Theoriefragen Ausarbeitung V 1.13

Michael Jaros

22.02.2005

1 Theoriefragen aus dem PO

- Die Fragen sind (bis auf die letzte) aus der Ausarbeitung von Aman Atri und somit aus dem M2-PO. Die meisten Antworten stammen aus dem Kaiser-M2-Skriptum 2004 und wurden sprachlich und strukturell leicht verbessert bzw. ergänzt, einige wenige sind aus anderen Quellen (steht dabei).
- Für Tippfehler oder nicht bestandene Prüfungen hafte ich nicht.
- Kommentare und Verbesserungsvorschläge bitte mit Betreff „m2“ an:

e0225848@student.tuwien.ac.at

- Seitenangaben beziehen sich auf das Kaiser-M2-Skriptum, SS04

1.1 Formulieren Sie den Satz von Kirchhoff für gerichtete Graphen. Wann heißt ein gerichteter Graph schwach zusammenhängend, wann stark zusammenhängend?

- **Satz von Kirchhoff** für gerichtete Graphen:
  Sei X ein zusammenhängender gerichteter Graph und $A(X)$ seine Adjazenzmatrix. $M(X)$ sei eine Matrix, definiert durch:

$$M(X) = -A(X) + \begin{pmatrix} d^-(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d^-(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d^-(x_n) \end{pmatrix}$$

  Dann ist die Anzahl der spannenden Aboreszenzen mit Wurzel x_i gleich dem Absolutbetrag der Determinante der Matrix $M_i(X)$, die aus $M(X)$ durch Streichen der i-ten Spalte und irgendeiner Zeile entsteht.

  → S. 61

- Ein gerichteter Graph G heißt **schwach zusammenhängend**, wenn sein Schatten G^U zusammenhängend ist. → S. 38

- Ein gerichteter Graph G heißt **stark zusammenhängend**, wenn je zwei Knoten x, y von G durch einen gerichteten Weg verbunden sind. → S. 38

1.2 Was versteht man unter einer Eulerschen Differentialgleichung? Wie löst man sie?

- Unter einer **Eulerschen Differentialgleichung** versteht man eine Gleichung folgender Gestalt:

$$x^n y^{(n)}(x) + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots\ + a_{n-1} x y'(x) + a_n y(x) = s(x)$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ und $s(x)$ stetig auf $I \subseteq \mathbb{R}$. Es handelt sich bei der Eulerschen Differentialgleichung also um eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit einer speziellen Art von nicht konstanten Koeffizienten. → S. 140

- 1. Man versucht, sie durch eine geeignete Transformation $x = e^t$ bzw. $t = \ln x$ auf eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten zurückzuführen, welche üblicherweise mit dem Differentialansatz $y = e^{\lambda t}$ gelöst wird.
  2. Man stellt die charakteristische Gleichung der homogenen Differentialgleichung auf. Man beachte, dass die Nullstellen des charakteristischen Polynoms folgende Fälle annehmen können:
     (a) Alle Nullstellen sind reell und verschieden.
     (b) Die Nullstellen sind reell, aber nicht verschieden.
     (c) Es treten Lösungen als Paare konjugiert komplexer Nullstellen auf.
  3. Man bestimmt nun die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung, und schließlich eine partikuläre Lösung der transformierten inhomogenen Differentialgleichung.
  4. Man kann die Transformation $x = e^t$ bzw. $t = \ln x$ und den Exponentialansatz vereinigen, d. h. man löst die gegebene Eulersche Differentialgleichung (unter Berücksichtigung obiger 3 Fälle) mit dem Ansatz $y = x^\lambda$.

  → PO S. 4

1.3 Was versteht man unter einer Differenzengleichung? Was ist eine lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten der Ordnung r? Wie löst man sie (allgemeine Lösung)? Wie passt man die allgemeine Lösung den Anfangswerten an? Wie bestimmt man f_p bei polynomialer Störfunktion oder bei exponentieller Störfunktion?

