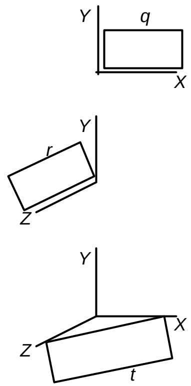
Komposition von Relationen



Es seien X, Y (gewöhnliche) Mengen.

Eine *Relation* q von X in Y ist eine Teilmenge des Kartesischen Produktes $X \times Y$ *und*

Eine *Relation* r von Y in Z ist eine Teilmenge des Kartesischen Produktes $Y \times Z$:

$t := q \circ r$ ist eine Relation von X in Z,

$t := q \circ r = \{(x,z) \mid \exists\, y : (x,y) \in q \wedge (y,z) \in r\}$

Fuzzy-Relationen

Seien X, Y (gewöhnliche) Mengen und sei $X \times Y$ *deren Kartesisches Produkt.*

- $L(X)$: die Menge aller Fuzzy sets in X.
- $L(Y)$: die Menge aller Fuzzy sets in Y.
- $L(X \times Y)$: die Menge aller Fuzzy sets in $X \times Y$.

Eine *Relation* der beiden Mengen X und Y ist Teilmenge von $X \times Y$.
Eine *Fuzzy Relation* R von X und Y ist F*uzzy*-Teilmenge von $L(X \times Y)$.

Seien drei Mengen X, Y, Z und zwei Fuzzy-Relationen *gegeben* :

- Q in $L(X \times Y)$,
- R in $L(Y \times Z)$.

Wie lassen sich die Fuzzy-Relationen Q und R
zu einer neuen Fuzzy-Relation $T \in L(X \times Z)$ kombinieren?

Lotfi Zadeh, 1973: Komposition von Fuzzy-Relationen

$\wedge$ (“und”) $\rightarrow$ *min*
V (“oder”) $\rightarrow$ *max*

- Q ist Fuzzy-Relation von X und Y, d. h. Q ist Fuzzy-Teilmengen von $L(X \times Y)$,
- R ist Fuzzy-Relation von Y und Z, d. h. R ist Fuzzy-Teilmenge von $L(Y \times Z)$.
- $T = Q \circ R$ ist Fuzzy-Relation von X und Z,

d.h.: T ist Fuzzy-Teilmenge von $L(X \times Z)$ mit Zugehörigkeitsfunktion

$$m_T(x,z) = \max_{x \in X} \min \{m_Q(x,y);\, m_R(y,z)\},\ y \in Y$$

Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes

Lotfi A. Zadeh, 1968: Linguistische Variablen

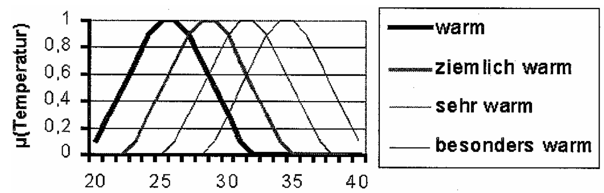
Linguistische Ausdrücke bestehen aus

- Linguistischen Variablen, die durch
- Linguistische Operatoren verknüpft sind.

Werte einer Linguistischen Variablen: Fuzzy sets auf numerischer Skala

Linguistische Operatoren werden durch Fuzzy-Operatoren beschrieben

Beispiel: Linguistische Variable *Temperatur*



Lotfi A. Zadeh, 1968: Linguistische Variable

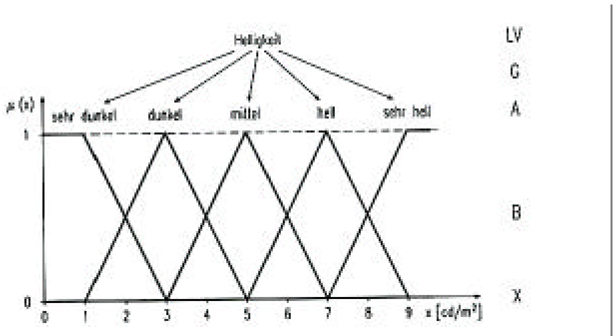


Abb. 4.1. Darstellung der Terme der LV "Helligkeit" über der numerischen Werteskala in [cd/m^2].

Lotfi A. Zadeh, 1968: Linguistische Operatoren

Definition

Ein linguistischer Modifikationsoperator ist ein einstelliger Operator auf einer linguistischen Werteskala. Die Anwendung auf einen Term α führt auf einen neuen Term α'.

