Institut für Computergraphik und Algorithmen

Abteilung für Algorithmen und Datenstrukturen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

Prof. Petra Mutzel
Günther Raidl
Gunnar Klau
Gabriele Kodydek
René Weiskircher

Wintersemester 2001/2002

Klausur zur Vorlesung
Algorithmen und Datenstrukturen 2
14. Dezember 2001

a.) Machen Sie bitte die folgenden Angaben in deutlicher Blockschrift:

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________ Studienkennzahl: ______________________

b.) Legen Sie während der Klausur Ihren Studentenausweis vor sich auf das Pult.

c.) Denken Sie daran, dass keinerlei Hilfsmittel erlaubt sind – weder Taschenrechner, irgendwelche Unterlagen, Handys,...

VOR DER ABGABE AUSZUFÜLLEN:

d.) Geben Sie bitte die Anzahl der zusätzlich abgegebenen Blätter an:

Aufgabe	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5		Note
maximale Punktzahl	10	15	10	15	20	70	———
erreichte Punktzahl							

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: Suchen in Texten **(10 Punkte)**

Sie möchten in einem Text, der im Array $T[1], \ldots, T[N]$ gespeichert ist, das Muster

TCAGAGGCTTTACGAACAC

suchen, das im Array $P[1], \ldots, P[M]$ gespeichert ist. Dazu verwenden Sie den Algorithmus von Knuth-Morris-Pratt in der folgenden Realisierung:

(0) Algorithmus Knuth-Morris-Pratt(T,P);
(1) Berechnung des Arrays `NEXT[]`;
(2) $j = 0$;
(3) Für $i = 1, ..., N$ {
(4) Solange (($j = 0$) UND ($P[j+1] != T[i]$)) { $j = \texttt{NEXT}[j]$;}
(5) Falls ($P[j+1] == T[i]$) { $j = j+1$;}
(6) Falls ($j == M$) { P gefunden; STOP;}
(7) }

Es wird also zunächst in Schritt 1 das Array `NEXT[]` berechnet.
Geben Sie das in Schritt 1 berechnete `NEXT`-Array für die gegebene Zeichenkette nach der Berechnung an:

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
`NEXT`																			

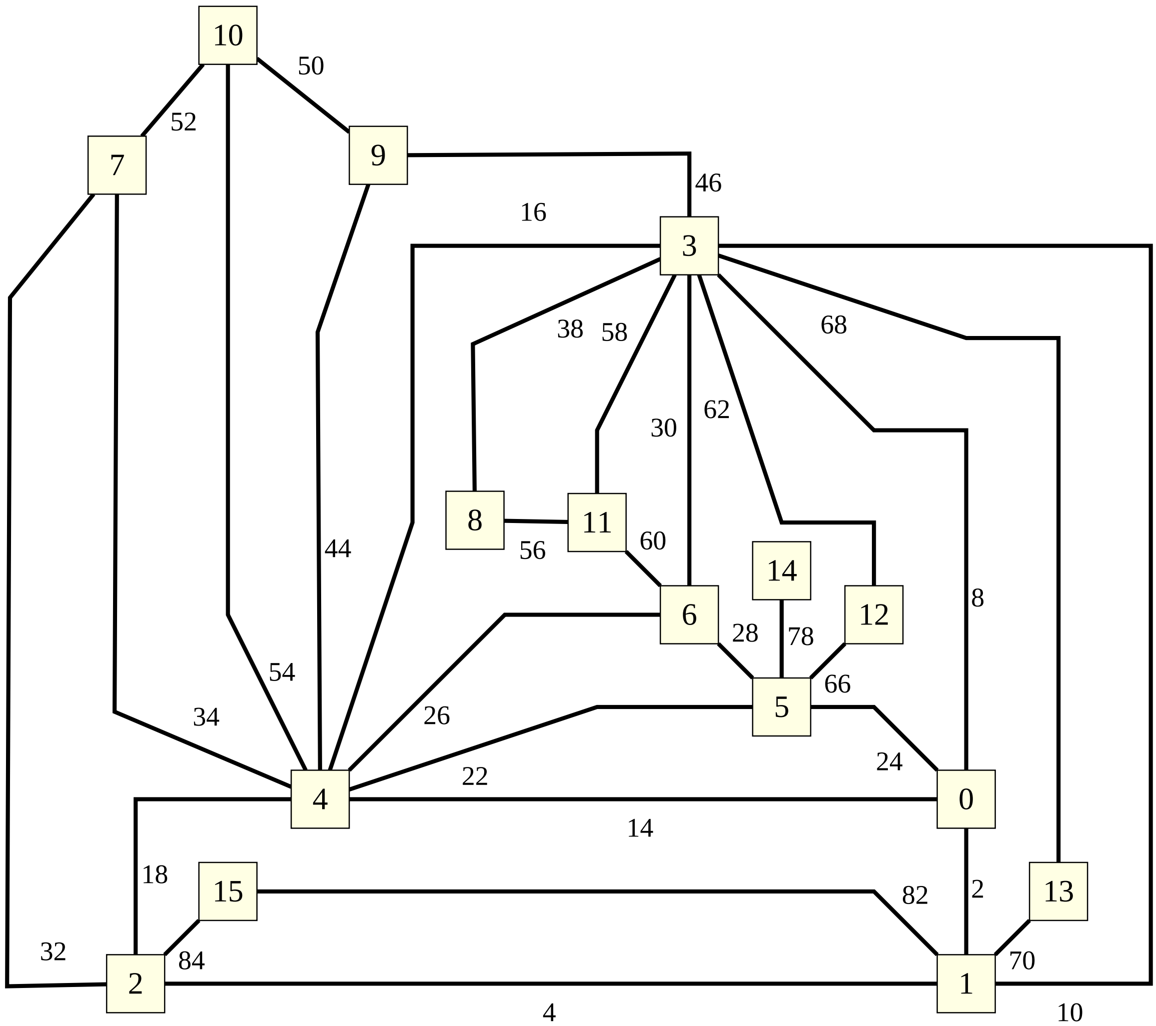
Aufgabe 2: Maximale Kreisfreie Menge **(15 Punkte)**