- Man nennt eine rekursive Relation, durch die eine Folge implizit angegeben wird, eine **Differenzengleichung** für diese Folge. → S. 155

- Unter einer **linearen Differenzengleichung** versteht man eine rekursive Relation der Form:

$$c_0(n)a_n + c_1(n)a_{n-1} + \ldots + c_r(n)a_{n-r} = g(n),\ n > r$$

mit: g und c_i, $i = 1, \ldots, r$, bezeichnen Funktionen von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{N}_0$ in $\mathbb{R}$). Die c_i heißen Koeffizienten der Gleichung und g ihre Störfunktion. [Ist $g(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (oder $n \in \mathbb{N}_0$), so heißt die Gleichung homogen, andernfalls inhomogen.] $\rightarrow$ S. 156

- Gilt in
$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \ldots + c_r a_{n-r} = g(n),\ n > r,$$
daß $c_0 \neq 0$ und $c_r \neq 0$, so besitzt die **lineare Differenzengleichung** mit **konstanten Koeffizienten** die **Ordnung** r. $\rightarrow$ S. 157

- Bestimmen der allgemeinen Lösung der homogenen linearen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten:

  1. Lösungsansatz: $f(n) = \lambda^n$ mit $\lambda \neq 0$ (da sonst triviale Lösung).
  2. Daraus erhalten wir wieder die charakteristische Gleichung:
  $$c_0 \lambda^r + c_1 \lambda^{r-1} + \ldots + c_r = 0$$
  Ist λ_1 eine Lösung der charakteristischen Gleichung, so ist $f(n) := \lambda_1^n$ eine Lösung der homogenen Differenzengleichung.
  3. Sind alle Wurzeln $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ der charakteristischen Gleichung
  $$c_0 \lambda^r + c_1 \lambda^{r-1} + \ldots + c_r = 0$$
  verschieden und reell, so ist die allgemeine Lösung f_h der homogenen Differenzengleichung
  $$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \ldots + c_r a_{n-r} = 0,\ n > r,$$
  gegeben durch:
  $$f_h(n) = A_1 \lambda_1^n + A_2 \lambda_2^n + \ldots + A_r \lambda_r^n,\ n \geq 1.$$
  Dabei sind die $A_1, \ldots, A_r$ beliebige reelle Zahlen. Diese können durch die Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt werden (Gleichungssystem mit n Variablen und n Anfangsbedingungen).
  4. Besitzt das charakteristische Polynom auch komplexe Nullstellen, so ersetzt man die Lösungen $(a+bi)^n$ und $(a-bi)^n$ (konjugiert komplex) durch:
  $$p^n \cdot \cos(n\varphi) \text{ und } p^n \cdot \sin(n\varphi),$$
  wobei $p := \sqrt{a^2 + b^2}$ und $\tan \varphi = \frac{b}{a}$, $a \neq 0$.
  5. Sei λ_1 s-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so gilt: λ_1^n, $n\ \lambda_1^n$, $\ldots$, $n^{s-1}\lambda_1^n$ sind Lösungen der homogenen Differenzengleichung.

  $\rightarrow$ PO S. 5 © Aman Atri [siehe auch Skriptum S. 159ff]

- Man **passt** die **allgemeine Lösung** den **Anfangswerten an**, indem man die Anfangswerte als Lösungen der allgemeinen Lösungsgleichung f_h einsetzt und die Koeffizienten berechnet. $\rightarrow$ PO S. 5 © Aman Atri

- – Hat die **Störfunktion** die Form $g(n) = Ca^n$, so bestimmen wir einen Lösungsansatz $f_p = D \cdot a^n$ und setzen diesen Ausdruck in unsere Differenzengleichung ein. Mittels Koeffizientenvergleich erhalten wir D und somit eine partikuläre Lösung.
  – Analog behandelt man polynomiale Störfunktionen, indem man ein Polynom gleichen Grades wie $g(n)$ in die Differenzengleichung einsetzt.

  → PO S. 5 © Aman Atri

1.4 Erklären Sie die Begriffe: Ungerichteter Graph, gerichteter Graph, Schatten eines Graphen, schlichter Graph. Was ist ein azyklischer gerichteter Graph? Welche Arten von Teilgraphen kennen Sie? Was ist eine Adjazenzmatrix eines gerichteten Graphen? Welche Eigenschaften hat sie?

