VO Mathematik 1 für Informatiker

Vorlesung von Ao.Univ.Prof.Dipl.-Ing.Dr.techn. Alois Panholzer

Prüfung vom Freitag, 3. März 2006

Beispiel 1a

Definieren Sie die folgenden Begriffe bezüglich Relationen:

- **binäre Relation**: (auch *"zweistellige Relation"*) Eine Beziehung R zwischen genau zwei Mengen A und B, in der die Teilmenge $R \subseteq AxB$ ist. Eine binäre Relation auf A (also im Falle $A = B$) wird geschrieben als $R \subseteq A^2$. Anstelle von $(a, b) \in R$ schreibt man zumeist auch aRb.
- **Äquivalenzrelation**: Setzt Objekte, die sich in gewisser Weise ähneln, gleichwertig. Zum Beispiel: Gleichmächtigkeit endlicher Mengen oder Kongruenz von zwei natürlichen Zahlen). Sie besitzt die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.
- **Halbordnungsrelation**: (auch *"partielle Ordnung"*, *"Teilordnung"*) Eine Ordnungsrelation (Verallgemeinerung der $\leq$-Beziehung; eine binäre Relation), die die Eigenschaften Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität besitzt.
- **reflexiv**: Jedes Objekt ist zu sich selbst äquivalent:

$$aRa \qquad \forall a \in A$$

- **symmetrisch**: Wenn a zu b äquivalent ist, folgt auch b zu a äquivalent (und umgekehrt):

$$aRb \Leftrightarrow bRa \qquad \forall a, b \in A$$

- **transitiv**: Anfang und Ende einer verbundenen Sequenz sind verbunden (z.B. folgt aus $a < b$ und $b < c$ stets $a < c$):

$$aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc \qquad \forall a, b, c \in A$$

- **antisymmetrisch**: (auch *"identitiv"*) Es gibt keine zwei verschiedenen Elemente, die in beiden Richtungen in Relation stehen:

$$aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b \qquad \forall a, b \in A$$

Beispiel 1b

Zeichnen Sie zu der Halbordnungsrelation R $= < T_{36}, | >$ das zugehörige **Hasse-Diagramm** ("|" sind alle Teiler von 36 aus der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen)!

$$
\begin{tikzcd}
 & & \{36\} & & \\
 & \{12\} \arrow[ur, dash] & & \{18\} \arrow[ul, dash] & \\
\{4\} \arrow[ur, dash] & & \{6\} \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & & \{9\} \arrow[ul, dash] \\
 & \{2\} \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & & \{3\} \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}
$$

Beispiel 2

Definieren Sie folgende Begriffe:

- **Grenzwert von Funktionen**: (auch *"Limes"*) Wert, den die Funktion haben müsste, um an der jeweiligen Stelle stetig zu sein. Eine Funktion f besitzt an der Stelle x_0 den Grenzwert c, wenn für jede Folge (x_n) mit $x_n \neq x_0$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ folgt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$.
- **Stetigkeit von Funktionen**: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x_0 \in D$ stetig, wenn $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$. f heißt stetig in D, wenn f stetig in x_0 ist für alle $x_0 \in D$.

  $$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \left(\left| x - x_0 \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon, \forall x \in D \right)$$

- **Nullstellensatz**: Sei $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) < 0, f(b) > 0 \Rightarrow$ f besitzt mindestens eine Nullstelle $x_0 \in I$, d.h. $f(x_0) = 0$.
- **Zwischenwertsatz für stetige Funktionen**: Sei $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f$ nimmt auf I einen kleinsten Wert $m = \min\{f(x)|x \in I\}$ und einen größten Wert $M = \max\{f(x)|x \in I\}$, sowie alle Werte $[m, M]$ mindestens einmal an.

Beispiel 3a

Formulieren Sie das **Inklusions-/Exklusionsprinzip** (auch *"Siebformel"*) für 2 und 3 Teilmengen einer endlichen Menge!

Die Siebformel dient zur Berechnung der Mächtigkeit von mehreren (nicht disjunkten) Menge und ist wie folgt definiert:

$$\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\},I\neq 0} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i\in I} A_i \right|$$

Dadurch ergibt sich die Formel für 2 bzw. 3 endliche Teilmengen:

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$$

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

Beispiel 3b

Bestimmen Sie mit Hilfe der Siebformel die **Permutationen** ("Anzahl aller Anordnungen") von den Buchstaben $\{a, b, c, d, e, f\}$, in denen weder der Block "bcf" noch "eb" vorkommt!

$$A_1 = \{a, b, c, d, e, f\}, n_1 = 6 \qquad A_2 = \text{“}bcf'', n_2 = 3 \qquad A_3 = \text{“}eb'', n_3 = 2$$

$$|A_1|-\Big(|A_2|+|A_3|\Big) = n_1!-\Big([(n_1-n_2+1)*(n_1-n_2)!]+[(n_1-n_3+1)*(n_1-n_3)!]\Big)$$

$$= 6! - \Big((4 * 3!) + (5 * 4!)\Big) = 720 - \Big(24 + 120\Big) = \mathbf{576}$$

Beispiel 4a

Bestimmen Sie für das folgende lineare Gleichungssystem alle Werte von a für:

1. keine Lösung.
2. eine eindeutige Lösung.
3. unendlich viele Lösungen und zusätzlich die Dimension des Lösungsraumes und die allgemeine Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = 3 \\ x_1 + ax_2 + 3x_3 = 2 \end{gathered}$$

Die Koeffizienten des LGS lässt sich sehr schön als Matrix darstellen mit der weitergerechnet werden kann:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{array}\right) = \dots$$

Beispiel 4b

Bestimmen Sie für die Matrix A die inverse Matrix A^{-1} und die Matrix $C = ABA^{-1}$!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -15 & -7 \end{pmatrix}$$

Die inverse Matrix $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} * A^{\#}$, wobei $A^{\#}$ die Komplementärmatrix von A ist (Transposition der vorzeichenbehaftete Minoren). Es kann natürlich auch der Gauß-Jordan-Algorithmus verwendet werden.
Weiters gilt $A * A^{-1} = A^{-1} * A = E$ (E ist die Einheitsmatrix von A) und zeigt, dass A^{-1} das inverse Element bezüglich der Matrizenmultiplikation ist.
Eine Matrix A ist invertierbar (regulär) wenn gilt $det(A) \neq 0$:

$$\mathbf{det(A)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 5 * 1 - 1 * 3 = \mathbf{2}$$

Mithilfe der Determinante kann nun weitergerechnet werden:

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{2} * \begin{pmatrix} +|1| & -|3| \\ -|1| & +|5| \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -1.5 & 2.5 \end{pmatrix}$$

Überprüfung durch Matrizenmultiplikation mit Hilfe des Falk Schemas.

$$\mathbf{AA^{-1}} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -1.5 & 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Um die Matrix C zu berechnen wird das Falk Schema nacheinander angewendet.

$$\mathbf{C} = ABA^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -15 & -7 \end{pmatrix} * A^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -1.5 & 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$