

Mathematik 1, Musterprüfung (Winkler)

1. Sei $T \subseteq \mathbb{N}$.

- (a) Unter welchen beiden Voraussetzungen an T garantiert das Induktionsaxiom (nach Peano) $T = \mathbb{N}$?
- (b) Geben Sie eine verbale Formulierung für die durch folgende Formel ausgedrückte Eigenschaft einer Menge $T \subseteq \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} ((\forall k \in \mathbb{N} (k < n \rightarrow k \in T)) \rightarrow n \in T)$$

- (c) Kann man aus der Eigenschaft in (b) stets auf $T = \mathbb{N}$ schließen?
 - (d) Sei $a_0 = 0$ und $a_{n+1} = a_n + (n+1)$. Zeigen Sie mittels Induktion $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Stellen Sie sich ein rechteckiges Schachbrettmuster vor, bestehend aus m mal n Quadraten mit Seitenlänge 1. Wege seien nur entlang der Ränder dieser Quadrate erlaubt. Die kürzesten Wege vom linken unteren zum rechten oberen Eckpunkt des Rechtecks haben offenbar alle die Länge $m+n$. Die Menge all dieser kürzesten Wege sei mit $K(m, n)$ bezeichnet.

- (a) Wieviele kürzeste Wege gibt es für $m = 6$ und $n = 4$?
- (b) Jeder kürzeste Weg w lässt sich darstellen als eine Abfolge von Schritten w_i nach oben (o) oder nach rechts (r), symbolisch also $w = (w_1, w_2, \dots, w_{m+n})$, z.B. $w = (r, o, r, r, o, o, o, r, r, r)$ (hier ist wieder $m = 6, n = 4$). Beschreiben Sie eine Bijektion f zwischen $K(m, n)$ und der Menge $T(m, n)$ aller m -elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \dots, m+n\}$.
- (c) Geben Sie eine allgemeine Formel für $|K(m, n)|$ an.
- (d) Sei $m = 2$. Für welches $c \in \mathbb{R}$ gilt die asymptotische Formel $|K(2, n)| \sim cn^2$?

3. A sei die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ über dem Körper $\mathbb{R}$, $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die zugehörige lineare Abbildung.
- Bestimmen Sie $f_A(x)$ für den Vektor $x = (1, 1, 1)$.
 - Sei allgemein $y = (y_1, y_2) = f_A(x_1, x_2, x_3)$. Geben Sie Formeln für y_1 und y_2 in Abhängigkeit von x_1, x_2, x_3 an.
 - Ist f_A surjektiv?
 - Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung für die Menge L aller $x = (x_1, x_2, x_3)$ mit $f_A(x) = (1, 0)$.
4. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ sei $a_n = 1 + \frac{1}{n} + (-1)^n(2 - \frac{1}{n^2})$.
- Gelten für die Umgebung $U = U_1(3) = (2, 4)$ von 3 die folgenden beiden Aussagen?
 - $a_n \in U$ für unendlich viele n .
 - Es gibt ein $N = N(\varepsilon) = N(1)$ mit $a_n \in U$ für alle $n \geq N$.
 - Geben Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ an.
 - Geben Sie eine Folge natürlicher Zahlen $n_1 < n_2 < \dots$ an, so dass $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine monotone Teilfolge von $(a_n)_{n \geq 1}$ ist.
 - Warum konvergieren alle monotonen Teilfolgen von $(a_n)_{n \geq 1}$?
5. Gegeben seien die Funktionen $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $g(x) = \frac{1}{1+x}$ und $h(x) = \frac{1}{1-x^2}$.
- Stellen Sie f, g und h als Potenzreihen mit Anschlussstelle $x_0 = 0$ dar und geben Sie deren Konvergenzradius an.
 - Wie sind die c_n im Cauchyprodukt $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ der Reihen $A = \sum_{m=0}^{\infty} a_m$ und $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ definiert?
 - Formulieren Sie (ausführlich) eine (nichttriviale) hinreichende Bedingung für $AB = C$ (Notation von (b)).
 - Berechnen Sie das Cauchyprodukt der Reihen von f und g .