- Unter einem **ungerichteten Graphen** versteht man ein geordnetes Tripel $(V(X), E(X), \psi_X)$, bestehend aus einer nicht leeren Menge $V(X)$ von Knoten, einer dazu disjunkten Menge $E(X)$von Kanten, und einer Funktion ψ_X, die jeder Kante $e \in E(X)$ ein ungeordnetes Paar x, y nicht notwendigerweise verschiedener Knoten $x, y \in V(X)$, genannt die Endknoten von e, zuordnet. → S. 27f

- Ein **gerichteter Graph** G ist ein geordnetes Tripel $(V(G), E(G), \psi_G)$, bestehend aus einer Knotenmenge $V(G)$, der Menge der gerichteten Kanten $E(G)$, und der so genannten Inzidenzfunktion ψ_G, die jeder gerichteten Kante $e \in E(G)$ ein geordnetes Paar (x, y) von Knoten $x, y \in V(G)$ zuordnet: $\psi_G(e) = (x, y)$. Der Knoten x heißt Anfangspunkt von e, der Knoten y heißt Endpunkt von e. Die Richtung einer Kante (x, y) wird durch einen Pfeil dargestellt, der von x nach y weist. → S. 29

- Jedem gerichteten Graphen G kann man einen ungerichteten Graphen $X = G^U$ zuordnen, der die selbe Knotenmenge wie G hat. Ist für ein ungeordnetes Knotenpaar (x, y) die Anzahl der in G von x nach y führenden Kanten gleich b_1, die Anzahl der von y nach x führenden Kanten gleich b_2, so verbindet man in G^U die Knoten x und y durch $max(b_1, b_2)$ Kanten. G^U heißt der **Schatten** von G. → S. 30

- Ein Graph heißt **schlicht**, wenn er keine Schlingen oder Mehrfachkanten enthält. → S. 27

- Ein gerichteter Graph heißt **azyklisch**, wenn er keinen gerichteten Kreis enthält. → S. 38

- **Teilgraphen**:
  – Y heißt **spannender Teilgraph** von X, wenn Y Teilgraph von X und $V(X) = V(Y)$ (d. h. die Knotenmengen sind gleich) ist.
  – Ein Teilgraph Y, der alle möglichen Kanten enthält, die ein Teilgraph von X auf der Knotenmenge $V(Y) \subseteq V(X)$ besitzen kann, heißt

gesättigter Teilgraph von X, d. h. $V(Y) \subseteq V(X)$ und $E(Y) = \{e|e \in E(X); e \to (x,y),\ x,y \in V(Y)\}$.

$\to$ S. 32

- Unter der **Adjazenzmatrix** $A = (a_ij)$ eines gerichteten Graphen versteht man eine (n,n)-Matrix mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad (x_i, x_j) \in E(X), \\ \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Sie hat folgende **Eigenschaften**:

  - Es ist $A(X)$ genau dann symmetrisch, wenn mit (x_i, x_j) stets auch (x_j, x_i) Kante ist.
  - Ist X schlicht, so gilt offensichtlich:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = d^+(x_i)$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = d^-(x_j)$$

$\to$ S. 60

1.5 Was versteht man unter einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten? Beschreiben Sie das Lösungsverfahren für die zugehörige homogene Gleichung. Beschreiben Sie die Methode der Variation der Konstanten.

- Die Gleichung

$$y^{(n)} + c_1 y^{(n-1)} + \ldots + c_{n-1} y' + c_n y = q(x)$$

($c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, q stetig auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$) heißt **lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.** $\to$ S. 126

- Lösungsverfahren für die zugehörige homogene Gleichung:

  1. Exponentialansatz: Man sucht Lösungen in der Form $y = e^{\lambda x}$:

$$e^{\lambda x}(\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\lambda + c_n) = 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

2. und weiter:
$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0.$$
Diese Gleichung nennt man charakteristische Gleichung der gegebenen Differentialgleichung. Ist λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms (linke Seite der charakteristischen Gleichung), so ist $e^{\lambda x}$ eine Lösung der homogenen Gleichung.
3. Fallunterscheidung für die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:
   - Alle Nullstellen sind reell und verschieden.
   - Alle Nullstellen sind reell, aber nicht verschieden.
   - Es gibt auch komplexe Lösungen.

→ S. 126f

- Methode der **Variation der Konstanten** (zur Bestimmung der partikulären Lösung y_p):

1. Die allgemeine Lösung
$$y_h(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$$
($c_i \in \mathbb{R}$) der zugehörigen homogenen Gleichung sei bekannt.
2. Ansatz:
$$y_p(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i(x)$$
3. Es ist
$$y_p'(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i'(x).$$
4. Man hält die Bedingung $\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i(x) = 0$ fest und differenziert $y_p'(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i'(x)$ noch einmal:
$$y_p''(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i'(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i''(x).$$
5. Nun setzen wir $\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i'(x) = 0$ und rechnen mit
$$y_p''(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i''(x)$$
weiter, usw.
6. Mit Einbeziehung der homogenen Gleichung und der Annahme $\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) = 0$ erhält man ein lineares Gleichungssystem mit n Bedingungen:
$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(k-1)}(x) = 0,\ \forall k = 1, \ldots, n-1$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) = q(x)$$

Sind $y_1, \ldots, y_n$ linear unabhängig, so ist dieses System stets lösbar, und man erhält durch Integration $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ und somit y_p.

