Donnerstag 25.Oktober:

1. Methoden der Fehlererkennung

1. Mehrfachübertragung:

$D_{alt} = k$

2x übertragen $D_{neu} = 2k$

2. Anhängen von Parity-Bits:

dez.	binär		Prüfstelle
0	0000	→	0
1	0001	→	1
2	0010	→	1
3	0011	→	0
4	0100	:	1
5	0101	:	0
6	0110	:	0
7	0111	→	1

Gewicht (kann gerade oder ungerade sein)

Gewicht des Codewortes = Anzahl der Einsen

$D_{alt} + 1 = D_{neu}$

3. Polynomcodes

CRC-Codes = cyclic redundancy codes

x^5 (= höchst bedeutendes Bit) MSB . . . x^1 x^0 LSB (= wenigst bedeutendstes Bit)

z. B. 1 0 1 1 0 1

Polynom: $1 \cdot x^5 + 0 \cdot x^4 + 1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^1 \cdot 1 \cdot x^0$

Rechenregeln:

$$\begin{array}{r} 1 \\ +\ 1 \\ \hline 10 \end{array}$$

Übertrag soll wegfallen

$\rightarrow$ $0 + 0 = 0$ $\quad$ $1 + 1 = 0$ (!)

$1 + 0 = 1$ $\quad$ $1 - 1 = 0$

$0 + 1 = 1$ $\quad$ $(+1) = (-1)$!

Addition von Polynomen

$$\underbrace{x^5 + x^4 + 1}_{\text{1. Polynom}} + \underbrace{x^5 + x^3 + x}_{\text{2. Polynom}} = \cancel{x^5} + \cancel{x^5} + x^4 + x^3 + x + 1 =$$

$$= x^4 + x^3 + x + 1$$

Multiplikation:

$$(x+1)\cdot(x^2+x) = x^3 + \cancel{x^2} + \cancel{x^2} + x = x^3 + x$$

Division:

$$(x^5 + x^4 + 0\cdot x^3 + 0\cdot x^2 + 0\cdot x + 1) : (x^2+1) = x^3 + x^2 + x + 1 =$$

$$= x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\begin{array}{l}
x^5 + x^3 \\ \hline
/\ \ x^4 + x^3 \\
\quad x^4 + x^2 \\ \hline
\quad /\ \ x^3 + x^2 \\
\qquad x^3 + x \\ \hline
\qquad /\ \ x^2 + x \\
\qquad\quad x^2 + 1 \\ \hline
\qquad\quad /\ \ x + 1 \\
\qquad\qquad\ \ + 1 \\ \hline
\qquad\qquad\quad x \ \ \text{R.}
\end{array}$$

Sender (S) und Empfänger (E) vereinbaren ein gemeinsames Generatorpolynom $G(x)$:

mit $G(x)$ vom Grad r die Prüfsumme berechnen (den sogenannten Sicherungsanhang)

Message:

MSB			LSB
0	1	1	0

Die Message als Polynom auffassen und r Stellen anhängen, zunächst mit 0 vorbelegen. (z.B. $\underline{r=3}$)

$$M(x) = 0 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^1 + 0 \cdot x + \boxed{0 + 0 + 0}$$

Ziel: Prüfsumme anhängen

Multiplikation:

$M(x) \cdot x^r$ (durch Linksshift um r Stellen)
$\shortparallel$
nach links verschieben

$$M(x) \cdot x^r = 0 \cdot x^6 + 1 \cdot x^5 + 1 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 x^1 + 0 \cdot x^0$$

Dann wird:

$$\frac{M(x) \cdot x^r}{G(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{G(x)}$$

Dabei ist $R(x)$ das Remainder-Polynom.
Nun Gleichung nennerfrei machen:

$$M(x) \cdot x^r = Q(x) \cdot G(x) + R(x)$$

Auf beiden Seiten $R(x)$ subtrahieren:

$$M(x) \cdot x^r - R(x) = Q(x) \cdot G(x)$$

Das ist identisch mit:

$$M(x) \cdot x^r + R(x) = Q(x) \circ G(x)$$

Dieses Polynom sei das Transmission Polynom!

$$M(x) \cdot x^r + R(x) = T(x)$$

$T(x)$ sei so gestaltet, dass Division durch $G(x)$ stets ohne Rest teilbar ist.

Sender: $T(x)$ in den Kanal

$$\downarrow$$

Empfänger: $T(x)$; $\dfrac{T(x)}{G(x)} = Q(x)$

Gelingt die Division ohne Rest, so war die Übertragung fehlerfrei!

