A_2 \mid 2A_1 \mid 2A_2,\ \ A_2 \to 0A_1 \mid 0A_2 \mid 1A_0 \mid 1A_2 \mid 1 \mid 2A_1\}$.

# AUTOMATEN UND FORMALE SPRACHEN

## 1. Test am 18. Januar 2002

| Kennnummer: | Matrikelnummer: | Vorname: | Zuname: |
|---|---|---|---|
| | | | |

1) Sei $L_1 = \{w \mid w \in \{0,1,2\}^+ \wedge 30\nu(w,0) = 18\nu(w,1) = 75\nu(w,2)\}$.

Definieren Sie eine monotone Grammatik $G_1 = (\{S_1\}, \{0,1,2\}, P_1, S_1)$, die $L_1$ erzeugt, und erläutern Sie die Arbeitsweise Ihrer Grammatik. (28 Punkte)

$P_1 = \{(S_1, 0^{15}1^{25}2^6 S_1), (S_1, 0^{15}1^{25}2^6)\} \cup \{(xy, yx) \mid x, y \in \{0,1,2\}\}$

(a) $S_1 \vdash_{G_1}^{n-1} (0^{15}1^{25}2^6)^{n-1} S_1 \vdash_{G_1} (0^{15}1^{25}2^6)^n$ für alle $n \geq 1$.

(b) $(0^{15}1^{25}2^6)^n \vdash_{G_1}^* w$ für jedes $w \in L_1$ mit Hilfe der Vertauschungsregeln aus $\{(xy, yx) \mid x, y \in \{0,1,2\}\}$.

(c) Ist $w \in \{0,1,2,S_1\}^*$ eine in $G_1$ ableitbare Satzform, d.h. $S_1 \vdash_{G_1}^* w$, so gilt $30\nu(w,0) = 18\nu(w,1) = 75\nu(w,2)$, denn

- die Vertauschungsregeln $(xy, yx)$ ändern nichts an der Anzahl der in der Satzform vorkommenden Symbole $0, 1, 2$
- und die Produktionen mit $S_1$ auf der linken Seite erhalten die Bedingung $30\nu(w,0) = 18\nu(w,1) = 75\nu(w,2)$, durch die die Wörter $w$ in $L_1$ definiert sind.

Aus a) und b) folgt aber sofort $L(G_1) \supseteq L_1$, aus c) hingegen $L(G_1) \subseteq L_1$, d.h. insgesamt also $L(G_1) = L_1$.

2) Sei $L_2 = \{0^{181n}1^{2002n} \mid n \geq 1\}$.

(a) Beweisen Sie mit Hilfe des Korollars zum Pumping Lemma für reguläre Sprachen, dass $L_2$ nicht regulär ist. (12 Punkte)

**Beweis** indirekt. Angenommen $L_2$ ist regulär. Sei $n$ die Konstante aus dem Pumping Lemma und $z = 0^{181n}1^{2002n}$; dann ist $z$ aus $L_2$ und $|z| = 2183n > n$.

Nach dem Korollar zum Pumping Lemma kann man also $z = uvw$ mit $u, v, w \in \{0\}^*$, $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, schreiben, sodass $uv^iw$ für alle $i \in N$ aus $L_2$ ist. Dann muss aber $uv \in \{0\}^*$ und somit auch – wegen $|v| \geq 1$ – $v \in \{0\}^+$ gelten und $uv^0w = 0^{181n-|v|}1^{2002n}$ aus $L_2$ sein. Wegen $1 \leq |v| \leq n$ gilt jedoch somit $180n \leq |\nu(uv^0w, 0)| \leq 181n - 1$. Da $0^{181n}1^{2002n}$ das einzige Wort aus $L_2$ der Gestalt $0^k1^{2002n}$ für ein $k \in N$ ist, kann daher $uv^0w$ nicht aus $L_2$ sein. Widerspruch! $L_2$ ist deshalb keine reguläre formale Sprache. Q.E.D.

(b) Definieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G_2 = (\{S_2\}, \{0,1\}, P_2, S_2)$ mit nur zwei Produktionen und mit $L(G_2) = L_2$. (14 Punkte)

$G_2 = (\{S_2\}, \{0,1\}, P_2, S_2)$. $P_2 = \{S_2 \to 0^{181}S_2 1^{2002}, S_2 \to 0^{181}1^{2002}\}$.

Ableitung: $S_2 \vdash_{G_2}^{n-1} 0^{181(n-1)} S_2 1^{2002(n-1)} \vdash_{G_2} 0^{181n}1^{2002n}$ für alle $n \geq 1$.

(c) Sei $L_3 = \{2^{2002m} \mid m \geq 0\}$. Definieren Sie eine reguläre Grammatik $G_3 = (\{S_3\}, \{2\}, P_3, S_3)$ (mit nur zwei Produktionen der Gestalt $S_3 \to w$ oder $S_3 \to wS_3$, $w \in \{2\}^*$) und mit $L(G_3) = L_3$. (10 Punkte)

$G_3 = (\{S_3\}, \{2\}, P_3, S_3)$. $P_3 = \{S_3 \to 2^{2002}S_3, S_3 \to \lambda\}$.

Ableitung: $S_3 \vdash_{G_3}^{m} 2^{2002m} S_3 \vdash_{G_3} 2^{2002m}$ für alle $m \geq 0$.

(d) Definieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G$, die $L_2 \cup L_3$ erzeugt: (8 Punkte)
(Ist $G$ in erweiterter Greibach-Normalform, so ergibt dies 10 Zusatzpunkte!)

$G = (\{S, S_2, S_3\}, \{0,1,2\}, P, S)$ mit $P = \{S \to S_2S_3\} \cup P_2 \cup P_3$ bzw.

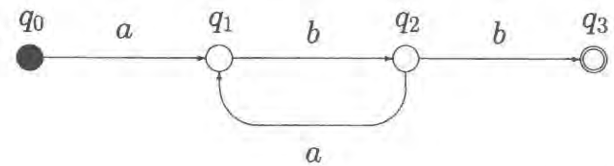
$P = P' \cup P_2 \cup P_3'$, wobei

$P' = \{S \to 0^{181}1^{2002}S_3, S \to 0^{181}S_2 1^{2002} S_3, S \to 0^{181}1^{2002}, S \to 0^{181}S_2 1^{2002}\}$,

$P_2 = \{S_2 \to 0^{181}S_2 1^{2002}, S_2 \to 0^{181}1^{2002}\}$ und $P_3' = \{S_3 \to 2^{2002}S_3, S_3 \to 2^{2002}\}$.

3) Sei $L_4 = \{ab\}^+\{b\}$.

(a) Konstruieren Sie den Graphen eines deterministischen endlichen Automaten $M_4 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, P_4, q_0, \{q_3\})$ mit $L(M_4) = L_4$ (Falle $q_{Falle}$ weglassen). (16 Punkte)




(b) Konstruieren Sie aus dem oben angegebenen deterministischen endlichen Automaten $M_4$ eine reguläre Grammatik $G_4 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, P_4, q_0)$ mit $L(G_4) = L_4$. (12 Punkte)

$P_4$ enthält die folgenden Produktionen:

$q_0 \to aq_1$, $q_1 \to bq_2$, $q_2 \to aq_1$, $q_2 \to bq_3$, $q_3 \to \lambda$

# AUTOMATEN UND FORMALE SPRACHEN

**1. Test am 15. Dezember 2000**

| Kennnummer: | Matrikelnummer: | Vorname: | Zuname: |
|---|---|---|---|
| | | | |

1) Sei $L_1 = \left\{w \mid w \in \{0,1,2\}^+ \wedge 18\nu(w,0) = 20\nu(w,1) = 30\nu(w,2)\right\}$.
Definieren Sie eine monotone Grammatik $G_1 = (\{S_1\}, \{0,1,2\}, P_1, S_1)$, die $L_1$ erzeugt, und erläutern Sie die Arbeitsweise Ihrer Grammatik. (28 Punkte)

$P_1 = \{(S_1, \qquad ), (S_1, \qquad )\} \cup \{(xy, yx) \mid x, y \in \{ \qquad \}\}$

(a) $S_1 \vdash_{G_1}^{n-1} \qquad \vdash_{G_1} \qquad$ für alle $n \geq 1$.

(b) $\qquad \vdash_{G_1}^{*} w$ für jedes $w \in L_1$ mit Hilfe der Vertauschungsregeln aus $\{(xy, yx) \mid x, y \in \{ \qquad \}\}$.

(c) Ist $w \in \{ \qquad \}^*$ eine in $G_1$ ableitbare Satzform, d.h. $S_1 \vdash_{G_1}^{*} w$, so gilt $18\nu(w,0) = 20\nu(w,1) = 30\nu(w,2)$, denn

- die Vertauschungsregeln $(xy, yx)$

- und die Produktionen mit $S_1$ auf der linken Seite

Aus a) und b) folgt aber sofort $L(G_1) \qquad L_1$, aus c) hingegen $L(G_1) \qquad L_1$, d.h. insgesamt also $L(G_1) = L_1$.

2) Sei $L_2 = \{0^{20n}1^{10n} \mid n \geq 1\}$.

(a) Beweisen Sie mit Hilfe des Korollars zum Pumping Lemma für reguläre Sprachen, dass $L_2$ nicht regulär ist. (12 Punkte)

**Beweis** indirekt. Angenommen $L_2$ ist regulär. Sei $n$ die Konstante aus dem Pumping Lemma und $z = 0^{20n}1^{10n}$; dann ist $z$ aus $L_2$ und
$|z| = |0^{20n}1^{10n}| = \qquad n > n$.
Nach dem Korollar zum Pumping Lemma kann man also $z = uvw$ mit $u, v, w \in \{0,1\}^*$, $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, schreiben, sodass $uv^iw$ für alle $i \in N$ aus $L_2$ ist. Dann muss aber $uv \in \{0\}^*$ und somit auch – wegen $|v| \geq 1$ – $v \in \{0\}^+$ gelten und $uv^0w = \qquad$ aus $L_2$ sein. Wegen $1 \leq |v| \leq n$ gilt jedoch somit $|uv^0| \qquad$. Da $\qquad$ das einzige Wort aus $L_2$ der Gestalt $\qquad$ für ein $k \in N$ ist, kann daher $uv^0w$ nicht aus $L_2$ sein. Widerspruch! $L_2$ ist deshalb keine reguläre formale Sprache. Q.E.D.

**(b)** Definieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G_2 = (\{S_2\}, \{0,1\}, P_2, S_2)$ mit nur zwei Produktionen und mit $L(G_2) = L_2$. (14 Punkte)

$G_2 = (\{S_2\}, \{0,1\}, P_2, S_2)$. $P_2 = \{$ $\}$.

Ableitung: $S_2 \vdash_{G_2}^{n-1}$ $\vdash_{G_2}$ für alle $n \geq 1$.

**(c)** Sei $L_3 = \{2^{2000m} \mid m \geq 0\}$. Definieren Sie eine reguläre Grammatik $G_3 = (\{S_3\}, \{2\}, P_3, S_3)$ (mit nur zwei Produktionen der Gestalt $S_3 \to w$ oder $S_3 \to wS_3$, $w \in \{2\}^*$) mit $L(G_3) = L_3$. (10 Punkte)

$G_3 = (\{S_3\}, \{2\}, P_3, S_3)$. $P_3 = \{$ $\}$.

Ableitung: $S_3 \vdash_{G_3}^{m}$ $\vdash_{G_3}$ für alle $m \geq 0$.

**(d)** Definieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G$, die $L_2 \cup L_3$ erzeugt: (8 Punkte)
(Ist $G$ in erweiterter Greibach-Normalform, so ergibt dies 10 Zusatzpunkte!)

$G = (\{S, S_2, S_3\}, \{0,1,2\}, P, S)$

$P =$

3) Sei $L_4 = \{001\}^* \{000\}$.

(a) Konstruieren Sie den Graphen eines deterministischen endlichen Automaten $M_4 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0,1\}, P_4, q_0, \{q_3\})$ mit $L(M_4) = L_4$ (Falle $q_{Falle}$ weglassen). (16 Punkte)


(b) Konstruieren Sie aus dem oben angegebenen deterministischen endlichen Automaten $M_4$ eine reguläre Grammatik $G_4 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0,1\}, P_4, q_0)$ mit $L(G_4) = L_4$. (12 Punkte)

$P_4$ enthält die folgenden Produktionen:

$q_0 \to$ $q_1 \to$

$q_2 \to$ $q_3 \to$

| **AUTOMATEN UND FORMALE SPRACHEN**<br>**1. Test am 28. November 1997** | | | |
|---|---|---|---|
| Kennnummer: | Matrikelnummer: | Vorname: | Zuname: |

1) Sei $L_1 = \left\{w \mid w \in \{0,1,2\}^+ \wedge 10\nu(w,0) = 25\nu(w,1) = 20\nu(w,2)\right\}$.

Definieren Sie eine monotone Grammatik $G_1 = (\{S_1\}, \{0,1,2\}, P_1, S_1)$, die $L_1$ erzeugt, und erläutern Sie die Arbeitsweise Ihrer Grammatik. (28 Punkte)

$P_1 = \{(S_1, \qquad\qquad), (S_1, \qquad\qquad)\} \cup \{(xy, yx) \mid x, y \in \{ \qquad\qquad \}\}$

(a) $S_1 \vdash_{G_1}^{n-1} \qquad\qquad \vdash_{G_1} \qquad\qquad$ für alle $n \geq 1$.

(b) $\qquad\qquad \vdash_{G_1}^{*} w$ für jedes $w \in L_1$ mit Hilfe der Vertauschungsregeln aus $\{(xy, yx) \mid x, y \in \{ \qquad\qquad \}\}$.

(c) Ist $w \in \{ \qquad\qquad \}^*$ eine in $G_1$ ableitbare Satzform, d.h. $S_1 \vdash_{G_1}^{*} w$, so gilt $10\nu(w,0) = 25\nu(w,1) = 20\nu(w,2)$, denn

- die Vertauschungsregeln $(xy, yx)$

- und die Produktionen mit $S_1$ auf der linken Seite

Aus a) und b) folgt aber sofort $L(G_1) \qquad L_1$, aus c) hingegen $L(G_1) \qquad L_1$, d.h. insgesamt also $L(G_1) = L_1$.

2) Sei $L_2 = \{0^{10n}1^{25n} \mid n \geq 1\}$.

**(a)** Beweisen Sie mit Hilfe des Korollars zum Pumping Lemma für reguläre Sprachen, dass $L_2$ nicht regulär ist. (12 Punkte)

**Beweis** indirekt. Angenommen $L_2$ ist regulär. Sei $n$ die Konstante aus dem Pumping Lemma und $z = 0^{10n}1^{25n}$; dann ist $z$ aus $L_2$ und $|z| = |0^{10n}1^{25n}| = \qquad\qquad n > n$.

Nach dem Korollar zum Pumping Lemma kann man also $z = uvw$ mit $u, v, w \in \{0,1\}^*$, $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, schreiben, sodass $uv^iw$ für alle $i \in N$ aus $L_2$ ist. Dann muss aber $uv \in \{0\}^*$ und somit auch – wegen $|v| \geq 1$ – $v \in \{0\}^+$ gelten und $uv^0w = \qquad\qquad$ aus $L_2$ sein. Wegen $1 \leq |v| \leq n$ gilt jedoch somit $\qquad\qquad \neq 10n$. Da $\qquad\qquad$ das einzige Wort aus $L_2$ der Gestalt $\qquad\qquad$ für ein $k \in N$ ist, kann daher $uv^0w$ nicht aus $L_2$ sein. Widerspruch! $L_2$ ist deshalb keine reguläre formale Sprache. Q.E.D.

**(b)** Definieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G_2 = (\{S_2\}, \{0,1\}, P_2, S_2)$ mit nur zwei Produktionen und mit $L(G_2) = L_2$. (14 Punkte)

$G_2 = (\{S_2\}, \{0,1\}, P_2, S_2)$. $P_2 = \{$ $\}$.

Ableitung: $S_2 \vdash_{G_2}^{n-1}$ $\vdash_{G_2}$ für alle $n \geq 1$.

**(c)** Sei $L_3 = \{2^{20m} \mid m \geq 1\}$. Definieren Sie eine kontextfreie Grammatik mit nur zwei Produktionen und mit $L(G_3) = L_3$. (10 Punkte)

$G_3 = (\{S_3\}, \{2\}, P_3, S_3)$. $P_3 = \{$ $\}$.

Ableitung: $S_3 \vdash_{G_3}^{m-1}$ $\vdash_{G_3}$ für alle $m \geq 1$.

**(d)** Definieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G$, die $L_2 \circ L_3$ erzeugt: (8 Punkte)
(Ist $G$ in Greibach-Normalform, so ergibt dies 6 Zusatzpunkte!)

$G = (\{S, S_2, S_3\}, \{0,1,2\}, P \cup P_2 \cup P_3, S)$

$P = \{$ $\}$.

3) Sei $L_4 = \{010\}^* \{011\}$.

(a) Konstruieren Sie den Graphen eines deterministischen endlichen Automaten $M_4 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0,1\}, P_4, q_0, \{q_3\})$ mit $L(M_4) = L_4$ (Falle $q_{Falle}$ weglassen). (16 Punkte)


(b) Konstruieren Sie aus dem oben angegebenen deterministischen endlichen Automaten $M_4$ eine reguläre Grammatik $G_4 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, P_4, q_0)$ mit $L(G_4) = L_4$. (12 Punkte)

$P_4$ enthält die folgenden Produktionen:

$q_0 \rightarrow$

$q_1 \rightarrow$

$q_2 \rightarrow$

# AUTOMATEN UND FORMALE SPRACHEN

**1. Test am 28. November 1997**

| Kennnummer: | Matrikelnummer: | Vorname: | Zuname: |
|---|---|---|---|
| | | | |

1) Sei $L_1 = \left\{ w \mid w \in \{0,1,2\}^+ \wedge 10\nu(w,0) = 25\nu(w,1) = 20\nu(w,2) \right\}$.
Definieren Sie eine monotone Grammatik $G_1 = (\{S_1\}, \{0,1,2\}, P_1, S_1)$, die $L_1$ erzeugt, und erläutern Sie die Arbeitsweise Ihrer Grammatik. (28 Punkte)

$P_1 = \{(S_1, 0^{10}1^4 2^5 S_1), (S_1, 0^{10}1^4 2^5)\} \cup \{(xy, yx) \mid x, y \in \{0,1,2\}\}$

(a) $S_1 \vdash_{G_1}^{n-1} (0^{10}1^4 2^5)^{n-1} S_1 \vdash_{G_1} (0^{10}1^4 2^5)^n$ für alle $n \geq 1$.

(b) $(0^{10}1^4 2^5)^n \vdash_{G_1}^* w$ für jedes $w \in L_1$ mit Hilfe der Vertauschungsregeln aus $\{(xy, yx) \mid x, y \in \{0,1,2\}\}$.

(c) Ist $w \in \{0,1,2,S_1\}^*$ eine in $G_1$ ableitbare Satzform, d.h. $S_1 \vdash_{G_1}^* w$, so gilt $10\nu(w,0) = 25\nu(w,1) = 20\nu(w,2)$, denn

- die Vertauschungsregeln $(xy, yx)$
ändern nichts an der Anzahl der in der Satzform vorkommenden Symbole $0, 1, 2$
- und die Produktionen mit $S_1$ auf der linken Seite
erhalten die Bedingung $10\nu(w,0) = 25\nu(w,1) = 20\nu(w,2)$, durch die die Wörter $w$ in $L_1$ definiert sind.