→ S. 126f, PO S. 7 (letzter Punkt) © Aman Atri

1.6 Was versteht man unter einem Baum, was unter einem Wald? Wie charakterisiert man einen Baum?

- Ein zusammenhängender, ungerichteter Graph, der keinen Kreis positiver Länge enthält, heißt **Baum**.
- Sind alle Komponenten eines Graphen X Bäume, so heißt X **Wald**.
- Charakterisierung eines Baumes:
  1. X ist ein Baum.
  2. Je zwei Knoten von X sind durch genau 1 Weg verbunden.
  3. X ist zusammenhängend, und es ist $e = v - 1$.
  4. X besitzt keinen Kreis., und es ist $e = v - 1$.
  5. X besitzt keinen Kreis. Verbindet man zwei vorher nicht verbundene Knoten von X durch eine Kante, so erhält man einen Graphen mit genau 1 Kreis.

→ S. 48ff

1.7 Was versteht man unter einer exakten Differentialgleichung? Wie erkennt man, ob eine gegebene Differentialgleichung exakt ist? Beschreiben Sie die Methode des integrierenden Faktors.

- $P(x,y)\partial x + Q(x,y)\partial y = 0$ heißt **exakte Differentialgleichung**, wenn es eine Funktion H (ebenfalls auf der offenen Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ definiert) gibt mit
$$\frac{\partial H}{\partial x} = P,\ \frac{\partial H}{\partial y} = Q \text{ für alle } (x,y) \in M.$$

→ S. 114

- Besitzen P und Q stetige partielle Ableitungen, so ist das Differential $P(x,y)\partial x + Q(x,y)\partial y$ auf der einfach zusammenhängenden Menge M genau dann **exakt**, wenn die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ auf M erfüllt ist. → S. 116
- **Methode des integrierenden Faktors**: Ist eine Differentialgleichung der Form $P(x,y)\partial x + Q(x,y)\partial y = 0$ nicht exakt, so kann man versuchen, diese durch Multiplikation mit einem „integrierenden Faktor“ $\mu(x,y)$ in eine exakte Differentialgleichung überzuführen. In der Praxis verwendet

man die Methode meist nur, wenn der integrierende Faktor nur von einer Variablen abhängt. Man erhält dadurch die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Q}.$$

→ PO S. 9 © Aman Atri [siehe auch Skriptum S. 118f]

1.8 Was versteht man unter der Inzidenzmatrix eines ungerichteten Graphen? Was versteht man unter der Adjazenzmatrix eines ungerichteten Graphen?

- Unter der **Inzidenzmatrix** $B(X)$ eines Graphen X zur gegebenen Nummerierung von $V(X)$ und $E(X)$ versteht man eine (n, m)-Matrix (b_{ij}) mit

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x_i \text{ und } e_j \text{ inzident sind,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. → S. 56

- Unter der **Adjazenzmatrix** $A(X) = (a_{ij})$ des Graphen X versteht man eine (n, n)-Matrix, definiert durch:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x_i \text{ und } x_j \text{ adjazent,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

→ S. 56

1.9 Was versteht man unter einer Kombination ohne bzw. mit Wiederholung von n Elementen zur k-ten Klasse? Wie groß sind die entsprechenden Anzahlen C_n^k der Kombinationen ohne Wiederholung und die Anzahlen ${}^wC_n^k$ der Kombinationen mit Wiederholung? Begründen Sie die Beziehungen

$$\sum_{k \geq 2} C_n^k x^k = (1+x)^n$$

und

$$\sum_{k \geq 2} {}^wC_n^k x^k = (1-x)^n.$$

△ **TODO: Die Beziehungen hier sind noch falsch.**

- Eine **Kombination ohne Wiederholung** von n Elementen zur k-ten Klasse ist ein ungeordnetes k-tupel $a_1, \ldots, a_k$ von k paarweise verschiedenen Elementen der n-elementigen Menge M (d. h. eine k-elementige