Wird der Term α durch ein fuzzy set $A = \{(x, \mu_A(x)\}$ dargestellt, so kann die Modifikation mit Hilfe folgender Mengenoperationen beschrieben werden:

Konzentration	CON (*A*)	
Dehnung	DIL (*A*)	
Komplementbildung	$\neg A$	
Kontrastverstärkung	INT (A)	$\mu_{INT}(x) = \begin{cases} 2\,\mu_A(x)^2 \text{ für } \mu_A(x) \in [0{,}0.5] \\ 1-2[1-\mu_A(x)]^2 \quad \text{sonst} \end{cases}$

Lotfi A. Zadeh, 1968: Linguistische Operatoren

Beispielsweise kann die Anwendung eines Modifikators auf einen T erm α nach den folgenden Regeln erfolgen:

sehr α	$\rightarrow$	CON (*A*),
sehr sehr α	$\rightarrow$	CON [CON (*A*)],
ziemlich α	$\rightarrow$	CON (*A*),
Mehr als α	$\rightarrow$	$MA = \{ x;\, \mu_{MA}(x)) \mid \mu_{MA}(x) = \mu_A(x)^{1,25} \}$,
recht α	$\rightarrow$	INT [MA$\cap$CON ($\neg A$)]
nicht α	$\rightarrow$	$\neg A$.

Lotfi A. Zadeh, 1968: Linguistische Operatoren

Beispiel (Baldwin, 1979)**:**

Die Definition der linguistischen Variable „Wahrheit“ nach [Baldwin 1979] geht von folgender Menge A_{Wahrheit} der möglichen Terme aus:

A_{Wahrheit} = { absolut falsch, sehr falsch, falsch, ziemlich falsch,
unentschieden, ziemlich wahr, wahr, sehr wahr, absolut wahr}

Lotfi A. Zadeh, 1968: Linguistische Operatoren

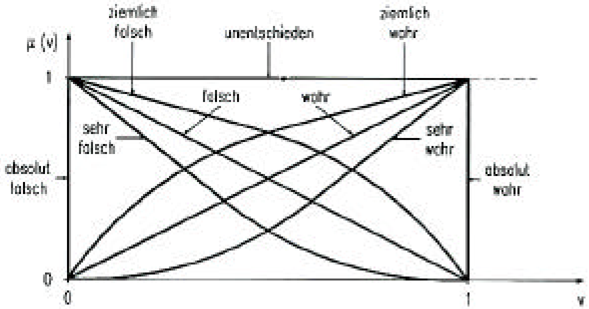


Abb. 4.2. Zugehörigkeitsverläufe für die Terme der LV "Wahrheit" nach [Baldwin, 1979].

Lotfi A. Zadeh, 1968: Linguistische Operatoren

Beispiel (Baldwin, 1979)**:**
Die Zugehörigkeitsfunktionen der Terme berechnen sich folgendermaßen:

$$\mu_{absolut\ wahr}(v) = \begin{cases} 1 & \text{für } v = 1 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\mu_{absolut\ falsch}(v) = \begin{cases} 1 & \text{für } v = 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\mu_{wahr}(v) = v,$$

$$\mu_{falsch}(v) = 1 - v,$$

$$\mu_{sehr\ wahr}(v) = v^2,$$

$$\mu_{sehr\ falsch}(v) = (1 - v)^2,$$

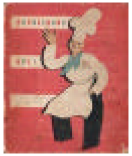
$$\mu_{ziemlich\ wahr}(v) = v^{1/2},$$

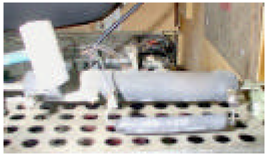
$$\mu_{ziemlich\ falsch}(v) = (1 - v)^{1/2},$$

$$\mu_{unentschieden}(v) = 1.$$

Lotfi A. Zadeh, 1973: Fuzzy Algorithms

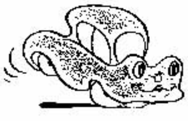
Beispiele:





- Cooking recipes (Kochrezepte),
- Directions for repairing a TV set, (Reparatur eines Fernsehgerätes)

- Instructions on how to treat a disease, (Krankheitsbehandlung)



- Instructions for parking a car (Einparken eines Autos)

Lotfi A. Zadeh, 1973: Fuzzy Algorithms

1) Anweisungen:

x ≈ 5
x = *small*
x is *small*
x is *not large and not very small*

2) Fuzzy Bedingte Aussagen:

If *x* is *small* **then** y is *large*
else y is *not large*.
If *x* is *positive* **then** decrease y *slightly*.
If *x* is *much greater* than 5 **then** stop.
If *x* is *very small* **then** go to 7.

3) Unbedingte Befehle:

multiply *x* by *y*
decrease *x slightly*
delete the first *few* occurrences of 1
go to 7
print *x*
stop.