Aus a) und b) folgt aber sofort $L(G_1) \supseteq L_1$, aus c) hingegen $L(G_1) \subseteq L_1$, d.h. insgesamt also $L(G_1) = L_1$.

2) Sei $L_2 = \{0^{10n}1^{25n} \mid n \geq 1\}$.

(a) Beweisen Sie mit Hilfe des Korollars zum Pumping Lemma für reguläre Sprachen, dass $L_2$ nicht regulär ist. (12 Punkte)

**Beweis** indirekt. Angenommen $L_2$ ist regulär. Sei $n$ die Konstante aus dem Pumping Lemma und $z = 0^{10n}1^{25n}$; dann ist $z$ aus $L_2$ und $|z| = |0^{10n}1^{25n}| = 35n > n$.

Nach dem Korollar zum Pumping Lemma kann man also $z = uvw$ mit $u, v, w \in \{0,1\}^*$, $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, schreiben, sodass $uv^iw$ für alle $i \in N$ aus $L_2$ ist. Dann muss aber $uv \in \{0\}^*$ und somit auch – wegen $|v| \geq 1$ – $v \in \{0\}^+$ gelten und $uv^0w = 0^{10n-|v|}1^{25n}$ aus $L_2$ sein. Wegen $1 \leq |v| \leq n$ gilt jedoch somit $10n - |v| \neq 10n$. Da $0^{10n}1^{25n}$ das einzige Wort aus $L_2$ der Gestalt $0^k1^{25n}$ für ein $k \in N$ ist, kann daher $uv^0w$ nicht aus $L_2$ sein. Widerspruch! $L_2$ ist deshalb keine reguläre formale Sprache. Q.E.D.

**(b)** Definieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G_2 = (\{S_2\}, \{0,1\}, P_2, S_2)$ mit nur zwei Produktionen und mit $L(G_2) = L_2$. (14 Punkte)

$G_2 = (\{S_2\}, \{0,1\}, P_2, S_2)$. $P_2 = \{S_2 \to 0^{10}S_2 1^{25}, S_2 \to 0^{10}1^{25}\}$.

Ableitung: $S_2 \vdash_{G_2}^{n-1} 0^{10(n-1)} S_2 1^{25(n-1)} \vdash_{G_2} 0^{10n}1^{25n}$ für alle $n \geq 1$.

**(c)** Sei $L_3 = \{2^{20m} \mid m \geq 1\}$. Definieren Sie eine kontextfreie Grammatik mit nur zwei Produktionen und mit $L(G_3) = L_3$. (10 Punkte)

$G_3 = (\{S_3\}, \{2\}, P_3, S_3)$. $P_3 = \{S_3 \to 2^{20}S_3, S_3 \to 2^{20}\}$.

Ableitung: $S_3 \vdash_{G_3}^{m-1} 2^{20(m-1)} S_3 \vdash_{G_3} 2^{20m}$ für alle $m \geq 1$.

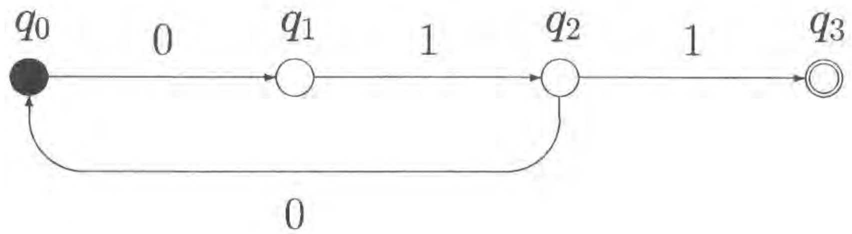
**(d)** Definieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G$, die $L_2 \circ L_3$ erzeugt: (8 Punkte)
(Ist $G$ in Greibach-Normalform, so ergibt dies 6 Zusatzpunkte!)

$G = (\{S, S_2, S_3\}, \{0,1,2\}, P \cup P_2 \cup P_3, S)$

$P = \{S \to S_2 S_3\}$ bzw. $P = \{S \to 0^{10}S_2 1^{25} S_3, S \to 0^{10}1^{25}S_3\}$.

3) Sei $L_4 = \{010\}^* \{011\}$.

(a) Konstruieren Sie den Graphen eines deterministischen endlichen Automaten $M_4 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0,1\}, P_4, q_0, \{q_3\})$ mit $L(M_4) = L_4$ (Falle $q_{Falle}$ weglassen). (16 Punkte)




(b) Konstruieren Sie aus dem oben angegebenen deterministischen endlichen Automaten $M_4$ eine reguläre Grammatik $G_4 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, P_4, q_0)$ mit $L(G_4) = L_4$. (12 Punkte)

$P_4$ enthält die folgenden Produktionen:

$q_0 \to 0q_1$

$q_1 \to 1q_2$

$q_2 \to 0q_0 \mid 1$

# AUTOMATEN UND FORMALE SPRACHEN

**1. Test am 2. Dezember 1996**

| Kennnummer: | Matrikelnummer: | Vorname: | Zuname: |
|---|---|---|---|
| | | | |

*Im folgenden sei m Ihre Matrikelnummer.*

1) Sei $L_1 = \{0^{3n+2m}w \mid w \in \{a,b,1\}^* \wedge 5\nu(w,a) = 6\nu(w,b) = 10\nu(w,1) = 4n\}$.

Definieren Sie eine monotone Grammatik $G_1 = (\{S\}, \{0,1,a,b\}, P_1, S)$, die $L_1$ erzeugt, und erläutern Sie die Arbeitsweise Ihrer Grammatik. (32 Punkte)

$P_1 = \{(S, \quad\quad\quad\quad), (S, \quad\quad)\} \cup \{(xy, yx) \mid x, y \in \{ \quad\quad \}\}$

(a) $S \vdash_{G_1}^{k} \quad\quad\quad\quad \vdash_{G_1} \quad\quad\quad\quad$ für alle $k \geq 0$.

(b) $\quad\quad\quad\quad \vdash_{G_1}^{*} \quad\quad\quad\quad$ für jedes $w \in \{ \quad\quad \}^*$ und für alle $k \geq 0$, sodass $5\nu(w,a) = 6\nu(w,b) = 10\nu(w,1) = \quad\quad$, mit Hilfe der Vertauschungsregeln aus $\{(xy, yx) \mid x, y \in \{ \quad\quad \}\}$.

(c) Ist $v \in \{S,0,1,a,b\}$ eine in $G_1$ ableitbare Satzform, d.h. $S \vdash_{G_1}^{*} v$, so gilt

$v = \quad\quad\quad\quad$ oder $v = \quad\quad\quad\quad$

für ein $n \geq 0$, sodass $5\nu(w,a) = 6\nu(w,b) = 10\nu(w,1) = 4n$, denn

- die Vertauschungsregeln $(xy, yx)$
- und die Produktionen mit $S$ auf der linken Seite

Aus a) und b) folgt aber sofort $L(G_1) \quad L_1$, aus c) hingegen $L(G_1) \quad L_1$, d.h. insgesamt also $L(G_1) = L_1$.

2) Sei $L_2 = \left\{0^{m(n+m)}a^{11n+m^2} \mid n \geq 0\right\}$.

**(a)** Beweisen Sie mit Hilfe des Korollars zum Pumping Lemma für reguläre Sprachen, dass $L_2$ nicht regulär ist. (20 Punkte)

**Beweis** indirekt. Angenommen $L_2$ ist regulär. Sei $n$ die Konstante aus dem Pumping Lemma und $z = \quad\quad\quad\quad$; dann ist $z$ aus $L_2$ und

$|z| = \quad\quad\quad\quad = ( \quad\quad\quad\quad ) n + ( \quad\quad\quad ) > n.$

Nach dem Korollar zum Pumping Lemma kann man also $z = uvw$ mit $u, v, w \in \{ \quad\quad \}^*$, $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, schreiben, sodass $uv^iw$ für alle $i \in N$ aus $L_2$ ist. Dann muss aber $uv \in \{ \quad\quad \}^*$ und somit auch – wegen $|v| \geq 1$ – $v \in \{ \quad\quad \}^+$ gelten und $uv^0w = \quad\quad\quad\quad$ aus $L_2$ sein. Wegen $1 \leq |v| \leq n$ gilt jedoch

$m(n+m) \quad\quad\quad\quad \leq m(n+m) \quad\quad\quad\quad \leq m(n+m)$

und somit $\quad\quad\quad\quad \neq m(n+m)$. Da $\quad\quad\quad\quad$ das einzige Wort aus $L_2$ der Gestalt $\quad\quad\quad\quad$ für ein $k \in N$ ist, kann daher $uv^0w$ nicht aus $L_2$ sein. Widerspruch! $L_2$ ist deshalb keine reguläre formale Sprache. Q.E.D.

(b) Definieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G_2 = (\{S\}, \{0, a\}, P_2, S)$ mit $L(G_2) = L_2$ und beweisen Sie dies mittels Induktion über den Mengen $SF(G_2, n)$ der in $G_2$ in $n$ Schritten ableitbaren Satzformen. (20 Punkte)

$G_2 = (\{S\}, \{0, a\}, \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}, S)$.

Man kann nun für $n \in N_+$ alle Ableitungen der Länge $n$ betrachten und die folgende Behauptung $A(n)$ zeigen:

$A(n) : S \vdash_{G_2}^{n} w \Leftrightarrow w \in \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$, i.e.

$SF(G_2, n) = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$.

**Beweis** mittels Induktion nach $n \in N_+$.

**Induktionsbasis** $A(1) : S \vdash_{G_2}^{1} \qquad\qquad$ bzw. $S \vdash_{G_2}^{1}$

sind die einzigen direkten Ableitungen in $G_2$ aus dem Startsymbol $S$.

*Sei nun* $n > 1$ :

**Induktionshypothese (IH)**: Die Aussage gilt für alle $m$ mit $0 \leq m < n$.

**Induktionsbehauptung:** Es gilt auch $A(n)$.

$S \vdash_{G_2}^{n} w \Longleftrightarrow S \vdash_{G_2}^{n-1} v \vdash_{G_2}^{1} w$ für ein $v \in \{ \qquad\qquad \}^* \Longleftrightarrow$ ((IH) für $m = n - 1$)

$S \vdash_{G_2}^{n-1} v \vdash_{G_2}^{1} w$ für ein $v \in \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$.

Da in einer kontextfreien Grammatik aus einem Terminalwort wie

nichts mehr weiter abgeleitet werden kann, ist dies aufgrund der Produktionen von $G_2$ äquivalent mit

$S \vdash_{G_2}^{n-1} \qquad\qquad \vdash_{G_2}^{1} w \Leftrightarrow w \in \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$. Q.E.D.

Aus der Gültigkeit der Aussage $A(n)$ für alle $n \in N_+$ folgt nun sofort

$L(G_2) = \bigcup_{n \in N_+} (\{ \qquad\qquad\qquad\qquad \} \cap \{0, a\}^*) =$

$\bigcup_{n \in N_+} (\{ \qquad\qquad \}) = \bigcup_{n \in N} \{ \qquad\qquad \} = L_2$.

3) Sei $L_3 = \{a0\}^* \{aa\} \{0\}^* \{a\}$.

(a) Konstruieren Sie den Graphen eines deterministischen endlichen Automaten $M_3 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_{Falle}\}, \{0, a\}, \delta_3, q_0, \{q_3\})$ mit $L(M_3) = L_3$ (Falle $q_{Falle}$ weglassen). (16 Punkte)


(b) Konstruieren Sie aus dem oben angegebenen deterministischen endlichen Automaten $M_3$ eine reguläre Grammatik $G_3 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, a\}, P_3, q_0)$ mit $L(G_3) = L_3$. (12 Punkte)

$P_3$ enthält die folgenden Produktionen:

$q_0 \rightarrow$

$q_1 \rightarrow$

$q_2 \rightarrow$

# AUTOMATEN UND FORMALE SPRACHEN

**1. NACHTRAGSTEST am 21. März 1995**

| Kennzahl/Matrikelnummer | Familienname | Vorname |
|---|---|---|
| | | |

*Im folgenden sei m Ihre Matrikelnummer.*

4) Sei $L_1 = \{0^{22m(n+m^{10})} d^{22m(n+m^{21})} 1^{22mn} \mid n \geq 1\}$ und

$L_2 = \{(d^{13}1)^{2mn} (0^2 1^{22})^{11n} (d1d)^{11mn} \mid n \geq 0\}$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen, daß $L_1$ keine kontextfreie Sprache sein kann.

( 28 Punkte )

b) Geben Sie eine gsm $M_1 = (\{q_0,q_1\},\{d,0,1\},\{d,0,1\},\delta_1,q_0,F_1)$ an, sodaß $\mathfrak{M}_1(L_2) = L_1$.

( 27 Punkte )

5) Sei $L_3 = \{0^n 1^{11m^2(mn+m^2)} \mid n \geq 1\}$.

a) Definieren Sie einen Kellerautomaten $M_3 = (\{q_0,q_1,q_f\},\{0,1\},\{Z_0,E\},\delta_3,q_0,Z_0,\{q_f\})$ in Normalform, der $L_3$ akzeptiert.

( 25 Punkte )

b) Definieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G_3 = (\{S\},\{0,1\},P_3,S)$, die $L_3$ erzeugt und außerdem nicht mehrdeutig ist.

( 10 Punkte )

c) Geben Sie überdies für jedes Wort $0^n 1^{11m^2(mn+m^2)}$, $n \geq 1$, aus $L_3$ die einzige Linksableitung in Ihrer Grammatik $G_3$ an.

( 10 Punkte )

*Notenskala:*

| | | |
|---|---|---|
| Nicht genügend: 0 - 100 | Genügend: 101 - 120 | Befriedigend: 121 - 140 |
| Gut: 141 - 160 | Sehr gut: 161 - 200 | |

Sollten Sie Ihre Note beim zweiten Nachtragstest im SS 1995 noch verbessern wollen, dann *streichen Sie* im folgenden *alle jene Noten durch, die Sie noch nicht ausgestellt haben wollen*: eine **nachträgliche Verbesserung** der Übungsnote nach Ausstellung eines bereits positiven Übungszeugnisses ist *sonst* **nicht** mehr **möglich!!**

Genügend Befriedigend Gut

# AUTOMATEN UND FORMALE SPRACHEN

**Lösungen zum 1. NACHTRAGSTEST am 21. März 1995**

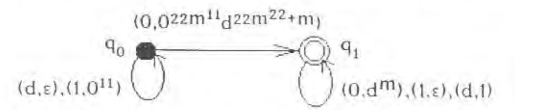
4) Sei $L_1 = \{0^{22m(n+m^{10})} d^{22m(n+m^{21})} 1^{22mn} \mid n \geq 1\}$ und

$L_2 = \{(d^{13}1)^{2mn} (0^2 1^{22})^{11n} (d1d)^{11mn} \mid n \geq 0\}$.

a) **Beweis** indirekt. Angenommen, $L_1$ ist kontextfrei. Sei n die Konstante aus dem Pumping Lemma und $z = 0^{22mn+22m^{11}} d^{22mn+22m^{22}} 1^{22mn}$. Wegen $|z| = 66mn + 22m^{11} + 22m^{22} > n$ müssen nach dem Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen u,v,w,x,y existieren, sodaß $z = uxvyw$, $|xy| \geq 1$, $|xvy| \leq n$ und $z(i) = ux^ivy^iw \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
Aus $\nu(xvy,0) > 0$ folgt wegen $|xvy| \leq n$ jedoch $\nu(xvy,1) = 0$. Für $z(2)$ erhält man daher $\nu(z(2),1) = 22mn$, aber entweder ist wegen $|xy| \geq 1$ nun $\nu(z(2),0) > 22mn + 22m^{11}$ oder $\nu(z(2),d) > 22mn + 22m^{22}$. Da aber z das einzige Wort s in $L_1$ mit $\nu(s,1) = 22mn$ ist, jedoch $z(2) \neq z$ gilt, kann $z(2)$ nicht aus $L_1$ sein. Aus $\nu(xvy,0) = 0$ folgt für $z(2)$ hingegen $\nu(z(2),0) = 22mn + 22m^{11}$, aber wegen $|xy| \geq 1$ muß entweder $\nu(z(2),d) > 22mn + 22m^{22}$ oder $\nu(z(2),1) > 22mn$ sein. Somit gilt $z(2) \notin L_1$, da $z(2) \neq z$, aber z das einzige Wort $s \in L_1$ mit $\nu(s,0) = 22mn + 22m^{11}$ ist.
Wir haben damit alle möglichen Zerlegungen von z untersucht, aber in jedem Falle einen Widerspruch erhalten! $L_1$ kann daher nicht kontextfrei sein.

**Q. E. D.**

4b) $\delta_1(q_0,d) = (q_0,\varepsilon)$, $\delta_1(q_0,1) = (q_0,0^{11})$, $\delta_1(q_0,0) = (q_1,0^{22m^{11}}d^{22m^{22}+m})$
$\delta_1(q_1,0) = (q_1,d^m)$, $\delta_1(q_1,1) = (q_1,\varepsilon)$, $\delta_1(q_1,d) = (q_1,1)$; $F_1 = \{q_1\}$.




5a) $M_3 = (\{q_0,q_1,q_f\},\{0,1\},\{Z_0,E\},\delta_3,q_0,Z_0,\{q_f\})$

| $\delta_3$ | | 0 | 1 | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | $Z_0$ | $\{(q_0,Z_0E^{11m^3 11m^4})\}$ | | |
| | E | $\{(q_0,E^{1+11m^3})\}$ | $\{(q_1,\varepsilon)\}$ | |
| $q_1$ | $Z_0$ | | | $\{(q_f,\varepsilon)\}$ |
| | E | | $\{(q_1,\varepsilon)\}$ | |
| $q_f$ | $Z_0$ | | | |
| | E | | | |

5b) $P_3 = \{S \to 0S1^{11m^3}, S \to 01^{11m^3+11m^4}\}$.

5c) $S \underset{G}{\overset{n-1}{\vdash}} 0^{n-1}S1^{11m^3(n-1)} \underset{G}{\vdash} 0^n 01^{11m^3 n+11m^4}$ für alle $n \geq 1$

# AUTOMATEN UND FORMALE SPRACHEN

**2. Test am 20. März 2002**

| Kennnummer: | Matrikelnummer: | Vorname: | Zuname: |
|---|---|---|---|
| | | | |

*Im folgenden sei m Ihre Matrikelnummer.*

4) Sei

$$L_4 = \left\{a^{21mn}b^{2001mn+1}c^{21(n+1)} \mid n \geq 1\right\} \quad \text{und}$$
$$L_5 = \left\{\left(d^4c^5\right)^n \left(b^{667}\right)^n \left(a^3d^{2001}\right)^n \mid n \geq 0\right\}.$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen, dass $L_4$ keine kontextfreie Sprache sein kann. (29 Punkte)

**Beweis** indirekt. Angenommen $L_4$ ist kontextfrei. Sei $n$ die Konstante aus dem Pumping Lemma und $z =$ .

Wegen $|z| = ($ $)n+$ $> n$ müssen nach dem Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen $u, v, w, x, y$ existieren, sodass $z = uxvyw$, $|xy| \geq 1$, $|xvy| \leq n$ und $z(i) = ux^ivy^iw \in L_4$ für alle $i \in N$.