Wenn $R(x) \neq 0$, dann lag ein Übertragungsfehler vor!

Literatur: Kameda T., Weihrauch K.;
Einführung in die Codierungstheorie

Bsp.: ungestörte Übertragung

0 1 1 0 → Message

$M(x) = x^2 + x$

$G(x) = x^3 + x^2 + 1$

Grad von $G(x)$: $r = 3$

$x^3 \cdot M(x) = x^5 + x^4$

Linksshift um 3 Stellen:

0 1 1 0 000

Nun gilt ja:

$$\frac{x^r \cdot M(x)}{G(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{G(x)}$$

$$(x^5 + x^4) : (x^3 + x^2 + 1) = x^2$$
$$\underline{x^5 + x^4 + x^2}$$
$$x^2 \text{ R.} \quad x^2 = R(x)$$

übertragen wird:

$$M(x) \cdot x^r + R(x) = T(x)$$

$T(x)$ Sender: $(x^5 + x^4) + x^2 \hat{=} 0110\,100$

$T(x)$ Empfänger: $(x^5 + x^4) + x^2 \hat{=} 0110\,100$

Der Empfänger dividiert $T(x)$ durch $G(x)$:

$$(x^5 + x^4 + x^2) : (x^3 + x^2 + 1) = x^2$$
$$\underline{x^5 + x^4 + x^2}$$
$$0 \text{ R.}$$

$R(x) = 0$ (fehlerfreie Übertragung)

Decodierung: Sicherungsanhang einfach wegfallen lassen

Gestörte Übertragung:

Message: 0110

$T(x)$ Sender: $x^5 + x^4 + x^2 \hat{=} \boxed{0}110\,100$

Beim Durchgang durch den Kanal tritt ein Fehler auf!

$T(x)$ Empfänger: $x^6 + \cancel{x^5} + x^4 + x^2 \hat{=} 1110\,100$

$$(x^6 + x^5 + x^4 + x^2) : (x^3 + x^2 + 1) = x^3 + x$$

$$\underline{x^6 + x^5 + x^3}$$

$$x^4 + x^3 + x^2$$

$$\underline{x^4 + x^3 + x}$$

$$x^2 + x \quad R(x) \neq 0$$

$\Rightarrow$ Fehler erkannt!

Generator polynome $\rightarrow$ Standard

CCITT = Commité Consultatif International Téléphonique et Télegraphique

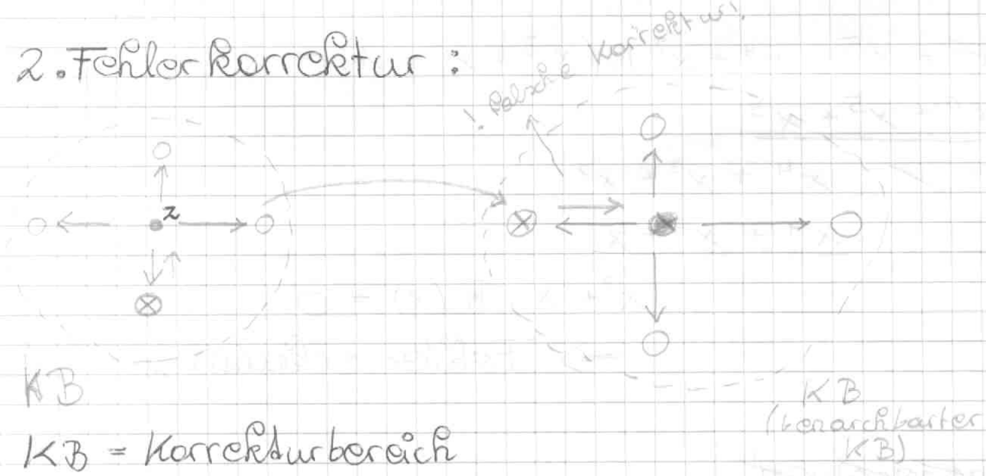
: $(x+1)$ · Kein Rest

CRC 12: $G(x) = x^{12} + x^{11} + x^3 + x^2 + x + 1$

CRC 16: $G(x) = x^{16} + x^{15} + x^2 + 1$

CRC_CCITT: $G(x) = x^{16} + x^{12} + x^5 + 1$

2. Fehlerkorrektur:



KB = Korrekturbereich

⊗ wird durch z (Zentrum ersetzt)

e = Exzentrizität eines Codewortes
(hier e = 1)