Mathematik 1 für Informatik PO

Prüfung vom 1.7.2008, VO 4.0 113056, Prof. Günther Karigl

5 Beispiele mit jeweils 8 Punkten. 3 mal Praxis, 2 mal Theorie (hier die letzten 2 Beispiele). Eventuell nützlich war auch diese Anmerkung beim Austeilen der Angaben: "Sie müssen zur Prüfung angemeldet sein, um die Prüfung zu machen. Wenn sie nicht angemeldet sind, können sie es zwar ausfüllen, aber wir können es nicht beurteilen." → wer sich die Prüfung ohne Risiko mal anschauen möchte, kann dies anscheinend tun.

Bsp 1 Vollständige Induktion

Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $x_{n+1}=\frac{x_n}{x_n+2}$ mit $x_1=1$.

Man berechne die Werte für x_2 bis x_5 und beweise mittels vollständiger Induktion, dass $x_n=\frac{1}{2^n-1}$.

Lösung: $\frac{1}{2^{n+1}-1}=\frac{\frac{1}{2^n-1}}{\frac{1}{2^n-1}+2}$. Als kleine Hilfestellung: $2^n-1=a$.

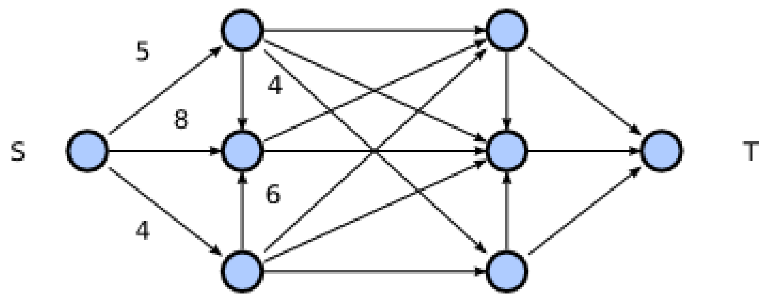
$$x_{n+1}=\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}+2}=\frac{\frac{1}{a}}{\frac{2\cdot a+1}{a}}=\frac{a}{(2\cdot a+1)\cdot a}=\frac{1}{2\cdot a+1}=\frac{1}{2\cdot(2^n-1)+1}=\frac{1}{2^{n+1}-2+1}=\frac{1}{2^{n+1}-1}=A$$

$$x_n=\frac{1}{2^n-1}\Rightarrow x_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}-1}=B$$

$A=B$, was zu beweisen war

Bsp 2 Graphentheorie

Gegeben ist ein gerichteter, gewichteter Graph folgender Bauart.



Bestimmen sie einen kürzesten Weg vom Knoten S zum Knoten T. (Bei der tabellarischen Lösungsform von Dijkstra: 8 Knoten, dh. 8 Zeilen.) Bestimmen sie des weiteren die Distanz von S zu T.

Bsp 3 Differentiation

Untersuchen sie die Funktion $f(x)=x^2 e^x$ auf Monotonie und Konvexität.

(Monotonie: Nullstellen von f' finden. Ist f' in dem entsprechenden Intervall > 0, dann monoton steigend, < 0 fallend.)

(Konvexität: f'' > 0, dann konvex, f'' < 0 konkav)

Berechnen sie folgende Grezwerte:

1. $\lim\limits_{x}^{-\infty} f(x)=0$, was jedoch nicht sein muss, da eine unbestimmte Form. Muss zur Sicherheit mit der Formel von de L'Hospital untersucht werden.
2. $\lim\limits_{x}^{+\infty} f(x)=+\infty$
3. $\lim\limits_{x}^{0} f(x)=0$

Bsp 4 Inklusions- und Exklusionsprinzip

Erklären sie das Inklusions-Exklusions-Prinzip für 3 Mengen. Zeigen sie es anhand eines beliebigen, selbst gewählten Beispiels. (Einfach: Wieviele Zahlen $1 \leq n \leq 1000$ sind durch irgendwas teilbar? Durch 3 und 5 teilbar sind $\left\lfloor \frac{1000}{3 \cdot 5} \right\rfloor$)

Bsp 5 Matrizen / Lineare Algebra

Gegeben ist folgende 3x3 Matrix der ungefähren Bauart $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (A enthielt zahlreiche -1 und auch 0). (Berechnung von 3x3 mittels des Schemas von Sarrus: Am Ende kam es auf Folgendes hinaus: $21-20=1$. Die Determinante ist also $\neq 0$, daher invertierbar, Spalten- / Zeilenvektoren linear unabhängig, voller Rang, eindeutig lösbar, bilden Basis weil alle 3 Spalten- / Zeilenvektoren linear unabhängig.)

Berechnen sie $|A|$ und nutzen sie dies, um folgende Fragen zu beantworten:

1. Die Matrix $(A^T)^{-1}$ existiert: **ja** / nein
2. Spaltenvektoren (Zeilenvektoren) sind: linear abhängig / **linear unabhängig**
3. Das durch $\vec{A}=\vec{0}$ gegebene lin. Gleichungssystem ist: **lösbar** / nicht lösbar
4. Rang des Gleichungssystems: 1 / 2 / **3**
5. Matrix bildet eine Basis in $\mathbb{R}^3$: **ja** / nein