Lotfi A. Zadeh, 1973: Fuzzy Algorithms

Fuzzy Definitional Algorithms:
(definierend, kategorisierend) kategorisieren einen *fuzzy* Input

Fuzzy Generational Algorithms:
(erzeugend) erzeugen einen *fuzzy* Output

Fuzzy Relational Algorithms:
(beschreibend) beschreiben ein System im Fließzustand

Fuzzy Decisional Algorithms:
(entscheidend) bringen Befehle aufgrund fortlaufenden Feedbacks hervor

Fuzzy Definitional Algorithms

Beispiel: zum Begriff „oval"

T sei ein zu testendes Symbol;

CALL CONVEX ruft einen Unteralgorithmus CONVEX auf, der testet, ob *T* convex ist, oder nicht;

IF *A* THEN *B* wird interpretiert als: IF *A* THEN *B* oder gehe zum nächsten Befehl

Fuzzy Definitional Algorithms

Fuzzy-Algorithmus *OVAL*

1) IF *T* is not closed THEN *T* is not *oval*; stop.

2) IF *T* is self-intersecting THEN *T* is not *oval*; stop.

3) IF *T* is not CALL CONVEX THEN *T* is not *oval*; stop.

4) IF *T* does not have two *more or less* orthogonal axes of symmetry THEN *T* is not *oval*; stop.

5) IF the major axis of *T* is not *much* longer than the minor axis THEN *T* is not *oval*; stop.

6) *T* is *oval*; stop.

Fuzzy Definitional Algorithms

Unteralgorithmus *CONVEX*

1) $x = a$ (some initial point on *T*).

2) Choose a direction of movement along *T*.

3) $t \approx$ direction of tangent to *T* at *x*.

4) $x' \approx x+1$ (move from x to a neighboring point).

5) $t' \approx$ direction of tangent to *T* at x'.

6) $a \approx$ angle between t' and t.

7) $x \approx x'$.

8) $t \approx$ direction of tangent to *T* at *x*.

9) $x' \approx x+1$

10) $t' \approx$ direction of tangent to *T* at x'.

11) $b \approx$ angle between t' and t.

12) IF *b* does not have the same sign as *a* THEN *T* is not convex; return

13) IF $x' \approx a$ THEN *T* is convex; return

14) Go to 7).

Fuzzy Generational Algorithms

Fuzzy Generational Algorithms schaffen etwas, anstatt zu definieren!

Beispiele:

- Produktion von Handschriften, Kochrezepten, Musik, natürlicher Sprache, Laute
- Schreiben eines großen „P“
- Herstellen von Schokoladenkuchen

1) $i = 1$.
2) $X(i) = b$ (first dot at base).
3) $X(i+1) \approx X(i) + h/6$
(put dot approximately $h/6$ units of distance above $X(i)$).
4) $i = i+1$.
5) IF $i = 7$ THEN make right turn and go to 7).
6) Go to 3).
7) Move by $h/6$ units; put a dot.
8) Turn by 45°; move by $h/6$ units; put a dot.
9) Turn by 45°; move by $h/6$ units; put a dot.
10) Turn by 45°; move by $h/6$ units; put a dot.
11) Turn by 45°; move by $h/6$ units; put a dot; stop.

Fuzzy Relational Algorithms

- beschreiben Relationen zwischen Fuzzy-Variablen
- Spezielle Fuzzy Relational-Algorithms, die das Verhalten eines Systems beschreiben, heißen *Fuzzy Behavioral Algorithms*.

Beispiel: Algorithmus R(x,y,z):

1) IF *x* is *small* and *y* is *large* THEN *z* is *very small* ELSE *z* is *not small* .
2) IF *x* is *large* THEN (IF *y* is *small* THEN *z* is *very large* ELSE *z* is *small*) ELSE *z* and *y* are *very small* .

Fuzzy Behavioral Algorithms

Beispiel:

S sei ein Fuzzy-System, dessen mögliche (nicht fuzzy) Zustände (states) seien: q_1 und q_2.
Es gebe zwei fuzzy inputs: *low* und *high.*
Es gebe zwei fuzzy outputs: *large* und *small*.

u_t sei *input* zur Zeit t.
y_t sei *output* zur Zeit t.
x_t sei *state* zur Zeit t.

u_t \ x_t	x_{t+1}: q_1	x_{t+1}: q_2	y_{t+1}: q_1	y_{t+1}: q_2
low	q_2	q_1	*large*	*small*
high	q_1	q_1	*small*	*large*

Fuzzy Behavioral Algorithms

Beispiel: Ballon

Variablen: Luftmenge im Ballon (*gegenwärtiger Zustand, state*)
Menge, um die die Luft im Ballon wächst (Vorgang)
Oberflächenspannung des Ballons (Ergebnis)

Fuzzy-Algorithmus:

WENN *wenig* Luft im Ballon ist und nur *wenig* hinzugepumpt wird, DANN wird die Oberflächenspannung nur *wenig* zunehmen.