Aus $\nu(xvy,$ $) > 0$ folgt wegen $|xvy| \leq n$ jedoch $\nu(xvy, c) = 0$.

Für $z(0)$ erhält man daher $\nu(z(0),$ $) =$ , aber entweder ist wegen $|xy| \geq 1$ nun

$\nu(z(0), a)$ oder $\nu(z(0),$ $)$ .

Da aber $z$ das einzige Wort $s$ in $L_4$ mit $\nu(s,$ $) =$ ist, jedoch $z(0) \neq z$ gilt, kann $z(0)$ nicht aus $L_4$ sein.

Aus $\nu(xvy,$ $) = 0$ folgt für $z(0)$ hingegen

$\nu(z(0),$ $) =$ , aber wegen $|xy| \geq 1$ muss entweder

$\nu(z(0),$ $)$ $2001mn + 1$ oder $\nu(z(0),$ $)$ sein. Somit gilt $z(0) \notin L_4$, da $z(0) \neq z$ und $z$ das einzige Wort $s \in L_4$ mit $\nu(s, a) = 21mn$ ist.

Wir haben damit alle möglichen Zerlegungen von $z$ untersucht, aber in jedem Fall einen Widerspruch erhalten! $L_4$ kann daher nicht kontextfrei sein. Q.E.D.

(b) Geben Sie eine gsm

$M_4 = (\{q_0, q_1\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c\}, \delta_4, q_0, \{q_1\})$

mit $M_4(L_5) = L_4$ an. (26 Punkte)

5) Sei $L_6 = \left\{ a^n b^{2002^{2002} n - m} \mid n \geq 1 \right\}$.

(a) Definieren Sie einen Kellerautomaten
$M_6 = (\{q_0, q_1, q_f\}, \{a, b\}, \{Z_0, A\}, \delta_6, q_0, Z_0, \{q_f\})$
in Normalform, der $L_6$ akzeptiert. (23 Punkte)

| $\delta_6$ | | $a$ | | $\varepsilon$ / $Z_2$ |
|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | | | | |
| | | | | |
| $q_1$ | $Z_0$ | | | |
| | $A$ | | | |
| $q_f$ | $Z_0$ | | | |
| | $A$ | | | |

(b) Definieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G_6 = (\{S\}, \{a, b\}, P_6, S)$, die $L_6$ erzeugt und außerdem nicht mehrdeutig ist. (11 Punkte)

$P_6 = \{S \rightarrow$ $\qquad\qquad$ $, S \rightarrow$ $\qquad\qquad$ $\}$

(c) Geben Sie überdies für jedes Wort $a^n b^{2002^{2002} n - m}$, $n \geq 1$, aus $L_6$ die einzige Linksableitung in Ihrer Grammatik $G_6$ an. (11 Punkte)

$S \Longrightarrow_{G_6}^{n-1}$ $\qquad\qquad$ $\Longrightarrow_{G_6}^{1}$ $\qquad\qquad$ für alle $n \geq 1$.

Notenschlüssel:

101 – 120 Genügend 121 – 140 Befriedigend 141 – 160 Gut 161 – 200 Sehr gut

**Lösungen zum 2. Test am 6. Februar 2002**

4) Sei $L_4 = \{a^{22mn}b^{2002mn+1}c^{2002(n+1)} \mid n \geq 1\}$ und
$L_5 = \{(d^{14}c^4)^n (b^{77m})^n (a^{26}d^{1002})^n \mid n \geq 0\}$ (*m Ihre Matrikelnummer*).

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen, dass $L_4$ keine kontextfreie Sprache sein kann. (29 Punkte)

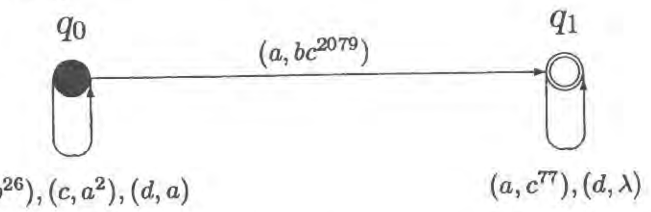
**Beweis** indirekt. Angenommen $L_4$ ist kontextfrei. Sei $n$ die Konstante aus dem Pumping Lemma und $z = a^{22mn}b^{2002mn+1}c^{2002(n+1)}$. Wegen $|z| = (2024m + 2002)\,n + 2003 > n$ müssen nach dem Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen $u, v, w, x, y$ existieren, sodass $z = uxvyw$, $|xy| \geq 1$, $|xvy| \leq n$ und $z(i) = ux^ivy^iw \in L_4$ für alle $i \in N$.

Aus $\nu(xvy, a) > 0$ folgt wegen $|xvy| \leq n$ jedoch $\nu(xvy, c) = 0$. Für $z(0)$ erhält man daher $\nu(z(0), c) = 2002\,(n+1)$, aber entweder ist wegen $|xy| \geq 1$ nun $\nu(z(0), a) < 22mn$ oder $\nu(z(0), b) < 2002mn + 1$. Da aber $z$ das einzige Wort $s$ in $L_4$ mit $\nu(s, c) = 2002\,(n+1)$ ist, jedoch $z(0) \neq z$ gilt, kann $z(0)$ nicht aus $L_4$ sein.

Aus $\nu(xvy, a) = 0$ folgt für $z(0)$ hingegen $\nu(z(0), a) = 22mn$, aber wegen $|xy| \geq 1$ muss entweder $\nu(z(0), b) < 2002mn + 1$ oder $\nu(z(0), c) < 2002\,(n+1)$ sein. Somit gilt $z(0) \notin L_4$, da $z(0) \neq z$ und $z$ das einzige Wort $s \in L_4$ mit $\nu(s, a) = 22mn$ ist.

Wir haben damit alle möglichen Zerlegungen von $z$ untersucht, aber in jedem Fall einen Widerspruch erhalten! $L_4$ kann daher nicht kontextfrei sein. Q.E.D.

(b) Geben Sie eine gsm $M_4 = (\{q_0, q_1\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c\}, \delta_4, q_0, \{q_1\})$ mit $M_4(L_5) = L_4$ an.
(Hinweis: $2002 = 2.7.11.13$ ) (26 Punkte)




5) Sei $L_6 = \left\{a^n b^{m^2 n - m} \mid n \geq 1\right\}$ (*m Ihre Matrikelnummer*).

(a) Definieren Sie einen Kellerautomaten
$M_6 = (\{q_0, q_1, q_f\}, \{a, b\}, \{Z_0, A\}, \delta_6, q_0, Z_0, \{q_f\})$ in Normalform, der $L_6$ akzeptiert. (23 Punkte)

| $\delta_6$ | | 0 | 1 | $Z_2$ |
|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | $Z_0$ | $\left\{\left(q_0, Z_0A^{m^2-m}\right)\right\}$ | | |
| | $A$ | $\left\{\left(q_0, A^{m^2+1}\right)\right\}$ | $\{(q_1, \lambda)\}$ | |
| $q_1$ | $Z_0$ | | | $\{(q_f, \lambda)\}$ |
| | $A$ | | $\{(q_1, \lambda)\}$ | |
| $q_f$ | $Z_0$ | | | |
| | $A$ | | | |

(b) Definieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G_6 = (\{S\}, \{a, b\}, P_6, S)$, die $L_6$ erzeugt und außerdem nicht mehrdeutig ist. (11 Punkte)

$P_6 = \left\{S \to aSb^{m^2}, S \to aSb^{m^2-m}\right\}$

(c) Geben Sie überdies für jedes Wort $a^n b^{m^2 n - m}$, $n \geq 1$, aus $L_6$ die einzige Linksableitung in Ihrer Grammatik $G_6$ an. (11 Punkte)

$S \Longrightarrow_{G_6}^{n-1} a^{n-1}Sb^{m^2(n-1)} \Longrightarrow_{G_6}^{1} a^n b^{m^2 n - m}$ für alle $n \geq 1$.

# AUTOMATEN UND FORMALE SPRACHEN

2. Test am 19. Januar 2001

| Kennnummer: | Matrikelnummer: | Vorname: | Zuname: |
|---|---|---|---|
| | | | |

*Im folgenden sei m Ihre Matrikelnummer.*

4) Sei $L_4 = \left\{a^{21mn}b^{2001mn+1}c^{21(n+1)} \mid n \geq 1\right\}$ und
$L_5 = \left\{(d^5c^8)^n (b^{3m})^n (a^7d^{2001})^n \mid n \geq 0\right\}$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen, dass $L_4$ keine kontextfreie Sprache sein kann. (29 Punkte)

**Beweis** indirekt. Angenommen $L_4$ ist kontextfrei. Sei $n$ die Konstante aus dem Pumping Lemma und $z =$

Wegen $|z| = ($ $)n+$ $> n$ müssen nach dem Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen $u, v, w, x, y$ existieren, sodass $z = uxvyw$, $|xy| \geq 1$, $|xvy| \leq n$ und $z(i) = ux^ivy^iw \in L_4$ für alle $i \in N$.

Aus $\nu(xvy,$ $) > 0$ folgt wegen $|xvy| \leq n$ jedoch $\nu(xvy, c) = 0$.

Für $z(0)$ erhält man daher $\nu(z(0),$ $) =$ , aber entweder ist wegen $|xy| \geq 1$ nun

$\nu(z(0), a)$ oder $\nu(z(0),$ $)$

Da aber $z$ das einzige Wort $s$ in $L_4$ mit $\nu(s,$ $) =$ ist, jedoch $z(0) \neq z$ gilt, kann $z(0)$ nicht aus $L_4$ sein.

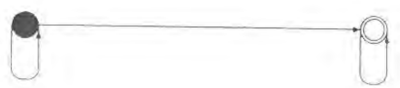
Aus $\nu(xvy,$ $) = 0$ folgt für $z(0)$ hingegen

$\nu(z(0),$ $) =$ , aber wegen $|xy| \geq 1$ muss entweder

$\nu(z(0),$ $)$ $2001mn + 1$ oder $\nu(z(0),$ $)$ sein. Somit gilt $z(0) \notin L_4$, da $z(0) \neq z$ und $z$ das einzige Wort $s \in L_4$ mit $\nu(s, a) = 21mn$ ist.

Wir haben damit alle möglichen Zerlegungen von $z$ untersucht, aber in jedem Fall einen Widerspruch erhalten! $L_4$ kann daher nicht kontextfrei sein. Q.E.D.

(b) Geben Sie eine gsm
$M_4 = (\{q_0, q_1\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c\}, \delta_4, q_0, \{q_1\})$
mit $M_4(L_5) = L_4$ an. (26 Punkte)




5) Sei $L_6 = \{a^nb^{mn-2001} \mid n \geq 1\}$.

(a) Definieren Sie einen Kellerautomaten
$M_6 = (\{q_0, q_1, q_f\}, \{a, b\}, \{Z_0, A\}, \delta_6, q_0, Z_0, \{q_f\})$
in Normalform, der $L_6$ akzeptiert. (23 Punkte)

| $\delta_6$ | | $a$ | | $\varepsilon$ / $Z_2$ |
|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | | | | |
| | | | | |
| $q_1$ | $Z_0$ | | | |
| | $A$ | | | |
| $q_f$ | $Z_0$ | | | |
| | $A$ | | | |

(b) Definieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G_6 = (\{S\}, \{a, b\}, P_6, S)$, die $L_6$ erzeugt und außerdem nicht mehrdeutig ist. (11 Punkte)

$P_6 = \{S \rightarrow$ $, S \rightarrow$ $\}$

(c) Geben Sie überdies für jedes Wort $a^nb^{mn-2001}$, $n \geq 1$, aus $L_6$ die einzige Linksableitung in Ihrer Grammatik $G_6$ an. (11 Punkte)

$S \Longrightarrow^{n-1}_{G_6}$ $\Longrightarrow^{1}_{G_6}$ für alle $n \geq 1$.

Notenschlüssel:
101 – 120 Genügend 121 – 140 Befriedigend 141 – 160 Gut 161 – 200 Sehr gut

# AUTOMATEN UND FORMALE SPRACHEN

## 2. Test am 20. Jänner 1997

| Kennummer: | Matrikelnummer: | Vorname: | Zuname: |
|---|---|---|---|
| | | | |

*Im folgenden sei m Ihre Matrikelnummer.*

4) Sei
$$L_4 = \left\{a^{16(mn+4m)}b^{256m(n+m^2)}0^{256n} \mid n \geq 1\right\} \quad \text{und}$$
$$L_5 = \left\{\left(0^{14}b^3 0^2\right)^{mn}\left(a^{4m}0\right)^{16n}\left(b0^{64}b^3\right)^{64n} \mid n \geq 0\right\}.$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen, daß $L_4$ keine kontextfreie Sprache sein kann. (29 Punkte)

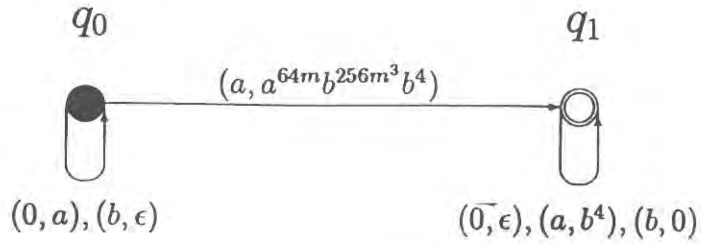
**Beweis indirekt.** Angenommen $L_4$ ist kontextfrei. Sei $n$ die Konstante aus dem Pumping Lemma und $z = a^{16(mn+4m)}b^{256m(n+m^2)}0^{256n}$. Wegen $|z| = (272m + 256)\,n + 64m + 256m^3 > n$ müssen nach dem Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen $u, v, w, x, y$ existieren, sodaß $z = uxvyw$, $|xy| \geq 1$, $|xvy| \leq n$ und $z\,(i) = ux^ivy^iw \in L_4$ für alle $i \in N$.

Aus $\nu\,(xvy, a) > 0$ folgt wegen $|xvy| \leq n$ jedoch $\nu\,(xvy, 0) = 0$. Für $z\,(5)$ erhält man daher $\nu\,(z\,(5)\,, 0) = 256n$, aber entweder ist wegen $|xy| \geq 1$ nun $\nu\,(z\,(5)\,, a) > 16mn + 64m$ oder $\nu\,(z\,(5)\,, b) > 256mn + 256m^3$. Da aber $z$ das einzige Wort $s$ in $L_4$ mit $\nu\,(s, 0) = 256n$ ist, jedoch $z\,(5) \neq z$ gilt, kann $z\,(5)$ nicht aus $L_4$ sein.

Aus $\nu\,(xvy, a) = 0$ folgt für $z\,(5)$ hingegen $\nu\,(z\,(5)\,, a) = 16mn + 64m$, aber wegen $|xy| \geq 1$ muß entweder $\nu\,(z\,(5)\,, b) > 256mn + 256m^3$ oder $\nu\,(z\,(5)\,, 0) > 256n$ sein. Somit gilt $z\,(5) \notin L_4$, da $z\,(5) \neq z$ das einzige Wort $s \in L_4$ mit $\nu\,(z\,(5)\,, a) = 16mn + 64m$ ist.

Wir haben damit alle möglichen Zerlegungen von $z$ untersucht, aber in jedem Fall einen Widerspruch erhalten! $L_4$ kann daher nicht kontextfrei sein.Q.E.D.

(b) Geben Sie eine gsm
$M_4 = (\{q_0, q_1\}\,, \{a, b, 0\}\,, \{a, b, 0\}\,, \delta_4, q_0, \{q_1\})$
mit $M_4\,(L_5) = L_4$ an. (26 Punkte)



5) Sei $L_6 = \left\{ b^n 0^{16(mn-4)} \mid n \geq 1 \right\}$.

(a) Definieren Sie einen Kellerautomaten
$M_6 = (\{q_0, q_1, q_f\}, \{0, b\}, \{Z_0, A\}, \delta_6, q_0, Z_0, \{q_f\})$
in Normalform, der $L_6$ akzeptiert. (23 Punkte)

| $\delta_6$ | | $b$ | $0$ | $\epsilon$ |
|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | $Z_0$ | $\{(q_0, Z_0 A^{16m-64})\}$ | | |
| | $A$ | $\{(q_0, A^{16m+1})\}$ | $\{(q_1, \epsilon)\}$ | |
| $q_1$ | $Z_0$ | | | $\{(q_f, \epsilon)\}$ |
| | $A$ | | $\{(q_1, \epsilon)\}$ | |
| $q_f$ | $Z_0$ | | | |
| | $A$ | | | |

(b) Definieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G_6 = (\{S\}, \{0, b\}, P_6, S)$, die $L_6$ erzeugt und außerdem nicht mehrdeutig ist. (11 Punkte)
$P_6 = \{S \to bS0^{16m}, S \to b0^{16m-64}\}$

(c) Geben Sie überdies für jedes Wort $b^n 0^{16(mn-4)}$, $n \geq 1$, aus $L_6$ die einzige Linksableitung in Ihrer Grammatik $G_6$ an. (11 Punkte)

$S \vdash_{G_6}^{n-1} bS0^{16m(n-1)} \vdash_{G_6}^{1} b^n 0^{16mn-64}$ für alle $n \geq 1$.

Notenschlüssel:

101 – 120 Genügend 121 – 140 Befriedigend 141 – 160 Gut 161 – 200 Sehr gut

| AUTOMATEN UND FORMALE SPRACHEN<br>2. ÜBUNGSTEST am 9. Jänner 1995 | | |
|---|---|---|
| Kennzahl/Matrikelnummer | Familienname | Vorname |
| | | |

*Im folgenden sei m Ihre Matrikelnummer.*

4) Sei $L_1 = \{ b^{10mn+m^{10}} 1^{10m(n+m^9)} a^{10mn} \mid n \geq 1 \}$ und

$L_2 = \{ (d^3 1)^{2mn} (a^5 d^2)^{5mn} (1a^7)^{2mn} \mid n \geq 0 \}$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen, daß $L_1$ keine kontextfreie Sprache sein kann.

( 28 Punkte )

b) Geben Sie eine gsm $M_1 = (\{q_0,q_1\},\{a,d,1\},\{a,b,1\},\delta_1,q_0,F_1)$ an, sodaß $\mathfrak{M}_1(L_2) = L_1$.

( 27 Punkte )

5) Sei $L_3 = \{ d^{n+1} 1^{5m(n+m^2)} \mid n \geq 0 \}$.

a) Definieren Sie einen Kellerautomaten $M_3 = (\{q_0,q_1,q_f\},\{d,1\},\{Z_0,E\},\delta_3,q_0,Z_0,\{q_f\})$ in Normalform, der $L_3$ akzeptiert.

( 25 Punkte )

b) Definieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G_3 = (\{S\},\{d,1\},P_3,S)$, die $L_3$ erzeugt und außerdem nicht mehrdeutig ist.

( 10 Punkte )

c) Geben Sie überdies für jedes Wort $d^{n+1} 1^{5m(n+m^2)}$, $n \geq 0$, aus $L_3$ die einzige Linksableitung in Ihrer Grammatik $G_3$ an.

