DIFFERENTIAL UND INTEGRAL RECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

14) FUNKTIONEN IN MEHREREN VARIABLEN

Quadratische Form: $q(\vec{x}) = q(\vec{x})\, A\, \vec{x}$; A postiv definit, wenn $q(\vec{x}) > 0$, $\forall \vec{x} \neq 0$

Partielle Ableitungen: $\lim_{h\to\infty} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = \frac{df}{dx}(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yx}$$

Tangentialebene: $z = t(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

Ableitungsregeln:

Kettenregel: $F(x) = f\big(u(x), v(v)\big) \Rightarrow F' = \frac{dF}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx} = f_u u_x + f_v v_x$

Ableitung impliziter Funktionen: $\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = F_x \cdot 1 + F_y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$

15) DIFFERENTIALRECHNUNG UND ANWENDUNG

Lineare Approximation und Richtungsableitung: $\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \Rightarrow df = \operatorname{grad} f(\overrightarrow{x_0})d\vec{x}$

maximale Änderung: in Richtung von $\operatorname{grad} f(\overrightarrow{x_0})$, beträgt $\|\operatorname{grad} f(\overrightarrow{x_0})\|$

Taylorentwicklung: $F(\vec{x}) = f(\vec{x}) + f_x(\vec{x})(x-x_0) + f_y(\vec{x})(y-y_0) +$

$$\frac{1}{2!}\left(f_{xx}(\vec{x})(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(\vec{x})(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(\vec{x})(y-y_0)^2\right)$$

Extremwerte ohne Nebenbedingungen:

notwendige Bedingung: $\operatorname{grad} f(\overrightarrow{x_0}) = \vec{0}$

hinreichende Bedingung: $D(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yy} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0$

$f_{xx}(x_0,y_0) < 0 \Rightarrow$ relatives Maximum, sonst Minimum

Extremwerte mit Nebenbedingungen:

$y = f(\vec{x}) = \begin{cases} max! \\ min! \end{cases}$ unter den Nebenbedingungen $\varphi(\vec{x}) = 0$

Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren:

$\Phi(\vec{x},\lambda) = f(\vec{x}) + \lambda \cdot \varphi(\vec{x})$, Extremwert bei $\operatorname{grad} \Phi(\vec{x},\lambda) = 0$

16) INTEGRATION VON FUNKTIONEN IN MEHREREN VARIABLEN

Integration in Vektorfeldern: grad $F = \vec{f} \Rightarrow F$ ist Stammfunktion von $\vec{f}$

Integrabilitätsbedingung: $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, $\forall\, i, j$ mit $i \neq j$

Bereichsintegrale: $\iint_B f(x,y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$ bzw. $\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$

Kurven- und OberflächenIntegrale:

Gegeben Vektorfeld $\vec{f}(\vec{x})$ und Änderungsfeld $\vec{x}(t)$, $0 \leq t \leq 1$

$\int_K \vec{f} d\vec{x} = \int_K \sum f_i dx_i = \int_0^1 \sum f_i(\, x_i(t)) \frac{dx_i}{dt} = \int_0^1 \left(\sum f_i\left(\, x_i(t)\right)\right) dt$

DIFFERENZEN- UND DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

17) DIFFERENZENGLEICHUNGEN

Differenzengleichungen 1. Ordnung: $x_{n+1} = f(x_n)$

Lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung: $x_{n+1} = ax_n + b$

$$x_n = \begin{cases} a^n x_0 + b\frac{a^n - 1}{a-1} & für\ a \neq 1 \\ x_0 + bn & für\ a = 1 \end{cases}$$

Allgemeine Differenzengleichung 1. Ordnung: $x_{n+1} = a_n x_n + b_n$

$$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$$

allgemeine Lösung der homogenen Gleichung: $x_n^{(h)} = c \cdot \prod_i^{n-1} a_i$

partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung:

Ansatz „Variation der Konstanten“: $c \to c_n \Rightarrow x_n^{(p)} = c_n \cdot \prod_i^{n-1} a_i$

c_n berechnen, in $x_n^{(p)}$ einsetzen

Gleichgewichte: $x_{n+1} = f(x_n) \Rightarrow f(x^*) = x^*$

Fixpunkt x^* ist asymptotisch stabil, falls $|f'(x^*)| < 1$

Differenzengleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Lineare homogene Differenzengleichung: $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$

Ansatz: $x_n = \lambda^n \Rightarrow \lambda^{n+2} + a\lambda^{n+1} + b\lambda^n = 0$

$$x_n = \begin{cases} c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n & \lambda_1 \neq \lambda_2\,,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ (c_1 + n \cdot c_2)\lambda^n & \lambda_1 = \lambda_2\,,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ r^n(c_1 \cdot \cos(n\varphi) + c_2 \cdot \sin(n\varphi)) & \lambda_1, \lambda_2\ konjugiert\ komplex \end{cases}$$

Lineare inhomogene Differenzengleichung: $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = s_n$

$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$, lösen von $x_n^{(p)}$ mittels „unbestimmtem Ansatz“

s_n	$x_n^{(p)}$
1	A
r^n	Ar^n

s_n	$x_n^{(p)}$
$\sin(rn)\ oder\ \cos(rn)$	$A\sin(rn) + B\cos(rn)$
n^k ... Polynom vom Grad k	$\sum_0^k A_i n^i$
$n^k \cdot r^n$	$r^n \cdot \sum_0^k A_i n^i$

Enthält die Versuchslösung $x_n^{(p)}$ eine Funktion, die in $x_n^{(h)}$ enthalten ist, multipliziere Ansatz mit n!