Teilmenge von M). Die **Anzahl der Kombinationen** von n Elementen zur k-ten Klasse **ohne** Wiederholung ist

$$C_n^k = \binom{n}{k}.$$

→ S. 5

- Eine **Kombination mit Wiederholung** von n Elementen zur k-ten Klasse ist ein ungeordnetes k-tupel $a_1, \ldots, a_k$ von k nicht notwendigerweise verschiedenen Elementen der n-elementigen Menge M (d. h. eine k-elementige Multimenge, deren Trägermenge eine Teilmenge von M ist). Die **Anzahl der Kombinationen** von n Elementen zur k-ten Klasse **mit** Wiederholung ist

$$^wC_n^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

→ S. 6f

- **Beziehungen**: ? → Binom. LS, ...

1.10 Wann heißt ein gerichteter Graph G azyklisch? Beschreiben Sie den Markierungsalgorithmus zur Überprüfung von G auf Azyklizität. In welcher Reihenfolge werden die Knoten des folgenden Graphen G beim Markierungsalgorithmus markiert?

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longleftarrow & 2 \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ 3 & \longleftarrow & 4 \end{array}$$

- Ein gerichteter Graph G heißt **azyklisch**, wenn er keinen gerichteten Kreis (Zyklus) positiver Länge enthält. → S. 38

- **Markierungsalgorithmus**:

  1. Markiere alle Knoten mit $d^+(x) = 0$. Gibt es keine solchen Knoten, so ist G zyklisch.
  2. Sind alle Knoten markiert, so ist G azyklisch. Andernfalls markiert man nun alle Knoten, von denen nur Kanten zu bereits markierten Knoten wegführen. Kann so kein Knoten mehr markiert werden, so ist G zyklisch. Andernfalls iteriert man das Verfahren.

→ S. 47

- **Reihenfolge** für den gegebenen Graphen:

Markieren von 3 (Schritt 1), danach 4 (Schritt 2), 1 und 2. Alle Knoten sind markiert, daher ist der Graph azyklisch. → S. 47 [selbst gelöst]

1.11 Was versteht man unter einer offenen bzw. geschlossenen Eulerschen Linie, was unter einer offenen bzw. geschlossenen Hamiltonschen Linie? Sei G ein schwach zusammenhängender Graph, wie kann man dann mit Hilfe der Knotengrade feststellen, ob G eine offene Eulersche Linie hat?

- Sei G ein (ungerichteter oder gerichteter) Graph. Eine (ungerichtete bzw. gerichtete Kantenfolge in G heißt

  - **Eulersche Linie**, wenn sie jeden Knoten und jede Kante enthält und jede Kante genau einmal auftritt (Kantenzug).
  - **Hamiltonsche Linie**, wenn sie jeden Knoten genau einmal enthält.

  Je nachdem, ob die Kantenfolge geschlossen oder offen ist, spricht man von einer **geschlossenen** oder **offenen** Eulerschen bzw. Hamiltonschen Linie. → Baron/Kirschenhofer M f. Inf. Band 3, S. 161

- In einem **schwach zusammenhängenden** (also gerichteten) Graphen G existiert eine offene Eulersche Linie, wenn

  - für genau einen Knoten x gilt $d^+(x) = d^-(x) + 1$ ($\triangleq$ Startpunkt),
  - für genau einen Knoten x gilt $d^+(x) = d^-(x) - 1$ ($\triangleq$ Endpunkt),
  - für alle anderen Knoten x gilt $d^+(x) = d^-(x)$.

  → Baron/Kirschenhofer M f. Inf. Band 3, S. 163

1.12 Formulieren Sie den Binomischen Lehrsatz und erklären Sie die Eigenschaften der Binomialkoeffizienten. Wie lautet das Inklusions-Exklusionsprinzip? Was versteht man unter einer Variation von n Elementen zur k-ten Klasse mit Wiederholung? Wie viele solche Variationen gibt es?

- Die Potenzen eines Binoms $(a + b)$ berechnen sich nach der Formel

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

  → Dörfler/Peschek Einf. i. d. M. f. Informatiker S. 140 [s. Skriptum S. 10]

- **Eigenschaften des Binomialkoeffizienten**:

  1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$
  2. $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$.
  3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für $0 \leq k \leq n$.

4. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
5. $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$ für $n, k \geq 1$.