( 10 Punkte )

*Notenskala:*

| | | |
|---|---|---|
| Nicht genügend: 0 - 100 | Genügend: 101 - 120 | Befriedigend: 121 - 140 |
| Gut: 141 - 160 | Sehr gut: 161 - 200 | |

Sollten Sie Ihre Note bei einem der beiden Nachtragstests im SS 1995 noch verbessern wollen, dann *streichen Sie* im folgenden *alle jene Noten durch, die Sie noch nicht ausgestellt haben wollen*; eine **nachträgliche Verbesserung** der Übungsnote nach Ausstellung eines bereits positiven Übungszeugnisses ist *sonst* **nicht** mehr **möglich!!**

Genügend Befriedigend Gut

## AUTOMATEN UND FORMALE SPRACHEN

**Lösungen zum 2. ÜBUNGSTEST am 9. Jänner 1995**

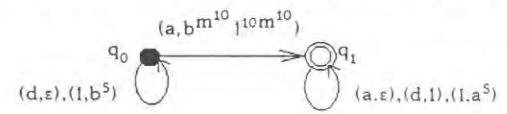
4) Sei $L_1 = \{ b^{10mn+m^{10}} 1^{10m(n+m^9)} a^{10mn} \mid n \geq 1 \}$ und

$L_2 = \{ (d^3 1)^{2mn} (a^5 d^2)^{5mn} (1a^7)^{2mn} \mid n \geq 0 \}$.

a) **Beweis** indirekt. Angenommen, $L_1$ ist kontextfrei. Sei n die Konstante aus dem Pumping Lemma und $z = b^{10mn+m^{10}} 1^{10m(n+m^9)} a^{10mn}$. Wegen $|z| = 30mn + 11m^{10} > n$ müssen nach dem Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen u,v,w,x,y existieren, sodaß $z = uxvyw$, $|xy| \geq 1$, $|xvy| \leq n$ und $z(i) = ux^ivy^iw \in L$ für alle $i \in \mathbf{N}$.
Aus $\nu(xvy,b) > 0$ folgt wegen $|xvy| \leq n$ jedoch $\nu(xvy,a) = 0$. Für z(2) erhält man daher $\nu(z(2),a) = 10mn$, aber entweder ist wegen $|xy| \geq 1$ nun $\nu(z(2),b) > 10mn + m^{10}$ oder $\nu(z(2),1) > 10mn + 10m^{10}$. Da aber z das einzige Wort s in $L_1$ mit $\nu(s,a) = 10mn$ ist, jedoch $z(2) \neq z$ gilt, kann z(2) nicht aus $L_1$ sein. Aus $\nu(xvy,b) = 0$ folgt für z(2) hingegen $\nu(z(2),b) = 10mn + m^{10}$, aber wegen $|xy| \geq 1$ muß entweder $\nu(z(2),1) > 10mn + 10m^{10}$ oder $\nu(z(2),a) > 10mn$ sein. Somit gilt $z(2) \notin L_1$, da $z(2) \neq z$, aber z das einzige Wort $s \in L_1$ mit $\nu(s,b) = 10mn + m^{10}$ ist.
Wir haben damit alle möglichen Zerlegungen von z untersucht, aber in jedem Falle einen Widerspruch erhalten! $L_1$ kann daher nicht kontextfrei sein.

**Q. E. D.**

4b) $\delta_1(q_0,d) = (q_0,\varepsilon)$, $\delta_1(q_0,1) = (q_0,b^5)$, $\delta_1(q_0,a) = (q_1,b^{m^{10}}1^{10m^{10}})$
$\delta_1(q_1,a) = (q_1,\varepsilon)$, $\delta_1(q_1,d) = (q_1,1)$, $\delta_1(q_1,1) = (q_1,a^5)$; $F_1 = \{q_1\}$.




5a) $M_3 = (\{q_0,q_1,q_f\},\{d,1\},\{Z_0,E\},\delta_3,q_0,Z_0,\{q_f\})$

| $\delta_3$ | | d | 1 | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | $Z_0$ | $\{(q_0,Z_0E^{5m^3})\}$ | | |
| | E | $\{(q_0,E^{5m+1})\}$ | $\{(q_1,\varepsilon)\}$ | |
| $q_1$ | $Z_0$ | | | $\{(q_f,\varepsilon)\}$ |
| | E | | $\{(q_1,\varepsilon)\}$ | |
| $q_f$ | $Z_0$ | | | |
| | E | | | |

5b) $P_3 = \{S \to d1^{5m^3},\ S \to dS1^{5m}\}$

5c) $S \overset{n}{\underset{G}{\vdash}} d^nS1^{5mn} \underset{G}{\vdash} d^{n+1}1^{5mn+5m^3}$ für alle $n \geq 0$

16,-

# AUTOMATEN UND FORMALE SPRACHEN

2. ÜBUNGSTEST am 27. Jänner 1992

| Kennzahl/Matrikelnummer | Familienname | Vorname |
|---|---|---|
| | | |

*Im folgenden sei m Ihre Matrikelnummer.*

4) Sei $L_1 = \{1^{n+1}2^{mn+2}0^{4mn} \mid n \in \mathbf{N}_+\}$ und $L_2 = \{0^n 1^{mn} 2^{2mn} \mid n \in \mathbf{N}\}$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen, daß $L_1$ keine kontextfreie Sprache sein kann.

( 28 Punkte )

b) Geben Sie eine gsm $M_1 = (\{q_0,q_1\},\{0,1,2\},\{0,1,2\},\delta_1,q_0,F_1)$ an, sodaß $\mathfrak{M}_1(L_2) = L_1$.

( 22 Punkte )

c) Begründen Sie, warum aus den Ergebnissen in a) und b) folgt, daß auch $L_2$ nicht kontextfrei sein kann.

( 5 Punkte )

5) Sei $L = \{0^n 1^{mn} \mid n \in \mathbf{N}_+\}$.

a) Definieren Sie einen Kellerautomaten $M = (\{q_0,q_1,q_f\},\{0,1\},\{Z_0,X\},\delta,q_0,Z_0,\{q_f\})$ in Normalform, der L akzeptiert, und beschreiben Sie die Arbeitsweise Ihres Automaten.

( 25 Punkte )

b) Definieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (\{S\},\{0,1\},P,S)$, die L erzeugt und außerdem nicht mehrdeutig ist.

( 10 Punkte )

c) Geben Sie überdies für jedes Wort $0^n 1^{mn}$, $n \in \mathbf{N}_+$, aus L die einzige Linksableitung in Ihrer Grammatik G an.

( 10 Punkte )

*Notenskala:*

Nicht genügend: 0 - 99 Genügend: 100 - 119 Befriedigend: 120 - 139

Gut: 140 - 159 Sehr gut: 160 - 200

# AUTOMATEN UND FORMALE SPRACHEN

## LÖSUNGEN ZUM 2. ÜBUNGSTEST AM 27. JÄNNER 1992

4) Sei $L_1 = \{1^{n+1}2^{mn+2}0^{4mn} \mid n \in \mathbf{N}_+\}$ und $L_2 = \{0^n 1^{mn} 2^{2mn} \mid n \in \mathbf{N}\}$.

a) **Beweis** indirekt.

Angenommen, $L_1$ ist kontextfrei. Sei n die Konstante aus dem Pumping Lemma und $z = 1^{n+1}2^{mn+2}0^{4mn}$. Wegen $|z| = (1 + m + 4m)n = (5m + 1)n > n$ müssen nach dem Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen u,v,w,x,y existieren, sodaß $z = uxvyw$, $|xy| \geq 1$, $|xvy| \leq n$ und $z(i) = ux^ivy^iw \in L$ für alle $i \in \mathbf{N}$.

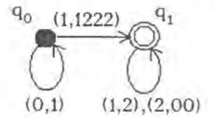
Aus $\nu(xvy,1) > 0$ folgt wegen $|xvy| \leq n$ jedoch $\nu(xvy,0) = 0$. Für z(2) erhält man daher $\nu(z(2),0) = 4mn$, aber entweder ist wegen $|xy| \geq 1$ nun $\nu(z(2),1) > n + 1$ oder $\nu(z(2),2) > mn + 2$. Da aber z das einzige Wort s in $L_1$ mit $\nu(s,0) = 4mn$ ist, jedoch $z(2) \neq z$ gilt, kann z(2) nicht aus $L_1$ sein.

Aus $\nu(xvy,1) = 0$ folgt für z(2) hingegen $\nu(z(2),1) = n + 1$, aber wegen $|xy| \geq 1$ muß entweder $\nu(z(2),2) > mn + 2$ oder $\nu(z(2),0) > 4mn$ sein. Somit gilt $z(2) \notin L_1$, da $z(2) \neq z$, aber z das einzige Wort $s \in L_1$ mit $\nu(s,1) = n + 1$ ist.

Wir haben damit alle möglichen Zerlegungen von z untersucht, aber in jedem Falle einen Widerspruch erhalten! $L_1$ kann daher nicht kontextfrei sein.

**Q. E. D.**

4b) $F_1 = \{q_1\}$; $\delta_1(q_0,0) = (q_0,1)$, $\delta_1(q_0,1) = (q_1,1222)$, $\delta_1(q_1,1) = (q_1,2)$, $\delta_1(q_1,2) = (q_1,00)$.




4c) Da $\mathfrak{L}_2$ gegenüber beliebigen gsm-Abbildungen abgeschlossen ist, wäre mit $L_2$ auch $\mathfrak{M}_1(L_2) = L_1$ ( siehe b) ) aus $\mathfrak{L}_2$, was nach a) aber nicht möglich ist, d.h. $L_2$ kann nicht kontextfrei sein.

5a) $M = (\{q_0,q_1,q_f\},\{0,1\},\{Z_0,X\},\delta,q_0,Z_0,\{q_f\})$

| $\delta$ | | 0 | 1 | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | $Z_0$ | $\{(q_0,Z_0X^m)\}$ | | |
| | X | $\{(q_0,X^{m+1})\}$ | $\{(q_1,\varepsilon)\}$ | |
| $q_1$ | $Z_0$ | | | $\{(q_f,\varepsilon)\}$ |
| | X | | $\{(q_1,\varepsilon)\}$ | |
| $q_f$ | $Z_0$ | | | |
| | X | | | |

5b) $P = \{S \to 01^m,\ S \to 0S1^m\}$

5c) $S \mathrel{\mid\!\!\frac{n-1}{G}} 0^{n-1}S1^{m(n-1)} \mathrel{\mid\!\!\frac{}{G}} 0^n1^{mn}$ für alle $n \in \mathbf{N}_+$.

PRÜFUNGSORDNER - ein Service Deiner Fachschaft Informatik!

LVA: AUTOMATEN U. FORM. SPRACHEN - UE (TLW. M. LÖSG.) Preis: [illegible],–

# AUTOMATEN UND FORMALE SPRACHEN

## 1. ÜBUNGSTEST am 10. Dezember 1993

| Kennzahl/Matrikelnumer | Familienname | Vorname |
|---|---|---|
| | | |

1) Definieren Sie eine monotone Grammatik $G = (\{S\},\{a,b,c\},P,S)$ mit $L(G) = \{w \in \{a,b,c\}^+ \mid 3\nu(w,a) = \nu(w,b) = \nu(w,c)\}$ und erläutern Sie die Arbeitsweise Ihrer Grammatik.

( 24 Punkte )

2) Sei $L = \{0^{3n}1^2 2^{5n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

a) Definieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (\{S\},\{0,1,2\},P,S)$ mit $L(G) = L$ und beweisen Sie dies mittels Induktion über den Mengen $SF(G,n)$ der in $G$ in $n$ Schritten ableitbaren Satzformen.

( 21 Punkte )

b) Beweisen Sie mit Hilfe des Korollars zum Pumping Lemma, daß $L$ nicht regulär ist.

( 21 Punkte )

3) Sei ein nichtdeterministischer endlicher Automat $M = (\{q_0,q_1,q_2\},\{a,b\},\delta,q_0,\{q_2\})$ durch die folgende Tabelle für $\delta$ gegeben:

| $\delta$ | a | b |
|---|---|---|
| $q_0$ | $\{q_0,q_1\}$ | $\{q_0\}$ |
| $q_1$ | $\{\}$ | $\{q_1,q_2\}$ |
| $q_2$ | $\{q_0\}$ | $\{q_0\}$ |

a) Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten $M'$ mit $L(M') = L(M)$ (unnötige Zustände weglassen).

( 18 Punkte )

b) Konstruieren Sie aus der oben angegebenen Übergangstabelle von $M$ eine reguläre Grammatik $G' = (\{A_0,A_1,A_2\},\{a,b\},P',A_0)$ mit $L(G') = L(M)$.

( 16 Punkte )

# AUTOMATEN UND FORMALE SPRACHEN

## 2. ÜBUNGSTEST am 10. Dezember 1993

| Kennzahl/Matrikelnummer | Familienname | Vorname |
|---|---|---|
| | | |

*Im folgenden sei m Ihre Matrikelnummer.*

4) Sei $L_1 = \{a^{n+2}c^{mn+3}b^{6mn} \mid n \in \mathbb{N}_+\}$ und $L_2 = \{b^n a^{mn} c^{3mn} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen, daß $L_1$ keine kontextfreie Sprache sein kann.

( 28 Punkte )

b) Geben Sie eine gsm $M_1 = (\{q_0,q_1\},\{a,b,c\},\{a,b,c\},\delta_1,q_0,F_1)$ an, sodaß $\mathfrak{M}_1(L_2) = L_1$.

( 22 Punkte )

c) Begründen Sie, warum aus den Ergebnissen in a) und b) folgt, daß auch $L_2$ nicht kontextfrei sein kann.

( 5 Punkte )

5) Sei $L_3 = \{2^n 1^{mn} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

a) Definieren Sie einen Kellerautomaten $M_3 = (\{q_0,q_1,q_f\},\{1,2\},\{Z_0,X\},\delta_3,q_0,Z_0,\{q_f\})$ in Normalform, der $L_3$ akzeptiert, und beschreiben Sie die Arbeitsweise Ihres Automaten.

( 25 Punkte )

b) Definieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G_3 = (\{S\},\{1,2\},P_3,S)$, die $L_3$ erzeugt und außerdem nicht mehrdeutig ist.

( 10 Punkte )

c) Geben Sie überdies für jedes Wort $2^n 1^{mn}$, $n \in \mathbb{N}$, aus $L_3$ die einzige Linksableitung in Ihrer Grammatik $G_3$ an.

( 10 Punkte )

*Notenskala:*

Nicht genügend: 0 - 100 Genügend: 101 - 120 Befriedigend: 121 - 140
Gut: 141 - 160 Sehr gut: 161 - 200

Sollten Sie Ihre Note bei einem der beiden Nachtragstests im SS 1994 noch verbessern wollen, dann *streichen Sie* im folgenden *alle jene Noten durch, die Sie noch nicht ausgestellt haben wollen*; eine **nachträgliche Verbesserung** der Übungsnote nach Ausstellung eines bereits positiven Übungszeugnisses ist *sonst* **nicht** mehr **möglich!!**

Genügend Befriedigend Gut

# AUTOMATEN UND FORMALE SPRACHEN

## Lösungen zum 1. ÜBUNGSTEST am 10. Dezember 1993

**BEISPIEL 1.** Sei $L = \{w \in \{a,b,c\}^+ \mid 3\nu(w,a) = \nu(w,b) = \nu(w,c)\}$.
Dann wird L von der monotonen Grammatik $G = (\{S\},\{a,b,c\},P,S)$ mit $P = \{(S,abbbccc),(S,abbbcccS)\} \cup \{(xy,yx) \mid x,y \in \{a,b,c\}\}$ erzeugt.
Wie man sofort sieht, gilt nämlich

a) $S \vdash_G^n (abbbccc)^n S \vdash_G (abbbccc)^{n+1}$ für alle $n \geq 0$ ( Beweis durch Induktion! );

b) $(abbbccc)^{n+1} \vdash_G^* w$ für jedes $w \in L$ mit Hilfe der Vertauschungsregeln aus $\{(xy,yx) \mid x,y \in \{a,b,c\}\}$;

c) Ist $v \in \{S,a,b,c\}^*$ eine in G ableitbare Satzform, d.h. $S \vdash_G^* v$, so gilt $3\nu(v,a) = \nu(v,b) = \nu(v,c)$ ( Beweis durch Induktion! ).

Aus a) und b) folgt aber sofort $L(G) \supseteq L$, aus c) hingegen $L(G) \subseteq L$, d.h. insgesamt also $L(G) = L$.

**BEISPIEL 2.** $L = \{0^{3n}1^2 2^{5n} \mid n \in \mathbf{N}\}$.

a) $G = (\{S\},\{0,1,2\},\{S \to 0^3 S 2^5 \mid 1^2\},S)$.
Man kann nun für $n \in \mathbf{N}_+$ alle Ableitungen der Länge n betrachten und die folgende Behauptung A(n) zeigen:
A(n): $S \vdash_G^n w \Leftrightarrow w \in \{0^{3(n-1)}1^2 2^{5(n-1)}, 0^{3n}S2^{5n}\}$,
i.e. $SF(G,n) = \{0^{3(n-1)}1^2 2^{5(n-1)}, 0^{3n}S2^{5n}\}$.
**Beweis** *mittels Induktion nach* $n \in \mathbf{N}_+$.
***Induktionsbasis A(1):*** $S \vdash_G 1^2$ bzw. $S \vdash_G 0^3 S 2^5$ sind die einzigen direkten Ableitungen in G aus dem Startsymbol S.
***Sei nun n > 1:***
***Induktionshypothese (IH):*** Die Aussage A(m) gilt für alle m mit $1 \leq m < n$.
***Induktionsbehauptung:*** Es gilt auch A(n).
$S \vdash_G^n w \Leftrightarrow S \vdash_G^{n-1} v \vdash_G w$ für ein $v \in \{0,1,2,S\}^* \Leftrightarrow$ ( (IH) für $m = n-1$ )
$S \vdash_G^{n-1} v \vdash_G w$ für ein $v \in \{0^{3(n-2)}1^2 2^{5(n-2)}, 0^{3(n-1)}S2^{5(n-1)}\}$.
Da in einer kontextfreien Grammatik aus einem Terminalwort wie $0^{3(n-2)}1^2 2^{5(n-2)}$ nichts mehr weiter abgeleitet werden kann, ist dies aufgrund der Produktionen von G äquivalent mit
$S \vdash_G^{n-1} 0^{3(n-1)}S2^{5(n-1)} \vdash_G w \Leftrightarrow w \in \{0^{3(n-1)}1^2 2^{5(n-1)}, 0^{3n}S2^{5n}\}$.

**Q. E. D.**

Aus der Gültigkeit der Aussage A(n) für alle $n \in \mathbf{N}_+$ folgt nun sofort $L(G) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}_+}(\{0^{3(n-1)}1^2 2^{5(n-1)}, 0^{3n}S2^{5n}\}) \cap \{0,1,2\}^* = \bigcup_{n \in \mathbf{N}}\{0^{3n}1^2 2^{5n}\} = L$.

b) **Beweis** *indirekt.* Angenommen, L ist regulär.
Sei n die Konstante aus dem Pumping Lemma und $z = 0^{3n}1^2 2^{5n}$; dann ist z aus L und $|z| = 8n + 2 > n$. Nach dem Korollar zum Pumping Lemma kann man also $z = uvw$ mit $u,v,w \in \{0,1,2\}^*$, $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, schreiben, sodaß $uv^iw$ für alle $i \in \mathbf{N}$ aus L ist. Dann muß aber $uv \in \{0\}^*$ und somit auch – wegen $|v| \geq 1$ – $v \in \{0\}^+$ gelten und $uv^2w = 0^{3n+|v|}1^2 2^{5n}$ aus L sein. Wegen $1 \leq |v| \leq n$ gilt jedoch $3n + 1 \leq 3n + |v| \leq 4n$ und somit $3n + |v| \neq 3n$. Da $0^{3n}1^2 2^{5n}$ das einzige Wort in L der Gestalt $0^m 1^2 2^{5n}$ für ein $m \in \mathbf{N}_+$ ist, kann daher $uv^2w$ nicht aus L sein. **Widerspruch**! L ist deshalb keine reguläre formale Sprache.