Erzeugende Funktionen: mag ich nicht

18) DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung: $F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$y' + a(x)y = \begin{cases} 0 & homogene\ Gleichung \\ s(x) & inhomogene\ Gleichung \end{cases} \qquad y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$y_h(x)$: „Trennung der Variablen“: $\int \frac{1}{y} dy = -\int a(x)dx \Rightarrow y = c \cdot e^{-\int a(x)dx}$

$y_p(x)$: „Variation der Konstanten“: Ansatz $c \rightarrow c(x) \Rightarrow y_p(x) = c(x) \cdot e^{-\int a(x)dx}$

Ansatz in DG einsetzen, $c'(x)$ integrieren, $c(x)$ in Ansatz einsetzen

Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + ay' + by = \begin{cases} 0 & homogene\ Gleichung \\ s(x) & inhomogene\ Gleichung \end{cases} \qquad y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Ansatz: $y_h(x) = e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + a\lambda^1 + b\lambda^n = 0$

$$y_h(x) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} & \lambda_1 \neq \lambda_2\ ,\ \lambda_1, \lambda_2\ \in\ \mathbb{R} \\ (c_1 + c_2 \cdot x)e^{\lambda x} & \lambda_1 = \lambda_2\ ,\ \lambda_1, \lambda_2\ \in\ \mathbb{R} \\ e^{\alpha x}(c_1 \cdot \cos(\beta x) + c_2 \cdot \sin(\beta x)) & \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta\ konjugiert\ komplex \end{cases}$$

Bestimmung von $y_h(x)$ mittels „unbestimmtem Ansatz“

$$s(x) = \sum_0^k \left(a_i x^i\right) \cdot e^{\mu x} \Rightarrow Ansatz: y_p(x) = \sum_0^k \left(A_i x^i\right) \cdot e^{\mu x}$$

Erfüllt ein Summand $y_h(x)$, multipliziere den Ansatz mit x!

Nichtlineare Differenzengleichungen – Qualitative Methoden

Gleichgewichtspunkte:

asymptotisch stabil: jede Lösung konvergiert zu einem Gleichgewicht y^*, $f'(y^*) < 0$

stabil: jede Lösung bleibt in der Nähe von y^*

instabil: mindestens eine Lösung verlässt jede ε-Umgebung um y^*, $f'(y^*) > 0$

NUMERISCHE MATHEMATIK

19) AUFLÖSUNG VON GLEICHUNGEN UND GLEICHUNGSSYSTEMEN

Definition: $\varphi(x) = x - f(x)$, also $f(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x^*) = x^* - f(x^*) = x^*$

x^* ist Nullstelle von f $\Leftrightarrow$ x^* ist Fixpunkt von φ.

$\varphi(x)$ kann auch $x - f(x)$ bzw. $\frac{x^2 - f(x)}{x}$ sein.

Iterationsverfahren konvergiert stets, wenn $\varphi(x) \in I, \forall x \in I$ und $|\varphi'(x)| \leq \lambda < 1$

Konkrete Iterationsverfahren:

Newtonsches Näherungsverfahren: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Regula falsi (f stetig, aber nicht differenzierbar): $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$

Auflösen von Gleichungssystemen:

Gauß'sches Eliminationsverfahren mit Pivotisierung:

Maximales Element der Restmatrix nach „links oben“ verschieben

Gesamtschrittverfahren von Jacobi: $x_{k+1}^{[i]} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_k^{[j]}\right)$

Konvergenz gesichert, z.B. mittels Zeilensummenkriterium $\sum_{i \neq j} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \forall i$

Einzelschrittverfahren von Gauß-Seidel: $x_{k+1}^{[i]} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_{k+1}^{[j]} - \sum_{j>i} a_{ij} x_k^{[j]}\right)$

20) NUMERISCHE METHODEN DER ANALYSIS

Approximation

Methode der kleinsten Quadrate: gesucht $\mathrm{p}(x) = a + bx$, $\sum(f(x_i) - p(x_i))^2 = min!$

$$\bar{y} = a + b\bar{x}, b = \frac{\sum x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} \begin{array}{l} Streuung\ zwischen\ x\ und\ y \\ Streuung\ von\ x \end{array}$$

Interpolation durch Polynome:

Lagrange Interpolation: $L_i(x) = \prod_{k \neq i} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}$ $\quad p(x) = \sum L_i(x) \cdot y_i$

Newtonsche Interpolationsformel:

$p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$ … mit $b_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$

$f[x_0] = f(x_0)$, $f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$, $f[x_0, \ldots x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$

Spline Interpolation: Polynomfunktionen 3. Grades, die in den Anschlussstellen in Funktionswert, Steigung und Krümmung übereinstimmen.

Numerische Integration:

Sehnentrapezregel: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$

Keplersche Fassregel: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2)$

Simpsonsche Regel: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 4y_{2n-1} + y_{2n})$

Interpolation Simulation von Differantialgleichungen: ein ander mal ;)