$\rightarrow$ S. 11

- **Inklusions-Exklusions-Prinzip**: Seien $A_1, \ldots, A_n$ Teilmengen einer endlichen Menge X, so gilt:

$$|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}| = |X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} |\bigcap_{i \in I} A_i|,$$

wobei die Summe über alle Teilmengen I von $\{1, \ldots, n\}$ erstreckt wird und $\bigcap_{i \in \phi} A_i =: X$ gesetzt wird. $\rightarrow$ S. 22

- Eine **Variation** von n Elementen zur k-ten Klasse **mit Wiederholung** ist ein geordnetes k-tupel $(a_1, \ldots, a_k)$ von k nicht notwendigerweise verschiedenen Elementen einer n-elementigen Menge M. Die Anzahl aller solchen Variationen mit Wiederholung ist

$$^{w}V_n^k = n^k.$$

$\rightarrow$ S. 6

1.13 Was ist ein Eulerscher Graph? Ist jeder Graph, den man in einem Zug zeichnen kann, ein Eulerscher Graph? Man nenne eine notwendige Bedingung dafür, dass man einen Graphen in einem Zug zeichnen kann. Ist diese Bedingung hinreichend? Man zeichne einen Graphen, der Eulersch ist, aber nicht Hamiltonsch, und einen, der Hamiltonsch, aber nicht Eulersch ist.

- Gibt es in einem zusammenhängenden Graphen X einen geschlossenen Kantenzug Z, der jede Kante aus $E(X)$ genau einmal entält, so heißt X ein **Eulerscher Graph** und Z eine (geschlossene) **Eulersche Linie** in X. $\rightarrow$ S. 40

- Nicht jeder Graph, den man in einem Zug zeichnen kann, ist ein Eulerscher Graph. Gegenbeispiel: $1 \rightarrow 2$ kann in einem Zug gezeichnet werden, enthält jedoch keine geschlossene Eulersche Linie.

- ?

- [Grafik]

- [Grafik]

1.14 Charakterisieren Sie zusammenhängende Eulersche Graphen.

- Ist X ein zusammenhängender Graph, so sind folgende Aussagen äquivalent:

  1. X ist ein Eulerscher Graph.
  2. Jeder Knoten von X hat geraden Grad.
  3. $E(X) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \ldots \cup E(C_r)$, wobei die C_i Kreise in X mit $E(C_i) \cap E(C_j) = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ sind (man sagt: X ist kantendisjunkte Vereinigung von endlich vielen Kreisen.

→ S. 41

1.15 Welche 2 Möglichkeiten, Graphen im Computer zu speichern, kennen Sie? Welche Vor- und Nachteile haben diese? Man schätze Speicher- und Zugriffsaufwand für einen Graphen mit n Knoten und m Kanten (Unter Zugriff versteht man die Überprfüfung, ob zwei Knoten adjazent sind).

- Die **Adjazenzmatrix**:

  - Speicherplatzersparnis durch Symmetrie (bei ungerichteten Graphen).
  - Bei schlichten Graphen enthält die Matrix nur 0 und 1. Speicherplatzersparnis durch Speicherung nur der 1en in Listenform.
  - Die Adjazenzmatrix enthält keine direkten Informationen über Kanten.
  - **Zugriffsaufwand**: $\Theta(1)$ (bei Speicherung als Array) bzw. $\Theta(d(v))$ (bei Speicherung in Listenform - abhängig vom Knotengrad).
  - **Speicheraufwand**: $\Theta(n^2)$ (bei Speicherung als Array) bzw. $\Theta(e+n)$ (bei Speicherung in Listenform).

- Die **Inzidenzmatrix**:

  - Die Inzidenzmatrix enthält Informationen über Kanten, d. h. sowohl Knoten als auch Kanten haben hier eine feste Nummerierung.
  - Die Elemente der Inzidenzmatrix können die Werte 0 und 1 sowie bei gerichteten Graphen -1 annehmen.
  - Man kann den Knotengrad unmittelbar aus der Matrix ablesen.
  - Man kann mit Hilfe der Inzidenzmatrix die Zusammenhangskomponenten des Graphen bestimmen.
  - **Zugriffsaufwand**: $\Theta(2 \cdot e) = \Theta(e)$ (2 Zugriffe pro Kante).
  - **Speicheraufwand**: $\Theta(n \cdot e)$ (Inzidenzmatrix mit n Zeilen und e Spalten).