**Q. E. D.**

**BEISPIEL 3.**

a) $M' = (\{[q_0],[q_0,q_1],[q_0,q_1,q_2]\},\{a,b\},\delta',[q_0],\{[q_0,q_1,q_2]\})$ mit

| $\delta'$ | a | b |
|---|---|---|
| $[q_0]$ | $[q_0,q_1]$ | $[q_0]$ |
| $[q_0,q_1]$ | $[q_0,q_1]$ | $[q_0,q_1,q_2]$ |
| $[q_0,q_1,q_2]$ | $[q_0,q_1]$ | $[q_0,q_1,q_2]$ |

b) $G' = (\{A_0,A_1,A_2\},\{a,b\},P',A_0)$ mit
$P' = \{A_0 \to aA_0 \mid aA_1 \mid bA_0,$
$A_1 \to bA_1 \mid bA_2 \mid b,$
$A_2 \to aA_0 \mid bA_0\}$

# AUTOMATEN UND FORMALE SPRACHEN

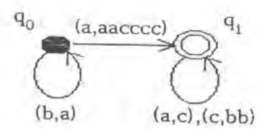
## Lösungen zum 2. ÜBUNGSTEST am 10. Dezember 1993

4) Sei $L_1 = \{a^{n+2}c^{mn+3}b^{6mn} \mid n \in \mathbf{N}_+\}$ und $L_2 = \{b^n a^{mn} c^{3mn} \mid n \in \mathbf{N}\}$.

a) **Beweis** indirekt.
Angenommen, $L_1$ ist kontextfrei. Sei n die Konstante aus dem Pumping Lemma und $z = a^{n+2}c^{mn+3}b^{6mn}$. Wegen $|z| = (7m+1)n + 5 > n$ müssen nach dem Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen u,v,w,x,y existieren, sodaß $z = uxvyw$, $|xy| \geq 1$, $|xvy| \leq n$ und $z(i) = ux^ivy^iw \in L$ für alle $i \in \mathbf{N}$.
Aus $\nu(xvy,a) > 0$ folgt wegen $|xvy| \leq n$ jedoch $\nu(xvy,b) = 0$. Für z(2) erhält man daher $\nu(z(2),b) = 6mn$, aber entweder ist wegen $|xy| \geq 1$ nun $\nu(z(2),a) > n + 2$ oder $\nu(z(2),c) > mn + 3$. Da aber z das einzige Wort s in $L_1$ mit $\nu(s,b) = 6mn$ ist, jedoch $z(2) \neq z$ gilt, kann z(2) nicht aus $L_1$ sein.
Aus $\nu(xvy,a) = 0$ folgt für z(2) hingegen $\nu(z(2),a) = n + 2$, aber wegen $|xy| \geq 1$ muß entweder $\nu(z(2),c) > mn + 3$ oder $\nu(z(2),b) > 6mn$ sein. Somit gilt $z(2) \notin L_1$, da $z(2) \neq z$, aber z das einzige Wort $s \in L_1$ mit $\nu(s,a) = n + 2$ ist.
Wir haben damit alle möglichen Zerlegungen von z untersucht, aber in jedem Falle einen Widerspruch erhalten! $L_1$ kann daher nicht kontextfrei sein.

**Q. E. D.**

4b) $\delta_1(q_0,b) = (q_0,a)$, $\delta_1(q_0,a) = (q_1,aacccc)$, $\delta_1(q_1,a) = (q_1,c)$, $\delta_1(q_1,c) = (q_1,bb)$;
$F_1 = \{q_1\}$.




4c) Da $\mathfrak{L}_2$ gegenüber beliebigen gsm-Abbildungen abgeschlossen ist, wäre mit $L_2$ auch $\mathfrak{M}_1(L_2) = L_1$ ( siehe b) ) aus $\mathfrak{L}_2$, was nach a) aber nicht möglich ist, d.h. $L_2$ kann nicht kontextfrei sein.

5a) $M_3 = (\{q_0,q_1,q_f\},\{1,2\},\{Z_0,X\},\delta_3,q_0,Z_0,\{q_f\})$

| $\delta_3$ | | 2 | 1 | ε |
|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | $Z_0$ | $\{(q_0,Z_0X^m)\}$ | | $\{(q_f,\varepsilon)\}$ |
| | X | $\{(q_0,X^{m+1})\}$ | $\{(q_1,\varepsilon)\}$ | |
| $q_1$ | $Z_0$ | | | $\{(q_f,\varepsilon)\}$ |
| | X | | $\{(q_1,\varepsilon)\}$ | |
| $q_f$ | $Z_0$ | | | |
| | X | | | |

5b) $P_3 = \{S \to \varepsilon,\ S \to 2S1^m\}$

5c) $S \vdash_G^n 2^nS1^{mn} \vdash_G 2^n1^{mn}$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

22.

# AUTOMATEN UND FORMALE SPRACHEN

1. ÜBUNGSTEST am 18. November 1992

| Kennzahl/Matrikelnummer | Familienname | Vorname |
| --- | --- | --- |
| | | |

*Im folgenden sei m Ihre Matrikelnummer.*

1) Definieren Sie eine monotone Grammatik $G = (\{S\},\{a,b,c\},P,S)$ mit $L(G) = \{w \in \{a,b,c\}^+ \mid 2v(w,a) = v(w,b) = 2v(w,c)\}$ und erläutern Sie die Arbeitsweise Ihrer Grammatik.

( 28 Punkte )

2) Sei $L = \{b^{mn} c^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

a) Definieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (\{S\},\{b,c\},P,S)$ mit $L(G) = L$ und beweisen Sie dies mittels Induktion über den Mengen $SF(G,n)$ der in $G$ in $n$ Schritten ableitbaren Satzformen.

( 21 Punkte )

b) Beweisen Sie mit Hilfe des Korollars zum Pumping Lemma, daß $L$ nicht regulär ist.

( 21 Punkte )

3) Sei ein nichtdeterministischer endlicher Automat $M = (\{q_0,q_1,q_2,q_3\},\{0,1,2\},\delta,q_0,\{q_2,q_3\})$ durch die folgende Tabelle für $\delta$ gegeben:

| $\delta$ | 0 | 1 | 2 |
| --- | --- | --- | --- |
| $q_0$ | $\{q_0,q_2\}$ | $\{q_1,q_3\}$ | $\{q_1,q_3\}$ |
| $q_1$ | $\{\}$ | $\{q_0,q_3\}$ | $\{\}$ |
| $q_2$ | $\{\}$ | $\{q_0\}$ | $\{q_0,q_3\}$ |
| $q_3$ | $\{q_0\}$ | $\{q_1\}$ | $\{q_1,q_3\}$ |

Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten $M'$ mit $L(M') = L(M)$ ( unnötige Zustände weglassen! ).

( 30 Punkte )

! Bitte nur Angaben bringen !

# AUTOMATEN UND FORMALE SPRACHEN

**Lösungen zum 1. ÜBUNGSTEST am 18. November 1992**

**BEISPIEL 1.**

$L = \{w \in \{a,b,c\}^+ \mid 2\nu(w,a) = \nu(w,b) = 2\nu(w,c)\}$.

L wird von der monotonen Grammatik $G = (\{S\},\{a,b,c\},P,S)$ mit

$P = \{(S,abbc),(S,abbcS)\} \cup \{(xy,yx) \mid x,y \in \{a,b,c\}\}$ erzeugt.

Wie man sofort sieht, gilt nämlich

a) $S \vdash_G^n (abbc)^n S \vdash_G (abbc)^{n+1}$ für alle $n \geq 0$ ( Beweis durch Induktion! );

b) $(abbc)^{n+1} \vdash_G^* w$ für jedes $w \in L$ mit Hilfe der Vertauschungsregeln aus $\{(xy,yx) \mid x,y \in \{a,b,c\}\}$;

c) ist $v \in \{S,a,b,c\}^*$ eine in G ableitbare Satzform, d.h. $S \vdash_G^* v$, so gilt $2\nu(v,a) = \nu(v,b) = 2\nu(v,c)$ ( Beweis durch Induktion! ).

Aus a) und b) folgt aber sofort $L(G) \supseteq L$, aus c) hingegen $L(G) \subseteq L$, d.h. insgesamt also $L(G) = L$.

**BEISPIEL 2.**

$L = \{b^{mn}c^{3n} \mid n \in \mathbf{N}\}$.

a) $G = (\{S\},\{b,c\},\{S \to b^{mn}Sc^{3n}, S \to \varepsilon\},S)$.

Man kann nun für $n \in \mathbf{N}_+$ alle Ableitungen der Länge n betrachten und die folgende Behauptung A(n) zeigen:

$A(n)$: $S \vdash_G^n w \Leftrightarrow w \in \{b^{m(n-1)}c^{3(n-1)}, b^{mn}Sc^{3n}\}$,

i.e. $SF(G,n) = \{b^{m(n-1)}c^{3(n-1)}, b^{mn}Sc^{3n}\}$.

**Beweis** *mittels Induktion nach $n \in \mathbf{N}_+$.*

***Induktionsbasis A(1):*** $S \vdash_G \varepsilon$ und $S \vdash_G b^mSc^3$ sind die einzigen direkten Ableitungen in G aus dem Startsymbol S und $SF(G,1) = \{\varepsilon, b^mSc^3\}$.

***Sei nun $n > 1$:***

***Induktionshypothese (IH):*** Die Aussage A(m) gilt für alle m mit $1 \leq m < n$.

***Induktionsbehauptung:*** Es gilt auch A(n).

$S \vdash_G^n w \Leftrightarrow S \vdash_G^{n-1} v \vdash_G w$ für ein $v \in \{b,c,S\}^* \Leftrightarrow$ ( (IH) für $m = n-1$ )

$S \vdash_G^{n-1} v \vdash_G w$ für ein $v \in \{b^{m(n-2)}c^{3(n-2)}, b^{m(n-1)}Sc^{3(n-1)}\}$.

Da in einer kontextfreien Grammatik aus einem Terminalwort wie $b^{m(n-2)}c^{3(n-2)}$ nichts mehr weiter abgeleitet werden kann, ist dies aufgrund der Produktionen von G äquivalent mit

$S \vdash_G^{n-1} b^{m(n-1)}Sc^{3(n-1)} \vdash_G w \Leftrightarrow w \in \{b^{m(n-1)}c^{3(n-1)}, b^{mn}Sc^{3n}\}$.

**Q. E. D.**

Aus der Gültigkeit der Aussage A(n) für alle $n \in \mathbf{N}_+$ folgt nun sofort $L(G) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}_+}(\{b^{m(n-1)}c^{3(n-1)}, b^{mn}Sc^{3n}\} \cap \{b,c\}^*) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}}\{b^{mn}c^{3n}\} = L$.

b) **Beweis** *indirekt.*

Angenommen, L ist regulär.

Sei n die Konstante aus dem Pumping Lemma und $z = b^{mn}c^{3n}$; dann ist z aus L und $|z| = n(m+3) > n$. Nach dem Korollar zum Pumping Lemma kann man also $z = uvw$ mit $u,v,w \in \{b,c\}^*$, $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, schreiben, sodaß $uv^iw$ für alle $i \in \mathbf{N}$ aus L ist.

Dann muß aber $uv \in \{b\}^*$ und somit auch - wegen $|v| \geq 1$ - $v \in \{b\}^+$ gelten und $uv^2w = b^{mn+|v|}c^{3n}$ aus L sein. Wegen $1 \leq |v| \leq n$ gilt jedoch $mn + 1 \leq mn + |v| \leq (m+1)n$ und somit $mn + |v| \neq mn$. Da $b^{mn}c^{3n}$ das einzige Wort in L der Gestalt $b^pc^{3n}$ für ein $p \in \mathbf{N}_+$ ist, kann daher $uv^2w$ nicht aus L sein.

**Widerspruch!** L ist deshalb keine reguläre formale Sprache.

**Q. E. D.**

**BEISPIEL 3.**

$M' = (Q',\{0,1,2\},\delta',[q_0],F')$ mit

| $\delta'$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $[q_0]$ | $[q_0,q_2]$ | $[q_1,q_3]$ | $[q_1,q_3]$ |
| $[q_0,q_2]$ | $[q_0,q_2]$ | $[q_0,q_1,q_3]$ | $[q_0,q_1,q_3]$ |
| $[q_1,q_3]$ | $[q_0]$ | $[q_0,q_1,q_3]$ | $[q_1,q_3]$ |
| $[q_0,q_1,q_3]$ | $[q_0,q_2]$ | $[q_0,q_1,q_3]$ | $[q_1,q_3]$ |

$Q' = \{[q_0],[q_0,q_2],[q_1,q_3],[q_0,q_1,q_3]\}$

$F' = \{[q_0,q_2],[q_1,q_3],[q_0,q_1,q_3]\}$

(A) 17,-

# AUTOMATEN UND FORMALE SPRACHEN

**1. ÜBUNGSTEST am 2. Dezember 1991**

| Kennzahl/Matrikelnummer | Familienname | Vorname |
|---|---|---|
| | | |

1) Definieren Sie eine monotone Grammatik $G = (\{S\},\{0,1,2\},P,S)$ mit $L(G) = \{w \in \{0,1,2\}^+ \mid \nu(w,0) = 2\nu(w,1) = \nu(w,2)\}$ und erläutern Sie die Arbeitsweise Ihrer Grammatik.

( 30 Punkte )

2) Sei $L = \{0^{7n}a^3 1^{5n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

a) Definieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (\{S\},\{0,1,a\},P,S)$ mit $L(G) = L$ und beweisen Sie dies mittels Induktion über den Mengen $SF(G,n)$ der in G in n Schritten ableitbaren Satzformen.

( 25 Punkte )

b) Beweisen Sie mit Hilfe des Korollars zum Pumping Lemma, daß L nicht regulär ist.

( 25 Punkte )

3) Sei ein nichtdeterministischer endlicher Automat $M = (\{q_0,q_1,q_2\},\{a,b\},\delta,q_0,\{q_2\})$ durch die folgende Tabelle für $\delta$ gegeben:

| $\delta$ | a | b |
|---|---|---|
| $q_0$ | $\{q_0\}$ | $\{q_0,q_1\}$ |
| $q_1$ | $\{q_1,q_2\}$ | $\{\}$ |
| $q_2$ | $\{q_0\}$ | $\{q_0\}$ |

Konstruieren Sie einen minimalen deterministischen Automaten $M'$ mit $L(M') = L(M)$.

( 20 Punkte )

# AUTOMATEN UND FORMALE SPRACHEN

**Lösungen zum 1. ÜBUNGSTEST am 2. Dezember 1991**

**BEISPIEL 1.**

$L = \{w \in \{0,1,2\}^+ \mid \nu(w,0) = 2\nu(w,1) = \nu(w,2)\}$.

L wird von der monotonen Grammatik $G = (\{S\},\{0,1,2\},P,S)$ mit $P = \{(S,00122),(S,00122S)\} \cup \{(xy,yx) \mid x,y \in \{0,1,2\}\}$ erzeugt.

Wie man sofort sieht, gilt nämlich

a) $S \vdash^n_G (00122)^n S \vdash_G (00122)^{n+1}$ für alle $n \geq 0$ ( Beweis durch Induktion! );

b) $(00122)^{n+1} \vdash^*_G w$ für jedes $w \in L$ mit Hilfe der Vertauschungsregeln aus $\{(xy,yx) \mid x,y \in \{0,1,2\}\}$;

c) ist $v \in \{S,0,1,2\}^*$ eine in G ableitbare Satzform, d.h. $S \vdash^*_G v$, so gilt $\nu(v,0) = 2\nu(v,1) = \nu(v,2)$ ( Beweis durch Induktion! ).

Aus a) und b) folgt aber sofort $L(G) \supseteq L$, aus c) hingegen $L(G) \subseteq L$, d.h. insgesamt also $L(G) = L$.

**BEISPIEL 2.**

$L = \{0^{7n}a^3 1^{5n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

a) $G = (\{S\},\{0,1,a\},\{S \to 0^{7n}S1^{5n} \mid a^3\},S)$.

Man kann nun für $n \in \mathbb{N}_+$ alle Ableitungen der Länge n betrachten und die folgende Behauptung A(n) zeigen:

$A(n)$: $S \vdash^n_G w \Leftrightarrow w \in \{0^{7(n-1)}a^3 1^{5(n-1)}, 0^{7n}S1^{5n}\}$,

i.e. $SF(G,n) = \{0^{7(n-1)}a^3 1^{5(n-1)}, 0^{7n}S1^{5n}\}$.

**Beweis** *mittels Induktion nach $n \in \mathbb{N}_+$.*

***Induktionsbasis A(1):*** $S \vdash_G a^3$ bzw. $S \vdash_G 0^7S1^5$ sind die einzigen direkten Ableitungen in G aus dem Startsymbol S.

***Sei nun n > 1:***

***Induktionshypothese (IH):*** Die Aussage A(m) gilt für alle m mit $1 \leq m < n$.

***Induktionsbehauptung:*** Es gilt auch A(n).

$S \vdash^n_G w \Leftrightarrow S \vdash^{n-1}_G v \vdash_G w$ für ein $v \in \{0,1,a,S\}^* \Leftrightarrow$ ( (IH) für $m = n-1$ )

$S \vdash^{n-1}_G v \vdash_G w$ für ein $v \in \{0^{7(n-2)}a^3 1^{5(n-2)}, 0^{7(n-1)}S1^{5(n-1)}\}$.

Da in einer kontextfreien Grammatik aus einem Terminalwort wie $0^{7(n-2)}a^3 1^{5(n-2)}$ nichts mehr weiter abgeleitet werden kann, ist dies

| Automaten und Formale Sprachen - Übungen WS 1989/90<br>1. Nachtragstest am 13. März 1990 | | |
|---|---|---|
| Familienname: | Vorname: | Matrikelnummer: |

4) Definieren Sie einen Pushdown-Automaten $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{r, s\}, \{Z_0, s\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$, der die Sprache $L = \{ r^n s^{(k+10)n} \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$ durch Endzustand mit leerem Stack akzeptiert, wobei k die letzte Ziffer Ihrer Matrikelnummer ist. ( Beachten Sie die vorgegebenen Zustände bzw. das vorgegebene Stackalphabet des Pushdown-Automaten M ! )

( 10 Punkte )

5) Sei $h: \{r, s\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ der Homomorphismus mit $h(r) = 01$ und $h(s) = 101$. Definieren Sie eine Turingmaschine $M = (Q, \{0, 1, r, s\}, \{0, 1, r, s, X, Y, B, \$\}, \delta, q_0, \{B, \$\}, \{q_f\})$, welche die Sprache $L = \{ w h(w) \mid w \in \{r, s\}^+ \}$ akzeptiert, und erläutern Sie die Arbeitsweise Ihrer Maschine; M soll dabei - ausgehend von einer Startkonfiguration $\$ q_0 z$ für ein $z \in \{0, 1, r, s\}^*$ - genau dann mit der Endkonfiguration $\$ q_f$ im Endzustand $q_f$ halten, wenn $z \in L$ gilt.

