Mathematatik 1 für Informatiker - Vorlesungsprüfung - (Panholzer)

(1) [8 Punkte = 6 (a) + 2 (b)]

(a) Man definiere die Begriffe "binäre Operation", "algebraische Struktur", "Halbgruppe", "Monoid", "Gruppe" und "kommutative Gruppe".

(b) Man gebe jeweils ein konkretes Beispiel für die folgenden algebraischen Strukturen an: (*i*) eine Halbgruppe, die kein Monoid ist, (*ii*) ein Monoid, das keine Gruppe ist, (*iii*) eine nicht-kommutative Gruppe.

(2) [8 Punkte = 6 (a) + 2 (b)]

(a) Man definiere den Begriff der "Konvergenz einer unendlichen Reihe" und formuliere (ohne Beweis) drei Sätze, die Aussagen über die Konvergenz von Reihen machen (= "Konvergenzkriterien").

(b) Gegeben sind weiters die folgenden beiden unendlichen Reihen:

$$R1: \; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \qquad R2: \; 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \mp \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Man gebe jeweils ein geeignetes Konvergenzkriterium an, womit sich entscheiden läßt, ob die entsprechende Reihe konvergiert oder nicht. Begründen Sie die Wahl des jeweiligen Kriteriums, indem Sie zeigen, daß die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit desselben erfüllt sind.

(3) [8 Punkte] Man beweise durch vollständige Induktion für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k 3^k = \frac{3^{n+1}(2n-1)+3}{4}.$$

(4) [8 Punkte = 5 (a) + 3 (b)] Zur Konvergenz von Folgen.

(a) Man untersuche die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ auf Konvergenz und bestimme den Grenzwert, indem man zwei geeignete Folgen $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $b_n \leq a_n \leq c_n$ konstruiert und das Sandwich-Theorem anwendet:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

(b) Man gebe zwei reelle Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ an, für die folgendes gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0, \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{b_n} = +\infty.$$

(5) [8 Punkte = 5 (a) + 3 (b)] Man betrachte die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche bestimmt ist durch die Bilder der Basisvektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$:

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -15 \\ 20 \end{pmatrix}, \; f(\vec{y}) = \begin{pmatrix} -25 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Man bestimme die zur linearen Abbildung f zugehörige Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) Man berechne alle reellen Eigenwerte der Matrix A (und somit der linearen Abbildung f).