Mathematik 1 für Informatiker und Wirtschaftsinformatiker
Prüfung am 1.2.2008 (Winkler)

Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl:

Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe!

1. Auf den Mengen $A = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ seien die binären Relationen $f_A := \{(x, 2x) \mid x \in A\}$ und $g_A := \{(2x, x) \mid x \in A\}$ gegeben.
   (a) Für welche A gilt $g_A : A \to A$, d.h. wann handelt es sich bei g_A um eine Funktion?
   (b) Für welche A ist f_A eine Funktion, wann sogar injektiv, surjektiv, bijektiv?
   (c) Sind $f \subseteq A \times B$ und $g \subseteq B \times C$ Relationen, so ist (analog zur Komposition von Abbildungen) das Relationenprodukt $g \circ f \subseteq A \times C$ definiert als Relation $\{(a, c) \mid \exists b \in B : (a, b) \in f, (b, c) \in g\}$. Beschreiben Sie $g_A \circ f_A$.
   (d) Sei $f \subseteq A \times A$ eine Relation auf A. Begründen Sie mittels Induktion, dass die rekursive Definition der Iterationen f^n, $n \in \mathbb{N}$, durch $f^0 := \{(x, x) | x \in A\}$ und $f^{n+1} := f \circ f^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ Funktionen $f^n : A \to A$ definiert, sofern $f : A \to A$ (f also selbst eine Funktion ist).

2. Sei G eine Menge und $\circ : G \times G \to G$.
   (a) Wann nennt man G (genauer $(G, \circ)$) eine Gruppe?
   (b) Welche der algebraischen Strukturen $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$, und $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind Gruppen?
   (c) Wann heißt U Untergruppe von G?
   (d) Bestimmen Sie die von i erzeugte Untergruppe $U(i)$ von $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

3. (a) Für welche $i \in \{1,2,3\}$ gibt es ein lineares $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften?

   - $f_1 : (1,0) \mapsto (2,1,0), (0,1) \mapsto (1,2,3)$
   - $f_2 : (1,0) \mapsto (2,1,0), (0,1) \mapsto (1,2,3), (1,1) \mapsto (2,2,2)$
   - $f_3 : (1,0) \mapsto (2,1,0), (0,1) \mapsto (1,2,3), (1,1) \mapsto (3,3,3)$

   (b) Wählen Sie als f ein lineares f_i aus (a). Geben Sie die f zugehörige Matrix A, die dazu transponierte Matrix A^T sowie jene Matrix B an, welche $g := f \circ f^T$ entspricht, wenn $f^T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die A^T zugehörige lineare Abbildung ist.

   (c) Bestimmen Sie die Determinante von B aus Teil (b); wie ergibt sich daraus die Determinante von $2B$?

   (d) Besitzt B einen Eigenvektor zum Eigenwert 0?

4. Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ sei $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $c_n = \frac{1}{n}$ und $d_n = \frac{1}{n+1}$. Weiters sei $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $C = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ und $D = \sum_{n=1}^{\infty} d_n$.

   (a) Berechnen Sie die Partialsummen von B (Anleitung: $b_n = c_n - d_n$).

   (b) Berechnen Sie den Wert von B.

   (c) Begründen Sie $a_n \leq 2b_n$ und damit, ob A konvergiert.

   (d) Erklären Sie, warum NICHT $B = C - D$ gilt (trotz $b_n = c_n - d_n$).

5. (a) Definieren Sie die Ableitung $f'(x_0)$, x_0 innerer Punkt von $D \subseteq \mathbb{R}$, einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$.

   (b) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $f(x) = x^2 g(x)$. Zeigen Sie anhand der Definition der Ableitung, dass daraus $f'(0) = 0$ folgt (schematische Skizze für $g(x) = \cos\frac{1}{x}$ für $x \neq 0$).

   (c) Sei in (b) nochmals $g(x) = \cos\frac{1}{x}$ für $x \neq 0$. Berechnen Sie $f'(x)$ für $x \neq 0$.

   (d) Berechnen Sie in (c) $\lim_{x \to 0} f'(x)$, sofern dieser Limes existiert. (Falls nicht: Begründung!)