→ S. 62f, AlgoDat 1 Skriptum (Mutzel/Raidl V2.1) S. 113, eigene Ausarbeitung

1.16 Wie stellt man fest, ob ein (gerichteter) Graph azyklisch ist? Nennen Sie eine Bedingung, dass es in einem Turnier eine eindeutige Reihenfolge gibt. Gibt es ein Turnier, bei dem alle Erste sind? Wie viele stark zusammenhängende Komponenten hat ein transitives Turnier mit n Knoten?

- **Graph azyklisch**: Siehe Frage 10.
- In einem Turnier gibt es genau dann eine **eindeutige Reihenfolge**, wenn das Turnier transitiv ist, d. h. wenn die Kanten (a, b) und (b, c) im Turnier existieren, dann existiert auch die Kante (a, c).
- Turnier, bei dem alle **Erste** sind: 3 Teilnehmer, jeder gewinnt ein Spiel.
- Ein transitives Turnier mit n Knoten hat genau n **stark zusammenhängende Komponenten** (jeden Knoten für sich).

→ http://www.informatik-forum.at/archive/index.php/t-2912.html

1.17 Was versteht man unter einer Variation ohne Wiederholung? Wie berechnet man sie?

- Unter einer **Variation** zur k-ten Klasse **ohne Wiederholung** versteht man ein geordnetes k-tupel $(a_1, \ldots, a_k)$ von k paarweise verschiedenen Elementen einer Menge M mit n Elementen (d. h. $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$). Die Anzahl aller solchen Variationen bezeichnen wir mit V_n^k. → S. 3
- **Berechnung:**

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

→ S. 4

1.18 Was versteht man unter einer linearen homogenen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten? Wie löst man sie?

- Eine rekursive Relation, durch die eine Folge implizit angegeben ist, heißt Differenzengleichung für diese Folge. Eine **lineare homogene Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten** ist eine Differenzengleichung der Form

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \ldots + c_r a_{n-r} = g(n), n > r$$

mit: g ist eine Funktion von $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}_0$ in $\mathbb{R}$. → S. 156f

- **Lösungsverfahren**: → siehe Frage 1.3

1.19 Nennen Sie 3 notwendige Bedingungen dafür, dass die Graphen G_1 und G_2 isomorph sind. Gibt es eine hinreichende Bedingung für Isomorphie?

- **Notwendige Bedingungen** für Isomorphie: Die beiden Graphen haben die gleiche
  - Knotenanzahl,
  - Kantenanzahl,
  - Gradfolge,
  - Anzahl von Teilgraphen eines bestimmten Typs,
  - ...
- Eine einfache **hinreichende Bedingung** für Isomorphie gibt es im allgemeinen Fall nicht.

→ S. 33, bzw. PO S. 12

1.20 Geben Sie Definition und Eigenschaften des Laplace-Operators an.

- Sei f für alle $t \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ definiert. Ist das (uneigentliche) Integral

  $$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \partial t, \quad s \in \mathbb{R},$$

  für $s > a$ konvergent, so heißt $F(s)$, $s > a$, die **Laplace-Transformierte** von $f(t)$, in Zeichen $L(f)$. → S. 135

- L ist ein linearer Operator, d. h. im gemeinsamen Existenzintervall der Laplace-Transformierten gilt:

  $$L(C_1 f_1 + C_2 f_2) = C_1 L(f_1) + C_2 L(f_2), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

  → S. 136

- Seien $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ stetig und $f^{(n)}$ stückweise stetig in jedem Intervall $[0, A], A \in R, A > 0$, und seien $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ von höchstens exponentieller Ordnung für $t \to \infty$. Dann existiert $L(f^{(n)})$ für alle genügend großen s, und es gilt:

  $$L(f^{(n)}) = s^n L(f) - s^{n-1} f(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

  → S. 138

- Eine wesentliche Eigenschaft der Laplace-Transformation ist ihre Umkehrbarkeit. Auch die inverse Laplace-Transformation ist linear, d. h. es gilt:

  $$L^{-1}(c_1 F_1 + c_2 F_2) = c_1 L^{-1}(F_1) + c_2 L^{-1}(F_2).$$

  → S. 138

1.21 Erklären Sie: Totales Differential.

- Eine Funktion $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt in $x_0 \in M$ **total differenzierbar**, wenn es ein lineares Funktional L auf dem $\mathbb{R}^n$ und eine Funktion $\Delta : M \to \mathbb{R}$ gibt mit:

$$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + \Delta(x),\ x \in M$$

  und

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta(x)}{|x - x_0|} = 0.$$

  L heißt **totales Differential** von f im Punkt x_0.