WENN *wenig* Luft im Ballon ist und *viel* hinzugepumpt wird, DANN wird die Oberflächenspannung *stark* zunehmen.

WENN *viel* Luft im Ballon ist und *wenig* hinzugepumpt wird, DANN wird die Oberflächenspannung *mäßig* zunehmen.

WENN *viel* Luft im Ballon ist und *viel* hinzugepumpt wird, DANN wird die Oberflächenspannung nur *sehr stark* zunehmen.

Fuzzy Decisional Algorithms

Beispiele:

- Parken eines Autos,
- Überwinden einer Kreuzung,
- Transportieren eines Objekts,
- Hauskauf.

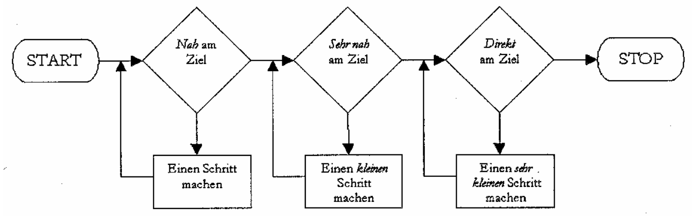
Algorithmus *INTERSECTION*:

1) **If** signal lights **then** *SIGNAL*
else if stop sign **then** call *SIGN*
else if blinking light **then** call *BLINKING*
else call *UNCONTROLLED.*

Fuzzy Decisional Algorithm

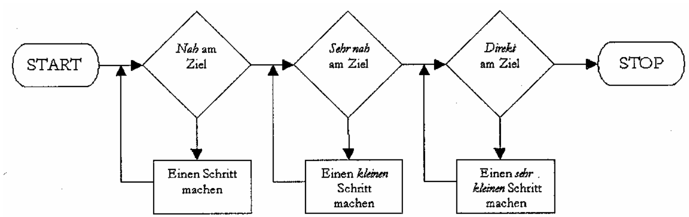
Unteralgorithmus *SIGN*:

1) **IF** no stop sign on your side **THEN IF** no cars in the intersection
THEN cross at *normal* speed
ELSE wait for cars to leave the intersection and then cross.
2) **IF** not *close* to intersection
THEN continue approaching at normal speed for a *few* seconds; go to 2).
3) *Slow down.*



Fuzzy Decisional Algorithm

4) **IF** in a *great* hurry and no police cars in sight and no cars in the intersection or its *vicinity* **THEN** cross the intersection at *slow* speed.
5) **IF** *very close* to intersection **THEN** stop; go to 7).
6) Continue *approaching* at very *slow* speed; go to 5).
7) **IF** no cars *approaching* or in the intersection **THEN** cross.
8) Wait a *few* seconds; go to 7).



Fuzzy Decisional Algorithms

Beispiel: Transfer eines Subjekts mit verbundenen Augen

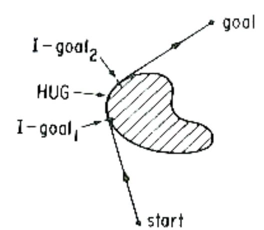


Fig. 4. Problem of transferring blindfolded subject from *start* to *goal.*

Fuzzy Decisional Algorithms

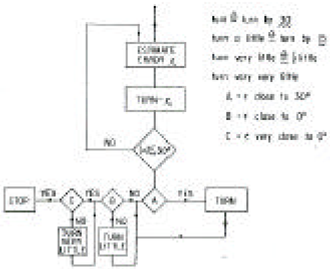


Fig. 5. Subalgorithm ALIGN.

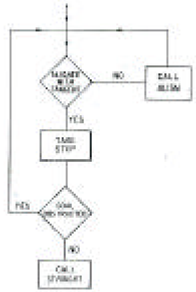


Fig. 6. Subalgorithm HUG.

Fuzzy Decisional Algorithms

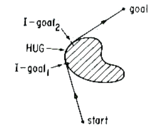


Fig. 4. Problem of transferring blindfolded subject from *start* to *goal*.

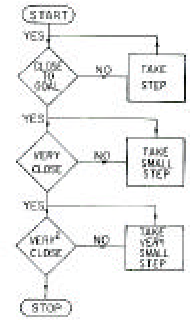


Fig. 7. Subalgorithm STRAIGHT.