In dem unten abgebildeten Graphen soll eine Teilmenge der Kanten gefunden werden, bei der die Summe der Gewichte der enthaltenen Kanten maximal ist unter der Bedingung, dass der durch die Kanten induzierte Teilgraph kreisfrei ist. Die Menge darf also nicht alle Kanten eines Kreises des Graphen enthalten.

a.) Welchen Algorithmus aus der Vorlesung können Sie auf dieses Problem anwenden? Wie müssen Sie den Algorithmus modifizieren? (5 Punkte)

b.) Führen Sie den Algorithmus anhand des unten abgebildeten Graphen durch. Geben Sie dabei nach Behandlung jeder Kante den Zustand der im Algorithmus verwendeten Datenstrukturen an. (5 Punkte)

c.) Geben Sie die Laufzeit des Algorithmus in Θ-Notation an. Begründen Sie Ihre Behauptung. (5 Punkte)

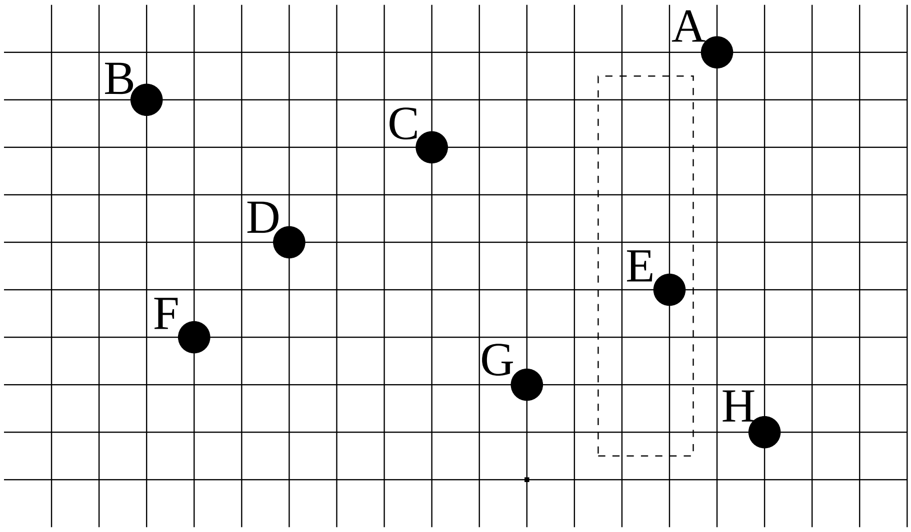


Aufgabe 3: 2D-Suchbaum **(10 Punkte)**

Gegeben ist die Konfiguration von Punkten, die unten abgebildet ist.

a.) Zeichnen Sie einen balancierten 2D-Suchbaum für diese Konfiguration. Schreiben Sie dabei zu jeder Ebene des Baums dazu, ob die Söhne der Knoten dieser Ebene durch ihre X- oder Y-Koordinate bestimmt sind. (5 Punkte)

b.) Welche Knoten des Baums müssen Sie bei der Bereichsabfrage nach dem mit gestrichelten Seiten gezeichneten Rechteck betrachten? Zählen Sie alle Knoten auf, die der Bereichssuche-Algorithmus betrachtet. (5 Punkte)



Aufgabe 4: Scheduling **(15 Punkte)**

Ein Betrieb stellt Weihnachtskrippen her. Jede Krippe wird jeweils von einem Holzschnitzer geschnitzt, man kann die Herstellung nicht auf mehrere Schnitzer verteilen. Je nach Komplexität der Krippe ist eine unterschiedliche Anzahl von Arbeitsstunden nötig, um sie zu vollenden.