→ S. 72

1.22 Wie lautet der Hauptsatz über implizite Funktionen?

- Sei M eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und $F : M \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Ist $F(x_0, y_0) = 0$ für einen Punkt $(x_0, y_0) \in M$ und gilt: F_x und F_y sind in einer Umgebung von (x_0, y_0) vorhanden, stetig und $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung U von x_0 und eine Umgebung V von y_0 so, dass durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ eine stetige Funktion $f : U \to V$ implizit dargestellt wird, für die $y_0 = f(x_0)$ gilt.

→ S. 82

1.23 Was versteht man unter einer gewöhnlichen erzeugenden Funktion? Welche Auswirkungen haben Operationen mit Folgen auf deren erzeugende Funktion? Welche Anwendungen von erzeugenden Funktionen kennen Sie? Wie lautet die Definition der allgemeinen erzeugenden Funktion? Wie erhält man daraus die gewöhnliche, die exponentielle und die trigonometrische Fourierreihe?

- Sei (a_n) eine Folge reeller (oder komplexer) Zahlen, der wir die formale Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ zuordnen. Besitzt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ den Konvergenzradius $R > 0$, so stellt $A(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für $|x| < R$ eine Funktion dar, aus der man die Folge (a_n) eindeutig bestimmen kann. Aus der Theorie der Potenzreihen wissen wir:

$$a_n = \frac{A^{(n)}(0)}{n!},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

  In diesem Fall nennt man $A(X)$ die **gewöhnliche erzeugende Funktion** der Folge (a_n). → S. 166

- **Auswirkungen** der Operationen mit Folgen auf deren erzeugende Funktion:

  1. Haben die Folgen (a_n) bzw. (b_n) die erzeugenden Funktionen $A(x)$ bzw. $B(x)$, so hat für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) die Folge $(\lambda a_n + \mu b_n)$ die erzeugende Funktion $\lambda A(x) + \mu B(x)$.

2. Haben die Folgen (a_n) bzw. (b_n) die erzeugenden Funktionen $A(x)$ bzw. $B(x)$, so hat die Folge $(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})$ die erzeugende Funktion $A(X) \cdot B(X)$.
3. Hat die Folge (a_n) die erzeugende Funktion $A(x)$, so hat die Folge $(n \cdot a_n)$ die erzeugende Funktion $x \cdot A'(X)$.
4. Hat die Folge (a_n) die erzeugende Funktion $A(x)$, so hat die Folge $a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0 \ldots$ die erzeugende Funktion $\frac{A(x)+A(-x)}{2}$ und die Folge $0, a_1, 0, a_2, 0, a_3, 0, a_5 \ldots$ die erzeugende Funktion $\frac{A(x)-A(-x)}{2}$.
5. Ist $A(X)$ erzeugende Funktion der Folge (a_n) und ist $B(x) = \frac{1}{1-x}$, so ist $\frac{1}{1-x}A(x)$ die erzeugende Funktion der Folge $(\sum_{k=0}^{n} a_k)$, also der Folge der Partialsummen der Folge (a_n).
6. Es gilt
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$.

→ S. 167ff

- **Anwendungen von erzeugenden Funktionen**:
  1. Vereinfachung von Ausdrücken
  2. Beweis von Identitäten
  3. Anwendung auf kombinatorische Abzählprobleme

→ S. 168f

- Sei $(f_n(x))$ eine Funktionenfolge derart, dass für eine geeignete Familie F von Folgen gilt: Sind $(a_n), (b_n) \in F$ und gilt
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n f_n(x),$$
so ist $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir fassen nun
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$$
als **verallgemeinerte erzeugende Funktion** für die Folge $(a_n) \in F$ auf.
→ S. 171

- **Spezialfälle**:
  1. $(f_n(x)) = (x^n)$ ergibt die oben behandelte gewöhnliche erzeugende Funktion.
  2. $(f_n(x)) = (\frac{x^n}{n!})$ ergibt die sogenannte exponentielle erzeugende Funktion.
  3. $(f_n(x)) = (1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots)$ führt auf die trigonometrische Fourierreihe.

→ S. 171