( 15 Punkte )

6) Sei $m \geq 1$ eine natürliche Zahl und
$L(m) = \{ w \in \{a, b, c\}^* \mid \nu(w, a) = \nu(w, b) = m\,\nu(w, c) \}$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen, daß $L(m)$ keine kontextfreie Sprache sein kann!

( 13 Punkte )

b) Geben Sie eine monotone Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, P, S)$ an, die $L(m)$ erzeugt, und begründen Sie, warum $L(G) = L(m)$ gilt!
( Beachten Sie, daß $\varepsilon$ aus $L(m)$ ist und S die einzige Variable in G ist! )

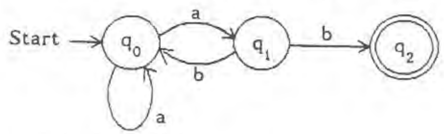
( 12 Punkte )


| Automaten und Formale Sprachen - Übungen WS 1989/90<br>1. Nachtragstest am 13. März 1990 | | |
|---|---|---|
| Familienname: | Vorname: | Matrikelnummer: |


1) Definieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten, der die Sprache $L = \{ w \in \{1, 2\}\{0, 1, 2\}^* \mid \mu_3(w) \equiv 0 \pmod{m} \}$ akzeptiert, wobei m Ihre Matrikelnummer ist ( Falle *nicht* weglassen ! )!
( Dabei bedeutet $\mu_3$ jene Abbildung, die ein Wort $w \in \{1,2\}\{0,1,2\}^*$ als Zahl zur Basis 3 interpretiert und den entsprechenden Zahlenwert zuordnet, d.h. für $w = a_1 \dots a_n$ mit $a_i \in \{0, 1, 2\}$, $1 \leq i \leq n$, $a_1 \neq 0$, ist $\mu_3(w) = \sum_{i=1}^{n} a_i 3^{n-i}$. )

( 10 Punkte )

2) Gegeben sei der folgende nondeterministische endliche Automat M:




a) Definieren Sie nur unter Verwendung von Konkatenation und " * " einen regulären Ausdruck für $L(M)$ ( $L(\alpha) = \{a\}$, $L(\beta) = \{b\}$ ) !

( 6 Punkte )

b) Definieren Sie eine reguläre Grammatik $G = (\{S, B\}, \{a, b\}, P, S)$ mit $L(G) = L(M)$ ! ( Beachten Sie die vorgegebenen Variablen ! )

( 6 Punkte )

c) Definieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten $M'$ mit $L(M') = L(M)$ ( Fallen und unnötige Zustände weglassen ! )!

( 6 Punkte )

3) Gegeben sei die kontextfreie Sprache $L = \{ r^{5n} s^{7n} \mid n \in \mathbb{N} \}$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, daß L nicht regulär ist!

( 10 Punkte )

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (\{S\}, \{r, s\}, P, S)$ an, für die $L(G) = L$ gilt, und beweisen Sie dies mittels Induktion nach der Länge der Ableitung in G.

( 12 Punkte )

# Lösungen zum 1. Nachtragstest Automaten und Formale Sprachen am 13. März 1990

1) Definieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten, der die Sprache $L = \{ w \in \{1,2\}\{0,1,2\}^* \mid \mu_3(w) \equiv 0 \ (\text{mod } m) \}$ akzeptiert, wobei m Ihre Matrikelnummer ist ( Falle *nicht* weglassen ! )!

( Dabei bedeutet $\mu_3$ jene Abbildung, die ein Wort $w \in \{1,2\}\{0,1,2\}^*$ als Zahl zur Basis 3 interpretiert und den entsprechenden Zahlenwert zuordnet, d.h. für $w = a_1 \dots a_n$ mit $a_i \in \{0,1,2\}$, $1 \le i \le n$, $a_1 \ne 0$, ist $\mu_3(w) = \sum_{i=1}^{n} a_i 3^{n-i}$. )

Lösung:

Sei Z jene Abbildung, die jedem $j \in \mathbf{N}_0$ eindeutig den entsprechenden Zustand $[i]$, $i \in \{0,1,\dots,m-1\}$, zuordnet, sodaß $i \equiv j \ (\text{mod } m)$. Die Übergangsfunktion $\delta$ eines deterministischen endlichen Automaten

$M = (\{q_0, q_F\} \cup \{[i] \mid i \in \{0,1,\dots,m-1\}\}, \{0,1,2\}, \delta, q_0, \{Z(0)\})$

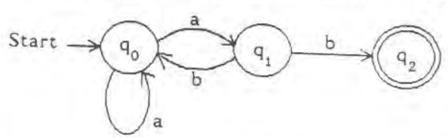
mit $L(M) = L$ kann dann folgendermaßen definiert werden:

$\delta(q_0,0) = q_F$, $\delta(q_F,i) = q_F$, $i \in \{0,1,2\}$ ( $q_F$ = Falle );

$\delta(q_0,1) = Z(1)$; $\delta(q_0,2) = Z(2)$;

$\delta([i],j) = Z(3i+j)$ für alle $i \in \{0,1,\dots,m-1\}$ und alle $j \in \{0,1,2\}$.

2) Gegeben sei der folgende nondeterministische endliche Automat M:




a) Definieren Sie nur unter Verwendung von Konkatenation und "+" einen regulären Ausdruck für L(M) ( $L(\alpha) = \{a\}$, $L(\beta) = \{b\}$ ) !

b) Definieren Sie eine reguläre Grammatik $G = (\{S,B\},\{a,b\},P,S)$ mit $L(G) = L(M)$! ( Beachten Sie die vorgegebenen Variablen ! )

c) Definieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten M' mit $L(M') = L(M)$ ( Fallen und unnötige Zustände weglassen ! )!





Lösung:

| $\delta$ | a | b |
|---|---|---|
| $q_0$ | $\{q_0,q_1\}$ | $\emptyset$ |
| $q_1$ | $\emptyset$ | $\{q_0,q_2\}$ |
| $q_2$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |

Regulärer Ausdruck:

$(\alpha^* \alpha \beta)^* \alpha^* \alpha \beta = (\alpha^* \alpha \beta)^+ = (\alpha^+ \beta)^+$

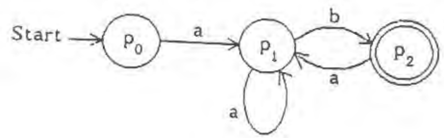
**Reguläre Grammatik:**

$P = \{ S \to aS, S \to aB, B \to bS, B \to b \}$

| $\delta'$ | a | b |
|---|---|---|
| $[q_0]$ | $[q_0,q_1]$ | $[\emptyset]$ |
| $[q_0,q_1]$ | $[q_0,q_1]$ | $[q_0,q_2]$ |
| $[q_0,q_2]$ | $[q_0,q_1]$ | $[\emptyset]$ |

| $\delta''$ | a | b |
|---|---|---|
| $p_0$ | $p_1$ | $p_3$ |
| $p_1$ | $p_1$ | $p_2$ |
| $p_2$ | $p_1$ | $p_3$ |

$[q_0]$ $[q_0,q_1]$ $[q_0,q_2]$




( $p_3$, $[\emptyset]$: *Falle* )

3) Gegeben sei die kontextfreie Sprache $L = \{ r^{5n} s^{7n} \mid n \in \mathbf{N} \}$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, daß L nicht regulär ist!

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (\{S\},\{r,s\},P,S)$ an, für die $L(G) = L$ gilt, und beweisen Sie dies mittels Induktion nach der Länge der Ableitung in G.

Lösung:

a) **Beweis indirekt:**

Angenommen, $L = \{ r^{5n} s^{7n} \mid n \in \mathbf{N} \}$ ist regulär.

Sei n die Konstante aus dem Pumping Lemma und $z = r^{5n} s^{7n}$; dann ist z aus L und $|z| = 12n > n$. Nach dem Pumping Lemma kann man also $z = uvw$ mit $u,v,w \in \{r,s\}^*$, $|uv| \le n$, $|v| \ge 1$, schreiben, sodaß $uv^iw$ für alle $i \in \mathbf{N}_0$ aus L ist.

Dann muß aber $uv \in \{r\}^*$ und somit auch – wegen $|v| \geq 1$ – $v \in \{r\}^*$ gelten und $uv^2w = r^{5n+|v|}s^{7n}$ aus L sein. Wegen $1 \leq |v| \leq n$ gilt jedoch $1 \leq 5n+1 \leq 5n+|v| \leq 5n+n$, i.e. $5n+|v| \neq 5n$. Da $r^{5n}s^{7n}$ das einzige Wort in L der Gestalt $r^m s^{7n}$ für ein $m \in \mathbb{N}$ ist, kann daher $uv^2w$ nicht aus L sein.

**Widerspruch!**

$L = \{ r^{5n}s^{7n} \mid n \in \mathbb{N} \}$ ist deshalb keine reguläre formale Sprache.

Q. E. D.

b) $G = (\{S\}, \{r,s\}, \{S \rightarrow r^5Ss^7 \mid r^5s^7\}, S)$.

Man kann nun für $n \in \mathbb{N}$ alle Ableitungen der Länge n betrachten und die folgende Behauptung A(n) zeigen:

A(n): $S \vdash_G^n w \iff w \in \{r^{5n}s^{7n}, r^{5n}Ss^{7n}\}$.

<u>**Beweis**</u> **mittels Induktion nach** $n \in \mathbb{N}$**:**

***Induktionsbasis A(1):*** $S \vdash_G r^{5n}s^{7n}$ bzw. $S \vdash_G r^{5n}Ss^{7n}$ mit $n = 1$ sind die einzigen direkten Ableitungen in G aus dem Startsymbol S.

***Sei nun n > 1:***

***Induktionshypothese (IH):*** Die Aussage A(m) gilt für alle m mit $1 \leq m < n$.

***Induktionsbehauptung:*** Es gilt auch A(n).

$S \vdash_G^n w \iff S \vdash_G^{n-1} v \vdash_G w$ für ein $v \in \{r,s,S\}^* \iff$ ( (IH) für $m = n-1$ )

$S \vdash_G^{n-1} v \vdash_G w$ für ein $v \in \{r^{5(n-1)}s^{7(n-1)}, r^{5(n-1)}Ss^{7(n-1)}\}$.

Da in einer kontextfreien Grammatik aus einem Terminalwort wie $r^{5(n-1)}s^{7(n-1)}$ nichts mehr weiter abgeleitet werden kann, ist dies aufgrund der Produktionen von G äquivalent mit

$S \vdash_G^{n-1} r^{5(n-1)}Ss^{7(n-1)} \vdash_G w \iff w \in \{r^{5n}s^{7n}, r^{5n}Ss^{7n}\}$.

Q. E. D.

Aus der Gültigkeit der Aussage A(n) für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt nun sofort

$L(G) = \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{r^{5n}s^{7n}, r^{5n}Ss^{7n}\} \right) \cap \{r,s\}^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{r^{5n}s^{7n}\} = L$.





4) Definieren Sie einen Pushdown-Automaten $M = (\{q_0,q_1,q_2\}, \{r,s\}, \{Z_0,s\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$, der die Sprache $L = \{ r^n s^{(k+10)n} \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$ durch Endzustand mit leerem Stack akzeptiert, wobei k die letzte Ziffer Ihrer Matrikelnummer ist. ( Beachten Sie die vorgegebenen Zustände bzw. das vorgegebene Stack-alphabet des Pushdown-Automaten M ! )

<u>Lösung:</u>

Der Pushdown-Automat $M = (Q, \{r,s\}, \{Z_0,s\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$ mit der durch

$\delta(q_0,r,Z_0) = \{(q_0, s^{(k+10)}Z_0)\}$, $\delta(q_0,\varepsilon,Z_0) = \{(q_2,\varepsilon)\}$,

$\delta(q_0,r,s) = \{(q_0, s^{(k+10)}s)\}$, $\delta(q_0,s,s) = \{(q_1,\varepsilon)\}$,

$\delta(q_1,s,s) = \{(q_1,\varepsilon)\}$ und $\delta(q_1,\varepsilon,Z_0) = \{(q_2,\varepsilon)\}$

definierten Übergangsfunktion $\delta$ akzeptiert L **durch Endzustand** $q_2$ ( mit leerem Stack ).

M erzeugt dabei für jedes Symbol r am Anfang des Eingabewortes $(k+10)$ Symbole s im Stack, welche bei der Analyse des nur aus Symbolen s bestehenden zweiten Teils des Eingabewortes wieder gelöscht werden.

Die Übergangsfunktion $\delta$ des Pushdown-Automaten M kann auch durch die folgende Tabelle dargestellt werden:

| $\delta$ | | r | s | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | $Z_0$ | $(q_0, s^{(k+10)}Z_0)$ | | $(q_2,\varepsilon)$ |
| | s | $(q_0, s^{(k+10)}s)$ | $(q_1,\varepsilon)$ | |
| $q_1$ | $Z_0$ | | | $(q_2,\varepsilon)$ |
| | s | | $(q_1,\varepsilon)$ | |
| $q_2$ | $Z_0$ | | | |
| | s | | | |

# Lösungen zum 2. Nachtragstest Automaten und Formale Sprachen am 29. Mai 1990

1) Definieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten, der die Sprache $L = \{ w \in \{1,2,\dots,m-1\}\{0,1,2,\dots,m-1\}^* \mid \mu_m(w) \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 113) \}$ akzeptiert, wobei m Ihre Matrikelnummer ist ( Falle *nicht* weglassen !) !
( Dabei bedeutet $\mu_m$ jene Abbildung, die ein Wort $w \in \{1,2,\dots,m-1\}\{0,1,2,\dots,m-1\}^*$ als Zahl zur Basis m interpretiert und den entsprechenden Zahlenwert zuordnet, d.h. für $w = a_1 \dots a_n$ mit $a_i \in \{0,1,2,\dots,m-1\}$, $1 \le i \le n$, $a_1 \neq 0$, ist $\mu_m(w) = \sum_{i=1}^{n} a_i m^{n-i}$. )

Lösung:

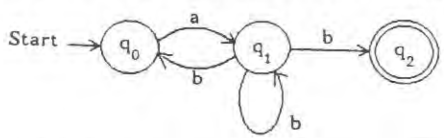
**Sei Z jene Abbildung, die jedem $j \in \mathbb{N}_0$ eindeutig den entsprechenden Zustand $[i]$, $i \in \{0,1,\dots,112\}$, zuordnet, sodaß $i \equiv j \ (\mathrm{mod}\ 113)$. Die Übergangsfunktion δ eines deterministischen endlichen Automaten**
$M = (\{q_0, q_F\} \cup \{[i] \mid i \in \{0,1,\dots,112\}\}, \{0,1,\dots,m-1\}, \delta, q_0, \{Z(1)\})$
mit $L(M) = L$ kann dann folgendermaßen definiert werden:

$\delta(q_0, 0) = q_F$, $\delta(q_F, j) = q_F$, $j \in \{0,1,\dots,m-1\}$ ( $q_F$ = Falle );

$\delta(q_0, j) = Z(j)$, $j \in \{1,\dots,m-1\}$;

$\delta([i], j) = Z(mi + j)$ für alle $i \in \{0,1,\dots,112\}$ und alle $j \in \{0,1,\dots,m-1\}$.

2) Gegeben sei der folgende nondeterministische endliche Automat M:




a) Definieren Sie nur unter Verwendung von Konkatenation und " + " einen regulären Ausdruck für L(M) ( $L(\alpha) = \{a\}$, $L(\beta) = \{b\}$ ) !

b) Definieren Sie eine reguläre Grammatik $G = (\{S,B\}, \{a,b\}, P, S)$ mit $L(G) = L(M)$ ! ( Beachten Sie die vorgegebenen Variablen ! )

c) Definieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten M' mit $L(M') = L(M)$ ( Fallen und unnötige Zustände weglassen ! )!



29.5



Lösung:

| δ | a | b |
|---|---|---|
| $q_0$ | $q_1$ | ∅ |
| $q_1$ | ∅ | $\{q_0,q_1,q_2\}$ |
| $q_2$ | ∅ | ∅ |

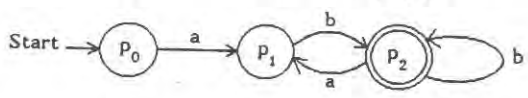
Regulärer Ausdruck:
$(\alpha\beta\beta^*)^* \alpha\beta\beta^* = (\alpha\beta\beta^*)^+ = (\alpha\beta^+)^+$

Reguläre Grammatik:
$P = \{S \to aB, B \to bS, B \to bB, B \to b\}$

| δ' | a | b |
|---|---|---|
| $[q_0]$ | $[q_1]$ | $[∅]$ |
| $[q_1]$ | $[∅]$ | $[q_0,q_1,q_2]$ |
| $[q_0,q_1,q_2]$ | $[q_1]$ | $[q_0,q_1,q_2]$ |

| δ'' | a | b |
|---|---|---|
| $p_0$ | $p_1$ | $p_3$ |
| $p_1$ | $p_3$ | $p_2$ |
| $p_2$ | $p_1$ | $p_2$ |

$[q_0]$ $[q_1]$ $[q_0,q_1,q_2]$ ( $p_3$ , $[∅]$: *Falle* )




3) Gegeben sei die kontextfreie Sprache $L = \left\{ s^{23n} r^{59n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, daß L nicht regulär ist !

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (\{S\}, \{r,s\}, P, S)$ an, für die $L(G) = L$ gilt, und beweisen Sie dies mittels Induktion nach der Länge der Ableitung in G.

Lösung:

a) Beweis indirekt:

Angenommen, $L = \left\{ s^{23n} r^{59n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ ist regulär.

Sei n die Konstante aus dem Pumping Lemma und $z := s^{23n} r^{59n}$; dann ist z aus L und $|z| = 82n > n$. Nach dem Pumping Lemma kann man also $z = uvw$ mit $u,v,w \in \{r,s\}^*$, $|uv| \le n$, $|v| \ge 1$, schreiben, sodaß $uv^iw$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ aus L ist.

Dann muß aber $uv \in \{s\}^*$ und somit auch - wegen $|v| \geq 1$ - $v \in \{s\}^+$ gelten und $uv^2w = s^{23n+|v|}r^{59n}$ aus L sein. Wegen $1 \leq |v| \leq n$ gilt jedoch $1 \leq 23n+1 \leq 23n+|v| \leq 23n+n$, i.e. $23n+|v| \neq 23n$. Da $s^{23n}r^{59n}$ das einzige Wort in L der Gestalt $s^m r^{59n}$ für ein $m \in \mathbb{N}$ ist, kann daher $uv^2w$ nicht aus L sein.

**Widerspruch!**

$L = \{ s^{23n}r^{59n} \mid n \in \mathbb{N} \}$ ist deshalb keine reguläre formale Sprache.

Q. E. D.

b) $G = (\{S\}, \{r,s\}, \{S \to s^{23}Sr^{59} \mid s^{23}r^{59}\}, S)$.

Man kann nun für $n \in \mathbb{N}$ alle Ableitungen der Länge n betrachten und die folgende Behauptung A(n) zeigen:

$A(n)$: $S \vdash_G^n w \iff w \in \{s^{23n}r^{59n}, s^{23n}Sr^{59n}\}$.