Die nachfolgende Tabelle zeigt für 10 Krippen, die bestellt sind, die Anzahl der zur Herstellung nötigen Stunden.

Krippe	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9	K_{10}
Arbeitsstunden	38	23	6	2	22	25	32	36	39	40

Es sind noch 40 Arbeitsstunden bis Weihnachten.

a.) Welche aus der Vorlesung bekannte Heuristik kann man verwenden, um die Krippen auf möglichst wenige Schnitzer zu verteilen (unter Berücksichtigung der verbleibenden Zeit)? Beschreiben Sie die Funktionsweise der Heuristik. (5 Punkte)

b.) Verteilen Sie die Krippen auf eine möglichst kleine Anzahl von Schnitzern, so dass alle Krippen in den 40 Arbeitsstunden bis Weihnachten fertig werden. Geben Sie für jeden Schnitzer an, welche Krippen er bastelt und wieviele Stunden er arbeitet. (5 Punkte)

c.) Zeigen Sie, dass bei Anwendung der Heuristik aus der Vorlesung höchstens $2S_{opt} + 1$ Schnitzer nötig sind, wenn S_{opt} die minimal mögliche Anzahl von Schnitzern ist. (5 Punkte)

Aufgabe 5: Branch and Bound **(20 Punkte)**

Wir betrachten das Rucksack-Problem, das sich für den Weihnachstmann mit vier verschiedenen Geschenken stellt. Die folgende Tabelle gibt jeweils für jedes der Geschenke G_1,G_2,G_3 und G_4 ihr Gewicht und ihren Wert an. Der Rucksack des Weihnachtsmanns kann ein Gewicht von 100 Einheiten transportieren.

	G_1	G_2	G_3	G_4
Gewicht g_i	50	30	25	15
Wert w_i	10	8	6	1

Sei $F = (F_1, \dots, F_4)$ die Folge der vier Gegenstände absteigend sortiert nach dem Wert des Quotienten $\frac{w_i}{g_i}$.
In einem Branch-and-Bound Algorithmus wird das Problem in Teilprobleme zerlegt, indem man in der durch F festgelegten Reihenfolge die Werte der Entscheidungsvariablen x_i der Gegenstände fixiert.
Dadurch ergibt sich ein Branch-and-Bound Baum. Für jeden Knoten v des Baums werden eine obere und eine untere Schranke für die im Teilbaum mit Wurzel v enthaltene beste Lösung bestimmt. Seien nun die Variablen x_1 bis x_k für $1 \leq k \leq 4$ schon fixiert, wobei x_i der für $1 \leq i \leq k$ den Wert 1 hat, falls Geschenk F_i eingepackt wird und 0 sonst.
Die untere Schranke erhält man, indem man alle Gegenstände, deren Variable noch nicht festgelegt ist, in der durch F gegebenen Reihenfolge durchläuft und den aktuellen Gegenstand einpackt, falls noch Platz im Rucksack ist. Man erhält eine gültige Lösung für das Problem, deren Wert die untere Schranke ist.
Man erhält die obere Schranke, indem man ebenfalls alle Gegenstände, deren Variable noch nicht festgelegt ist, in der durch F gegebenen Reihenfolge durchläuft. Man packt aber nun alle Genstände ein, bis man zu dem ersten Gegenstand F_i kommt, der nicht mehr in den Rucksack passt. Sei r die noch freie Kapazität des Rucksacks. Dann zählt man $r\frac{g_i}{w_i}$ noch zu dem Wert der Gegenstände im Rucksack dazu.

a.) Zeigen Sie, dass die obere Schranke korrekt ist. (10 Punkte)

b.) Zeichnen Sie den Branch-and-Bound Baum für das Problem und schreiben Sie an jeden Knoten den Wert der unteren und oberen Schranke. Nehmen Sie an, dass beim Fixieren einer neuen Variable immer zuerst das Kind betrachtet wird, bei dem die Variable auf 1 gesetzt wird und dass Sie den Baum mittels Tiefensuche durchmustern. Achten Sie darauf, dass Sie nur die Teile des Baums zeichnen, die zur Berechnung der optimalen Lösung nötig sind. (10 Punkte)