**<u>Beweis</u> mittels Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:**

***Induktionsbasis A(1):*** $S \vdash_G s^{23n}r^{59n}$ bzw. $S \vdash_G s^{23n}Sr^{59n}$ mit $n = 1$ **sind die einzigen direkten Ableitungen in G aus dem Startsymbol S.**

***Sei nun n > 1:***

***Induktionshypothese (IH):*** Die Aussage A(m) gilt für alle m mit $1 \leq m < n$.
***Induktionsbehauptung:*** Es gilt auch A(n).

$S \vdash_G^n w \iff S \vdash_G^{n-1} v \vdash_G w$ für ein $v \in \{r,s,S\}^* \iff$ ( (IH) für $m = n-1$ )

$S \vdash_G^{n-1} v \vdash_G w$ für ein $v \in \{s^{23(n-1)}r^{59(n-1)}, s^{23(n-1)}Sr^{59(n-1)}\}$.

Da in einer kontextfreien Grammatik aus einem Terminalwort wie $s^{23(n-1)}r^{59(n-1)}$ nichts mehr weiter abgeleitet werden kann, ist dies aufgrund der Produktionen von G äquivalent mit

$S \vdash_G^{n-1} s^{23(n-1)}Sr^{59(n-1)} \vdash_G w \iff w \in \{s^{23n}r^{59n}, s^{23n}Sr^{59n}\}$.

Q. E. D.

Aus der Gültigkeit der Aussage A(n) für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt nun sofort

$$L(G) = \Big( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{s^{23n}r^{59n}, s^{23n}Sr^{59n}\} \Big) \cap \{r,s\}^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{s^{23n}r^{59n}\} = L.$$





4) Definieren Sie einen Pushdown-Automaten $M = (\{q_0,q_1,q_2\}, \{2,3\}, \{Z_0,3\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$, der die Sprache $L = \{ 2^n 3^m \mid 0 \leq n \leq m \leq kn \}$ durch Endzustand mit leerem Stack akzeptiert, wobei k die letzte Ziffer Ihrer Matrikelnummer ist. ( Beachten Sie die vorgegebenen Zustände bzw. das vorgegebene Stack-alphabet des Pushdown-Automaten M ! )

**<u>Lösung:</u>**

Der Pushdown-Automat $M = (Q, \{2,3\}, \{Z_0,3\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$ mit der durch

$\delta(q_0,2,Z_0) = \{(q_0, 3^m Z_0) \mid 1 \leq m \leq k\}$, $\delta(q_0,\varepsilon,Z_0) = \{(q_2,\varepsilon)\}$,

$\delta(q_0,2,3) = \{(q_0, 3^m 3) \mid 1 \leq m \leq k\}$, $\delta(q_0,3,3) = \{(q_1,\varepsilon)\}$,

$\delta(q_1,3,3) = \{(q_1,\varepsilon)\}$ und $\delta(q_1,\varepsilon,Z_0) = \{(q_2,\varepsilon)\}$

definierten Übergangsfunktion $\delta$ akzeptiert L **durch Endzustand $q_2$** ( mit leerem Stack ).

M erzeugt dabei **für jedes Symbol 2 am Anfang** des Eingabewortes **nondeterministisch m Symbole 3 - mit $1 \leq m \leq k$ -** im Stack, welche bei der Analyse des **nur aus Symbolen 3** bestehenden zweiten Teils des **Eingabewortes wieder gelöscht werden.**

5) Sei $h: \{0,1\}^* \to \{r,s\}^*$ der Homomorphismus mit $h(0) = r$ und $h(1) = srr$. **Definieren Sie eine Turingmaschine** $M = (Q, \{0,1,r,s\}, \{0,1,r,s,X,Y,B,\$\}, \delta, q_0, \{B,\$\}, \{q_f\})$, welche die Sprache $L = \{w\,h(w) \mid w \in \{0,1\}^+\}$ akzeptiert, und erläutern Sie die Arbeitsweise Ihrer Maschine; M soll dabei - ausgehend von einer Startkonfiguration $\$ q_0 z$ für ein $z \in \{0,1,r,s\}^*$ - genau dann mit der Endkonfiguration $\$ q_f$ im Endzustand $q_f$ halten, wenn $z \in L$ gilt.

**<u>Lösung:</u>**

Die Übergangsfunktion $\delta$ von M kann folgendermaßen definiert werden:

$\delta(q_0,\alpha) = (q_0,\alpha,R)$, $\alpha \in \{0,1\}$; $\delta(q_0,\beta) = (q_1,\beta,R)$, $\beta \in \{r,s\}$;

$\delta(q_1,\beta) = (q_1,\beta,R)$, $\beta \in \{r,s\}$; $\delta(q_1,B) = (q_2,B,L)$;

$\delta(q_2,\gamma) = (q_2,\gamma,L)$, $\gamma \in \{0,1,r,s\}$; $\delta(q_2,\$) = (q_3,\$,R)$.

M geht also zuerst über das Eingabewort z hinweg nach rechts und überprüft dabei, ob z von der Gestalt $uv$ mit $u \in \{0,1\}^*$ und $v \in \{r,s\}^*$ ( jedes Wort aus L ist ja von dieser Gestalt ! ) ist, und geht dann wieder nach links bis zum Anfang von z, um dieses Wort dann iterativ folgendermaßen zu analysieren:

23.5



$\delta(q_3,\alpha) = (p_\alpha, X, R)$, $\alpha \in \{0,1\}$;

M ersetzt also das erste noch nicht analysierte Zeichen $\alpha \in \{0,1\}$ von w durch das Symbol X und merkt sich jedoch dieses Symbol $\alpha$ im Zustand $p_\alpha$. Dann geht M über den Rest von w und den bereits analysierten und durch Symbole Y ersetzten Teil von h(w) nach rechts zu den entsprechenden Symbolen von $h(\alpha)$; diese werden nacheinander durch Y ersetzt:

$\delta(p_\alpha,\beta) = (p_\alpha,\beta,R)$, $\alpha \in \{0,1\}, \beta \in \{0,1,Y\}$;

$\delta(p_0,r) = (q_L,Y,L)$ , $\delta(p_1,s) = (p_r,Y,R)$, $\delta(p_r,r) = (p_0,Y,R)$;

Danach geht M wieder nach links, um mit dem nächsten noch nicht analysierten Zeichen aus $\{0,1\}$ fortzusetzen:

$\delta(q_L,\beta) = (q_L,\beta,L)$, $\beta \in \{0,1,Y\}$; $\delta(q_L,X) = (q_3,X,R)$.

Ist kein Zeichen aus $\{0,1\}$ mehr vorhanden, so überprüft M, ob auch alle Zeichen aus $\{r,s\}$ bereits erfaßt wurden:

$\delta(q_3,Y) = (q_R,Y,R)$; $\delta(q_R,Y) = (q_R,Y,R)$; $\delta(q_R,B) = (q_Z,B,L)$.

Danach löscht M das Band mittels

$\delta(q_Z,\gamma) = (q_Z,B,L)$, $\gamma \in \{X,Y\}$; $\delta(q_Z,\$) = (q_f,\$,R)$,

um schließlich im Endzustand $q_f$ mit der **Endkonfiguration $\$q_f$ zu halten.**

**Ist das Eingabewort z hingegen nicht von der Gestalt wh(w) für ein $w \in \{0,1\}^+$, so muß M in einem Zustand ungleich $q_f$ halten.** M hält also auf jedem Eingabewort $z \in \{0,1,r,s\}^*$ und genau dann im Endzustand $q_f$, wenn $z \in L$; daher gilt auch $L(M) = \{wh(w) \mid w \in \{0,1\}^+\}$.

Als Zustandsmenge erhält man daraus

$Q = \{q_i \mid 0 \le i \le 3\} \cup \{q_L, q_R, q_Z, q_f\} \cup \{p_0, p_1, p_r\}$.

6) Sei $L = \{ w \in \{a,b,c\}^* \mid \nu(w,a) = 2\nu(w,b) = 3\nu(w,c) \}$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen, daß L keine kontextfreie Sprache sein kann!

b) Geben Sie eine monotone Grammatik $G = (\{S\},\{a,b,c\},P,S)$ an, die L erzeugt, und begründen Sie, warum $L(G) = L$ gilt! ( Beachten Sie, daß $\varepsilon$ aus L ist und S die einzige Variable in G ist! )





Lösung:

a) Beweis **indirekt:**

Angenommen, L ist kontextfrei. Sei n die Konstante aus dem Pumping Lemma und $z = a^{6n}b^{3n}c^{2n}$. Wegen $z \in L$ und $|z| = 11n > n$ müssen nach dem Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen u,v,w,x,y existieren, sodaß $z = uxvyw$, $|xy| \ge 1$, $|xvy| \le n$ und $z_i = ux^ivy^iw \in L$ für alle $i \in N_0$.

**Fall:** $\nu(xvy,a) > 0 \Rightarrow \nu(xvy,c) = 0 \Rightarrow$ Für $z_2$ erhält man folgendes:

$\nu(z_2,c) = 2n$, aber wegen $|xy| \ge 1$ gilt entweder $\nu(z_2,a) > 6n$ oder $\nu(z_2,b) > 3n$, d.h. $z_2$ kann nicht aus L sein, da die Bedingung $\nu(z_2,a) = 2\nu(z_2,b) = 3\nu(z_2,c)$ nicht erfüllt ist.

**Fall:** $\nu(xvy,c) > 0 \Rightarrow \nu(xvy,a) = 0 \Rightarrow$ Für $z_2$ erhält man folgendes:

$\nu(z_2,a) = 6n$, aber wegen $|xy| \ge 1$ gilt entweder $\nu(z_2,b) > 3n$ oder $\nu(z_2,c) > 2n$, d.h. $z_2$ kann nicht aus L sein, da die Bedingung $\nu(z_2,a) = 2\nu(z_2,b) = 3\nu(z_2,c)$ nicht erfüllt ist.

**Man erhält also in jedem Falle einen Widerspruch!**

$L = \{ w \in \{a,b,c\}^* \mid \nu(w,a) = 2\nu(w,b) = 3\nu(w,c) \}$ kann daher nicht kontextfrei sein.

Q.E.D.

b) L wird von der monotonen Grammatik $G = (\{S\},\{a,b,c\},P,S)$ mit $P = \{(S,\varepsilon),(S,a^6b^3c^2),(c,a^6b^3c^2c)\} \cup \{(xy,yx) \mid x,y \in \{a,b,c\}\}$ erzeugt. Wie man sofort sieht, gilt nämlich

$\alpha$) $S \vdash_G \varepsilon$ sowie

$S \vdash_G^n (a^6b^3)^n c^{2n}$ für alle $n \ge 1$ ( Beweis durch Induktion möglich! );

$\beta$) $(a^6b^3)^n c^{2n} \vdash_G^* w$ für jedes $w \in L$ mit Hilfe der Vertauschungsregeln aus $\{(xy,yx) \mid x,y \in \{a,b,c\}\}$;

$\gamma$) ist $v \in \{S,a,b,c\}^*$ eine in G ableitbare Satzform, d.h. $S \vdash_G^* v$, so gilt aufgrund der Gestalt der Produktionen in P ( Beweis durch Induktion!): $\nu(v,a) = 6n$, $\nu(v,b) = 3n$ und $\nu(v,c) = 2n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Aus $\alpha$) und $\beta$) folgt aber sofort $L(G) \supseteq L$, aus $\gamma$) hingegen $L(G) \subseteq L$, d.h. insgesamt also $L(G) = L$.

Q.E.D.

| **Automaten und Formale Sprachen - Übungen WS 1989/90**<br>**2. Test am 22. Jänner 1990** | | |
|---|---|---|
| Familienname: | Vorname: | Matrikelnummer: |

1) Definieren Sie einen Pushdown-Automaten $M = (Q, \{0,1\}, \{Z_0, 1\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\})$, der die Sprache $L = \{\, 0^n 1^{(99-m)n} \mid n \in \mathbf{N}_0 \,\}$ durch Endzustand mit leerem Stack akzeptiert, wobei m die letzte Ziffer Ihrer Matrikelnummer ist.

( 10 Punkte )

2) Sei $h: \{c,d\}^* \to \{0,1\}^*$ der Homomorphismus mit $h(c) = 0$ und $h(d) = 10$. Definieren Sie eine Turingmaschine $M = (Q, \{0,1,c,d\}, \{0,1,c,d,X,Y,B,\$\}, \delta, q_0, \{B,\$\}, \{q_f\})$, welche die Sprache $L = \{wh(w) \mid w \in \{c,d\}^+\}$ akzeptiert, und erläutern Sie die Arbeitsweise Ihrer Maschine; M soll dabei - ausgehend von einer Startkonfiguration $\$q_0z$ für ein $z \in \{c,d\}^*$ - genau dann mit der Endkonfiguration $\$q_f$ im Endzustand $q_f$ halten, wenn $z \in L$ gilt.

*Gruppe A:* $h(c) = 0$ und $h(d) = 10$.
*Gruppe B:* $h(c) = 1$ und $h(d) = 01$.
*Gruppe C:* $h(c) = 10$ und $h(d) = 0$.
*Gruppe D:* $h(c) = 01$ und $h(d) = 1$.

( 15 Punkte )

3) Seien k, l, m natürliche Zahlen und $L = \{\, w \in \{a,b,c\}^* \mid \nu(w,a) = kn \wedge \nu(w,b) = ln \wedge \nu(w,c) = mn$ für ein $n \in \mathbf{N}\,\}$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen, daß L keine kontextfreie Sprache sein kann!

( 13 Punkte )

b) Geben Sie eine monotone Grammatik $G = (\{S\}, \{a,b,c\}, P, S)$ an, die L erzeugt, und begründen Sie, warum $L(G) = L$ gilt.

( 12 Punkte )



b) L wird von der monotonen Grammatik $G = (\{S\}, \{a,b,c\}, P, S)$ mit $P = \{(S,\varepsilon), (S, a^m b^m c), (c, a^m b^m cc)\} \cup \{(xy, yx) \mid x, y \in \{a,b,c\}\}$ erzeugt.

Wie man sofort sieht, gilt nämlich

α) $S \vdash_G \varepsilon$ sowie
$S \overset{n}{\vdash_G} (a^m b^m)^n c^n$ für alle $n \geq 1$ ( Beweis durch Induktion möglich!);

β) $(a^m b^m)^n c^n \overset{*}{\vdash_G} w$ für jedes $w \in L$ mit Hilfe der Vertauschungsregeln aus $\{(xy, yx) \mid x, y \in \{a,b,c\}\}$;

γ) ist $v \in \{S,a,b,c\}^*$ eine in G ableitbare Satzform, d. h. $S \overset{*}{\vdash_G} v$, so gilt aufgrund der Gestalt der Produktionen in P ( Beweis durch Induktion!): $\nu(v,a) = mn$, $\nu(v,b) = mn$ und $\nu(v,c) = n$ für ein $n \in \mathbf{N}$.

Aus α) und β) folgt aber sofort $L(G) \supseteq L$, aus γ) hingegen $L(G) \subseteq L$, d. h. insgesamt also $L(G) = L$.

Q. E. D.

1. Nachtragstest

## Lösungen zum 2. Test Automaten und Formale Sprachen am 22. 1. 1990

1) Definieren Sie einen Pushdown-Automaten $M = (Q, \{0,1\}, \{Z_0, 1\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\})$, der die Sprache $L = \{ 0^n 1^{(99-m)n} \mid n \in \mathbf{N}_0 \}$ durch Endzustand mit leerem Stack akzeptiert, wobei m die letzte Ziffer Ihrer Matrikelnummer ist.

**Lösung:**

Der Pushdown-Automat $M = (Q, \{0,1\}, \{Z_0, 1\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\})$ mit der durch

$\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, 1^{(99-m)} Z_0)\}$, $\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_f, \varepsilon)\}$,
$\delta(q_0, 0, 1) = \{(q_0, 1^{(99-m)} 1)\}$, $\delta(q_0, 1, 1) = \{(q_1, \varepsilon)\}$,
$\delta(q_1, 1, 1) = \{(q_1, \varepsilon)\}$ und $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_f, \varepsilon)\}$

definierten Übergangsfunktion δ akzeptiert L **durch Endzustand $q_f$** ( mit leerem Stack ).
**M erzeugt dabei für jede Null am Anfang des Eingabewortes (99- m) Symbole 1 im Stack, welche bei der Analyse des nur aus Einsen bestehenden zweiten Teils des Eingabewortes wieder gelöscht werden.**

Die Übergangsfunktion δ des Pushdown-Automaten M kann auch durch die folgende Tabelle dargestellt werden:

| δ | | 0 | 1 | ε |
|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | $Z_0$ | $(q_0, 1^{(99-m)} Z_0)$ | | $(q_f, \varepsilon)$ |
| | 1 | $(q_0, 1^{(99-m)} 1)$ | $(q_1, \varepsilon)$ | |
| $q_1$ | $Z_0$ | | | $(q_f, \varepsilon)$ |
| | 1 | | $(q_1, \varepsilon)$ | |
| $q_f$ | $Z_0$ | | | |
| | 1 | | | |





2) Sei $h: \{c,d\}^* \to \{0,1\}^*$ der Homomorphismus mit $h(c) = 0$ und $h(d) = 10$. Definieren Sie eine Turingmaschine $M = (Q, \{0,1,c,d\}, \{0,1,c,d,X,Y,B,\$\}, \delta, q_0, \{B,\$\}, \{q_f\})$, welche die Sprache $L = \{w\,h(w) \mid w \in \{c,d\}^+\}$ akzeptiert, und erläutern Sie die Arbeitsweise Ihrer Maschine: M soll dabei - ausgehend von einer Startkonfiguration $\$ q_0 z$ für ein $z \in \{c,d\}^*$ - genau dann mit der Endkonfiguration $\$ q_f$ im Endzustand $q_f$ halten, wenn $z \in L$ gilt.

*Gruppe A:* $h(c) = 0$ und $h(d) = 10$.
*Gruppe B:* $h(c) = 1$ und $h(d) = 01$.
*Gruppe C:* $h(c) = 10$ und $h(d) = 0$.
*Gruppe D:* $h(c) = 01$ und $h(d) = 1$.

**Lösung:**

**Die Übergangsfunktion δ von M kann folgendermaßen definiert werden:**
$\delta(q_0, \alpha) = (q_0, \alpha, R)$, $\alpha \in \{c,d\}$; $\delta(q_0, \beta) = (q_1, \beta, R)$, $\beta \in \{0,1\}$;
$\delta(q_1, \beta) = (q_1, \beta, R)$, $\beta \in \{0,1\}$; $\delta(q_1, B) = (q_2, B, L)$;
$\delta(q_2, \gamma) = (q_2, \gamma, L)$, $\gamma \in \{0,1,c,d\}$; $\delta(q_2, \$) = (q_3, \$, R)$.

**M geht also zuerst über das Eingabewort z hinweg nach rechts und überprüft dabei, ob z von der Gestalt uv mit $u \in \{c,d\}^*$ und $v \in \{0,1\}^+$ ( jedes Wort aus L ist ja von dieser Gestalt ! ) ist, und geht dann wieder nach links bis zum Anfang von z, um dieses Wort dann iterativ folgendermaßen zu analysieren:**
$\delta(q_3, \alpha) = (q_\alpha, X, R)$, $\alpha \in \{c,d\}$;

M ersetzt **also das erste noch nicht analysierte Zeichen $\alpha \in \{c,d\}$ von w durch das Symbol X und merkt sich jedoch dieses Symbol α im Zustand $q_\alpha$.**
**Dann geht M über den Rest von w und den bereits analysierten und durch Symbole Y ersetzten Teil von h(w) nach rechts zu den entsprechenden Symbolen von h(α); diese werden nacheinander durch Y ersetzt:**
$\delta(q_\alpha, \beta) = (q_\alpha, \beta, R)$, $\alpha \in \{c,d\}, \beta \in \{c,d,Y\}$;

*Gruppe A:* $\delta(q_c, 0) = (q_L, Y, L)$, $\delta(q_d, 1) = (q_c, Y, R)$;
*Gruppe B:* $\delta(q_c, 1) = (q_L, Y, L)$, $\delta(q_d, 0) = (q_c, Y, R)$;
*Gruppe C:* $\delta(q_d, 0) = (q_L, Y, L)$, $\delta(q_c, 1) = (q_d, Y, R)$;
*Gruppe D:* $\delta(q_d, 1) = (q_L, Y, L)$, $\delta(q_c, 0) = (q_d, Y, R)$;

**Danach geht M wieder nach links, um mit dem nächsten noch nicht analysierten Zeichen aus {c,d} fortzusetzen:**
$\delta(q_L, \beta) = (q_L, \beta, L)$, $\beta \in \{c,d,Y\}$; $\delta(q_L, X) = (q_3, X, R)$.

Ist kein Zeichen aus $\{c,d\}$ mehr vorhanden, so überprüft M, ob auch alle Zeichen aus $\{0,1\}$ bereits erfaßt wurden:

$\delta(q_3,Y) = (q_R,Y,R)$; $\delta(q_R,Y) = (q_R,Y,R)$; $\delta(q_R,B) = (q_z,B,L)$.

Danach löscht M das Band mittels

$\delta(q_z,\gamma) = (q_z,B,L)$, $\gamma \in \{X,Y\}$; $\delta(q_z,\$) = (q_f,\$,R)$,

um schließlich im Endzustand $q_f$ mit der Endkonfiguration $\$q_f$ zu halten. Ist das Eingabewort z hingegen nicht von der Gestalt $wh(w)$ für ein $w \in \{c,d\}^+$, so muß M in einem Zustand ungleich $q_f$ halten. M hält also auf jedem Eingabewort $w \in \{0,1,c,d\}^*$ und genau dann im Endzustand $q_f$, wenn $w \in L$; daher gilt auch $L(M) = \{wh(w) \mid w \in \{c,d\}^+\}$.

Als Zustandsmenge erhält man daraus

$Q = \{q_i \mid 0 \le i \le 3\} \cup \{q_L, q_R, q_z, q_f\} \cup \{q_\alpha \mid \alpha \in \{0,1,c,d\}\}$.

3) Seien k, l, m natürliche Zahlen und $L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid \nu(w,a) = kn \wedge \nu(w,b) = ln \wedge \nu(w,c) = mn$ für ein $n \in \mathbf{N}\}$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen, daß L keine kontextfreie Sprache sein kann!

b) Geben Sie eine monotone Grammatik $G = (\{S\},\{a,b,c\},P,S)$ an, die L erzeugt, und begründen Sie, warum $L(G) = L$ gilt.

**Lösung:**

a) **Beweis indirekt:**

Angenommen, L ist kontextfrei. Sei n die Konstante aus dem Pumping Lemma und $z = a^{kn}b^{ln}c^{mn}$. Wegen $z \in L$ und $|z| = (k+l+m)n > n$ müssen nach dem Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen u, v, w, x, y existieren, sodaß $z = uxvyw$, $|xy| \ge 1$, $|xvy| \le n$ und $z_i = ux^ivy^iw \in L$ für alle $i \in \mathbf{N}_0$.

**Fall:** $\nu(xvy,a) > 0 \Rightarrow \nu(xvy,c) = 0 \Rightarrow$ Für $z_2$ erhält man folgendes:

$\nu(z_2,c) = mn$, aber wegen $|xy| \ge 1$ gilt entweder $\nu(z_2,a) > kn$ oder $\nu(z_2,b) > ln$, d. h. $z_2$ kann nicht aus L sein.

**Fall:** $\nu(xvy,c) > 0 \Rightarrow \nu(xvy,a) = 0 \Rightarrow$ Für $z_2$ erhält man folgendes:

$\nu(z_2,a) = kn$, aber wegen $|xy| \ge 1$ gilt entweder $\nu(z_2,b) > ln$ oder $\nu(z_2,c) > mn$, d. h. $z_2$ kann nicht aus L sein.





Man erhält also in jedem Falle einen **Widerspruch**!

$L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid \nu(w,a) = kn \wedge \nu(w,b) = ln \wedge \nu(w,c) = mn$ für ein $n \in \mathbf{N}\}$ kann daher nicht kontextfrei sein.

**Q. E. D.**

b) L wird von der monotonen Grammatik $G = (\{S\},\{a,b,c\},P,S)$ mit $P = \{(S,a^kb^lc^m),(S,a^kb^lc^mS)\} \cup \{(xy,yx) \mid x,y \in \{a,b,c\}\}$ erzeugt.

Wie man sofort sieht, gilt nämlich

α) $S \vdash^n_G (a^kb^lc^m)^nS \vdash_G (a^kb^lc^m)^{n+1}$ für alle $n \ge 0$ ( Beweis durch Induktion möglich! );

β) $(a^kb^lc^m)^{n+1} \vdash^*_G w$ für jedes $w \in L$ mit Hilfe der Vertauschungsregeln aus $\{(xy,yx) \mid x,y \in \{a,b,c\}\}$;

γ) ist $v \in \{S,a,b,c\}^*$ eine in G ableitbare Satzform, d. h. $S \vdash^*_G v$, so gilt aufgrund der Gestalt der Produktionen in P ( Beweis durch Induktion!): $\nu(v,a) = kn$, $\nu(v,b) = ln$ und $\nu(v,c) = mn$ für ein $n \in \mathbf{N}$.

Aus α) und β) folgt aber sofort $L(G) \supseteq L$, aus γ) hingegen $L(G) \subseteq L$, d. h. insgesamt also $L(G) = L$.

**Q. E. D.**

15-

# Automaten und Formale Sprachen - Übungen WS 1989/90

## 1. Test am 30. November 1989

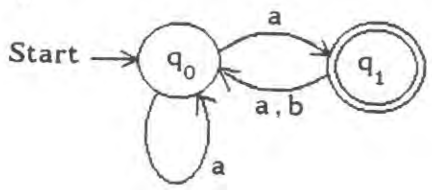
| Familienname: | Vorname: | Matrikelnummer: |
| --- | --- | --- |
| | | |

1) Definieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten, der die Sprache $L = \{ w \in \{1\}\{0,1\}^* \mid \mu_2(w) \equiv l \pmod 5 \}$ akzeptiert, wobei $l$ die letzte Ziffer Ihrer Matrikelnummer ist ( Fallen können weggelassen werden )!
( Dabei bedeutet $\mu_2$ jene Abbildung, die ein Wort $w \in \{1\}\{0,1\}^*$ als binäre Zahl interpretiert und den entsprechenden Zahlenwert zuordnet, d.h. für $w = a_1 \dots a_n$ mit $a_i \in \{0,1\}$, $1 \le i \le n$, $a_1 \neq 0$, ist $\mu_2(w) = \sum_{i=1}^{n} a_i 2^{n-i}$. )

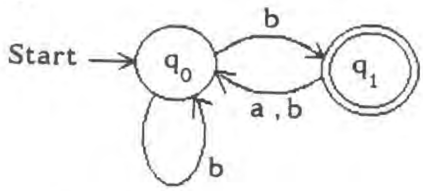
( 10 Punkte )

2) Gegeben sei der folgende nondeterministische endliche Automat M:

A)




B)




a) Definieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten M' mit L(M') = L(M) ( Fallen können weggelassen werden )!

( 5 Punkte )

b) Geben Sie einen regulären Ausdruck für L(M') = L(M) an!

( 5 Punkte )

c) **Definieren Sie** eine reguläre Grammatik $G = (\{S,B\},\{a,b\},P,S)$ mit $L(G) = L(M') = L(M)$!

( 5 Punkte )

3) Gegeben sei die kontextfreie Sprache L:

| A) | B) | C) | D) |
| --- | --- | --- | --- |
| $\{ 1^n 0^{2n} \mid n \in N \}$ | $\{ 1^{2n} 0^n \mid n \in N \}$ | $\{ 0^n 1^{2n} \mid n \in N \}$ | $\{ 0^{2n} 1^n \mid n \in N \}$ |

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, daß L nicht regulär ist!

( 12 Punkte )

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (\{S\},\{0,1\},P,S)$ an, für die $L(G) = L$ gilt, und beweisen Sie dies mittels Induktion nach der Länge der Ableitung in G.

( 13 Punkte )

## Lösungen zum 1. Test Automaten und Formale Sprachen am 30. 11. 1989

1) Definieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten, der die Sprache $L = \{ w \in \{1\}\{0,1\}^* \mid \mu_2(w) \equiv l \ (\text{mod } 5) \}$ akzeptiert, wobei l die letzte Ziffer Ihrer Matrikelnummer ist ( Fallen können weggelassen werden )!
( Dabei bedeutet $\mu_2$ jene Abbildung, die ein Wort $w \in \{1\}\{0,1\}^*$ als binäre Zahl interpretiert und den entsprechenden Zahlenwert zuordnet, d.h. für $w = a_1 \dots a_n$ mit $a_i \in \{0,1\}$, $1 \le i \le n$, $a_1 \ne 0$, ist $\mu_2(w) = \sum_{i=1}^{n} a_i 2^{n-i}$. )

**Lösung:**

Sei Z jene Abbildung, die jedem $j \in \mathbb{N}_0$ eindeutig den entsprechenden Zustand $[i]$, $i \in \{0,1,2,3,4\}$, zuordnet, sodaß $i \equiv j$ ( mod m ). Die Übergangsfunktion $\delta$ eines deterministischen endlichen Automaten $M = (\{q_0,[0],[1],[2],[3],[4],q_6\},\delta,q_0,\{Z(l)\})$ mit $L(M) = L$ kann dann folgendermaßen definiert werden:

$\delta(q_0,0) = q_6$, $\delta(q_6,0) = \delta(q_6,1) = q_6$ ( $q_6$ = Falle ); $\delta(q_0,1) = Z(1)$;

$\delta([i],j) = Z(2i+j)$ für alle $i \in \{0,1,2,3,4\}$ und alle $j \in \{0,1\}$.

Aus der Tabelle für die Restklassen modulo 5, [0], [1], [2], [3] und [4], läßt sich sofort die entsprechende Tabelle für die Übergangsfunktion des nachfolgend auch graphisch dargestellten deterministischen endlichen Automaten M angeben:

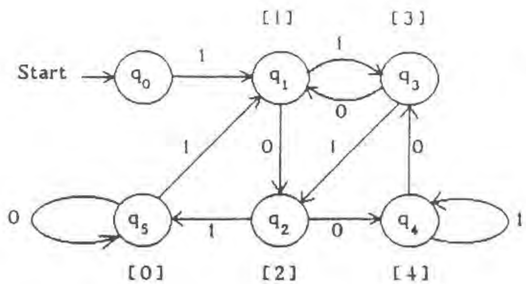
| | 2* Klasse + 0 | 2* Klasse + 1 |
|---|---|---|
| [0] | [0] | [1] |
| [1] | [2] | [3] |
| [2] | [4] | [0] |
| [3] | [1] | [2] |
| [4] | [3] | [4] |

| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $[0] \hat{=} q_5$ | $q_5$ | $q_1$ |
| $[1] \hat{=} q_1$ | $q_2$ | $q_3$ |
| $[2] \hat{=} q_2$ | $q_4$ | $q_5$ |
| $[3] \hat{=} q_3$ | $q_1$ | $q_2$ |
| $[4] \hat{=} q_4$ | $q_3$ | $q_4$ |
| $q_0$ | $q_6$ | $q_1$ |
| $q_6$ | $q_6$ | $q_6$ |



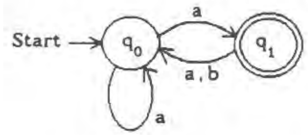


Der Anfangszustand $q_0$ wird deshalb benötigt, weil "führende Nullen" nicht zugelassen sind, weshalb auch die Falle $q_6$ eingeführt werden muß. Die Restklasse $Z(l) \in \{[0],[1],[2],[3],[4]\}$ stellt nach Definition von L den Endzustand des Automaten dar.




*( Falle $q_6$ wurde weggelassen! )*

2) Gegeben sei der folgende nondeterministische endliche Automat M:




a) Definieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten M' mit $L(M') = L(M)$ ( Fallen können weggelassen werden )!

b) Geben Sie einen regulären Ausdruck für $L(M') = L(M)$ an!

c) Definieren Sie eine reguläre Grammatik $G = (\{S,B\},\{a,b\},P,S)$ mit $L(G) = L(M') = L(M)$!

**Lösung:**

a) Mit Hilfe des Konstruktionsverfahrens aus Satz 2.1.1 erhält man aus der ( Tabelle der ) Übergangsfunktion $\delta$ des nondeterministischen endlichen Automaten M die Übergangsfunktion $\delta'$ ( bzw. $\delta''$ ) des deterministischen endlichen Automaten M' ( bzw. M'' ),

$M' = (\{[q_0],[q_0,q_1],[\emptyset]\},\{a,b\},\delta',[q_0],\{[q_0,q_1]\})$

( bzw. $M'' = (\{p_0,p_1,p_2\},\{a,b\},\delta'',p_0,\{p_1\})$ ):

| δ | a | b |
|---|---|---|
| $q_0$ | $\{q_0, q_1\}$ | $\emptyset$ |
| $q_1$ | $\{q_0\}$ | $\{q_0\}$ |

**Regulärer Ausdruck:**

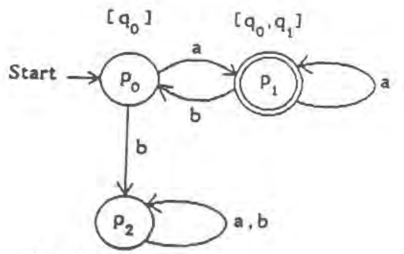
$(\alpha^* \alpha (\alpha + \beta))^* (\alpha^* \alpha) = (\alpha^+ (\alpha + \beta))^* \alpha^+$

**Reguläre Grammatik:**

$P = \{S \rightarrow aS \mid aB \mid a,\ B \rightarrow aS \mid bS\}$

| δ' | a | b |
|---|---|---|
| $[q_0]$ | $[q_0, q_1]$ | $[\emptyset]$ |
| $[q_0, q_1]$ | $[q_0, q_1]$ | $[q_0]$ |
| $[\emptyset]$ | $[\emptyset]$ | $[\emptyset]$ |

| δ'' | a | b |
|---|---|---|
| $p_0$ | $p_1$ | $p_2$ |
| $p_1$ | $p_1$ | $p_0$ |
| $p_2$ | $p_2$ | $p_2$ |




*( Falle $[\emptyset]$ )*

**Regulärer Ausdruck:**

$(\alpha\alpha^* \beta)^* (\alpha\alpha^*) = (\alpha^+ \beta)^* \alpha^+$

**Reguläre Grammatik:**

$P = \{S \rightarrow aB \mid a,\ B \rightarrow aB \mid bS \mid a\}$

b) und c)

Ein regulärer Ausdruck sowie eine Produktionenmenge für die reguläre Grammatik G sind bereits unter a) sowohl für den nondeterministischen als auch für den deterministischen endlichen Automaten angegeben.

3) **Gegeben sei die** kontextfreie Sprache $L = \{ 1^n 0^{2n} \mid n \in N \}$.

a) **Zeigen Sie** mit Hilfe des Pumping Lemmas, daß L nicht regulär ist!

b) **Geben Sie** eine kontextfreie Grammatik $G = (\{S\}, \{0,1\}, P, S)$ an, für die $L(G) = L$ gilt, und beweisen Sie dies mittels Induktion nach der Länge der Ableitung in G.





**Lösung:**

a) **Beweis indirekt:**

Angenommen, $L = \{ 1^n 0^{2n} \mid n \in N \}$ ist regulär.

Sei n die Konstante aus dem Pumping Lemma und $z = 1^n 0^{2n}$; dann ist z aus L und $|z| = 3n \geq n$. Nach dem Pumping Lemma kann man also $z = uvw$ mit $u, v, w \in \{0,1\}^*$, $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, schreiben, sodaß $uv^i w$ für alle $i \in N_0$ aus L ist.

Dann muß aber $uv \in \{1\}^*$ und somit auch - wegen $|v| \geq 1$ - $v \in \{1\}^+$ gelten und $uv^2 w = 1^{n+|v|} 0^{2n}$ aus L sein. Wegen $1 \leq |v| \leq n$ gilt jedoch $1 \leq n+1 \leq n+|v| \leq n+n$, i.e. $n+|v| \neq n$. Da $1^n 0^{2n}$ das einzige Wort in L der Gestalt $1^m 0^{2n}$ für ein $m \in N$ ist, kann daher $uv^2 w$ nicht aus L sein.

**Widerspruch!**

$L = \{ 1^n 0^{2n} \mid n \in N \}$ ist deshalb keine reguläre formale Sprache.

**Q. E. D.**

b) $G = (\{S\}, \{0,1\}, \{S \rightarrow 1S00 \mid 100\}, S)$.

Man kann nun für $n \in N$ alle Ableitungen der Länge n betrachten und die folgende **Behauptung A(n)** zeigen:

$A(n)$: $S \vdash^n w \Leftrightarrow w \in \{1^n 0^{2n}, 1^n S 0^{2n}\}$.

**Beweis mittels Induktion nach n ∈ N:**

***Induktionsbasis A(1):*** $S \vdash 1^n 0^{2n}$ bzw. $S \vdash 1^n S 0^{2n}$ mit $n = 1$ sind die einzigen direkten Ableitungen in G aus dem Startsymbol S.

***Sei nun n > 1:***

***Induktionshypothese (IH):*** Die Aussage A(m) gilt für alle m mit $1 \leq m < n$.

***Induktionsbehauptung:*** Es gilt auch A(n).

$S \vdash^n w \Leftrightarrow S \vdash^{n-1} v \vdash w$ für ein $v \in \{0,1,S\}^* \Leftrightarrow$ ( (IH) für $m = n-1$ )

$S \vdash^{n-1} v \vdash w$ für ein $v \in \{1^{n-1} 0^{2(n-1)}, 1^{n-1} S 0^{2(n-1)}\}$.

Da in einer kontextfreien Grammatik aus einem Terminalwort wie $1^{n-1} 0^{2(n-1)}$ nichts mehr weiter abgeleitet werden kann, ist dies aufgrund der Produktionen von G äquivalent mit

$S \vdash^{n-1} 1^{n-1} S 0^{2(n-1)} \vdash w \Leftrightarrow w \in \{1^n 0^{2n}, 1^n S 0^{2n}\}$.

**Q. E. D.**

Aus der Gültigkeit der Aussage A(n) für alle $n \in N$ folgt nun sofort

$L(G) = \left( \bigcup_{n \in N} \{1^n 0^{2n}, 1^n S 0^{2n}\} \right) \cap \{0,1\}^* = \bigcup_{n \in N} \{1^n 0^{2n}\} = L$.