Ring $(R, +, \cdot)$ Ring

wenn: (1) $(R, +)$ kommutative Gruppe

(2) $(R, \cdot)$ Halbgruppe

(3) Distributivgesetze: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

$(a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

Bsp $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$

Bsp $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$

Polynome in der unbestimmten x mit reellen Koeff.

Def Kommutat. Ring: zus. ist (2) $(R, \cdot)$ kommutativ

Ring mit 1: Zus. $(R, \cdot)$ hat neutr. Elem. $(=1)$

nullteilerfreier Ring: zus. $a \neq 0, b \neq 0, \Rightarrow a \cdot b \neq 0$

Integritätsring

Kürzungsregel: $a \cdot b = a \cdot c$, $a \neq 0 \Rightarrow b = c$

gilt NICHT immer

1. Ausweg: $\forall a : \exists a^{-1}$ (inverse)

$a \cdot b = a \cdot c$

$a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} a \cdot c$

$b = c$

2. Ansatz: Ring nullteilerfrei

$$a \cdot b = a \cdot c \quad a \neq 0$$

$$a \cdot b - a \cdot c = 0$$

$$a \cdot (b-c) = 0 \xRightarrow{\text{weil nullteilerfrei}} a = 0 \lor b-c = 0$$

$$b - c = 0 \Rightarrow b = c$$

Bsp $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$

$$\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{4} \cdot \bar{3} \not\Rightarrow \bar{2} = \bar{4}$$

Def $(K, +, \cdot)$ Körper

(1) $(K, +, \cdot)$ komm. Ring mit 1

(2) $\forall a \in K \setminus \{0\} \ \exists a^{-1} : a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$

Bem $(K, +)$, $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ komm. Gruppen

Bsp: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

$(K, +, \cdot)$ Körper $a \neq 0, b \neq 0$

Ann $a \cdot b = 0 \quad | \cdot a^{-1}$

$\Rightarrow b = 0$ ↯ d.h. $\Rightarrow a \cdot b \neq 0$

$\Rightarrow$ Körper ist immer Nullteilerfrei

Satz: (1) Jeder Körper ist Integritätsring

(2) Jeder endliche Int.-ring ist ein Körper

Bew: (1) ✓

(2) $(R,+,\cdot)$ Int-ring $R=\{r_1,r_2,\dots r_n\}$

$r\in R \quad r\neq 0$

$$\underbrace{r\cdot r_1, r\cdot r_2, \dots r\cdot r_n}_{\text{voneinander verschieden, weil}} \in R$$

$$r\cdot r_i = r\cdot r_j \overset{r\neq 0}{\Rightarrow} r_i = r_j$$

$\Rightarrow \{r r_1, r r_2, \dots r r_n\} = R$

$\Rightarrow \exists j: r\cdot r_j = 1$

$\Rightarrow r_j = r^{-1}$

Satz $(\mathbb{Z}_m,+,\cdot)$ ist Int-Ring $\Leftrightarrow m\in\mathbb{P}$

$p\in\mathbb{P} \Rightarrow (\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$ ist endlicher Körper

Bsp $(\mathbb{Z}_2,+,\cdot) \quad \mathbb{Z}_2=\{\bar 0,\bar 1\}$

Bsp $F=\{0,1,x,1+x\}$ $\qquad 1+1=0 \quad x^2=1+x$

$+$	0	1	x	$1+x$
0	0	1	x	$1+x$
1	1	0	$1+x$	x
x	x	$1+x$	0	1
$1+x$	$1+x$	x	1	0

$\cdot$	0	1	x	$1+x$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$1+x$
x	0	x	$1+x$	1
$1+x$	0	$1+x$	1	x

Def $(M, \vee, \wedge)$ Verband (lattice)

(1) $(M, \wedge)$ kommutative Halbgruppe

(2) $(M, \vee)$ ——"——

(3) Verschmelzungsgesetze $a \wedge (a \vee b) = a$

$$a \vee (a \wedge b) = a$$

Bsp $B = \{0, 1\}$

$(B, \wedge, \vee)$

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	0

Bsp $B^n = \{(b_1, \ldots, b_n) \mid b_j \in \{0,1\}\}$

$\wedge, \vee$: komponentenweise

$(1,0,1) \wedge (1,0,0) = (1,0,0)$

$\quad\quad\quad\;\; \vee \quad\quad\quad\;\; = (1,0,1)$

Bsp $(P(A), \cap, \cup)$

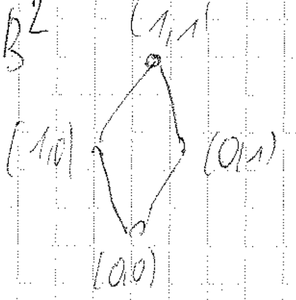
$(\mathbb{N}, \min, \max)$

$(\mathbb{N}, \mathrm{ggT}, \mathrm{kgV})$

Satz $(M, \wedge, \vee)$ Verband: $a \le b \Leftrightarrow a = a \wedge b$

$\Rightarrow (M, \le)$ Halbordnung

Bsp B^2



Def Verband wh.

Def distributiver Verband

zus. Distributivgesetze $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Def Boolesche Algebra

distributiver Verband

zus. neutrale Elemente $1 \in M : a \wedge 1 = 1 \wedge a = a$

$0 \in M : a \vee 0 = 0 \vee a = a$

$\forall a \in M \ \exists a'$ $a \vee a' = 1$, $a \wedge a' = 0$

"wichtige" Bsp

Bsp $(P(A), \cap, \cup)$

$1 = A \quad 0 = \emptyset \qquad B \in P(A),\ B' = A \setminus B$

dazugeh. $\leq$: $(P(A), \subseteq)$

Bsp: $(B^n, \wedge, \vee) \qquad B = \{0, 1\}$

$1 = (1, 1, \dots, 1) \qquad a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$0 = (0, 0, \dots, 0) \qquad a' = (a_1', a_2', \dots, a_n')$

$1' = 0 \quad 0' = 1$

$A = \{a, b, c\} \qquad (P(A), \cap, \cup) \overset{\text{isomorph}}{\Longleftrightarrow} (B^3, \wedge, \vee)$

$B \subseteq A \Leftrightarrow (b_1, b_2, b_3) \in \{0, 1\}^3$

$\{a, b\} \Leftrightarrow (1, 1, 0) \qquad \emptyset \Leftrightarrow (0, 0, 0)$

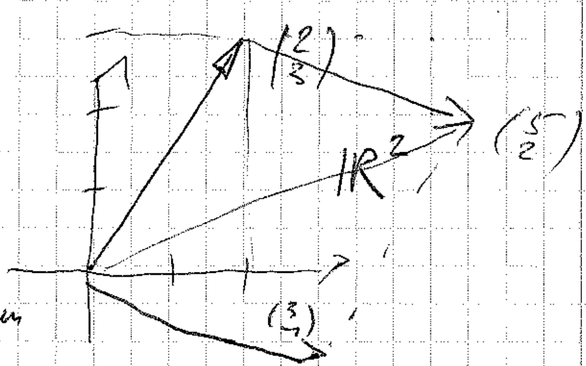
$\{c\} \Leftrightarrow (0, 0, 1)$

Satz $(M, \wedge, \vee)$ endl. Boolesche Algebra

$$\Rightarrow \exists n: (M, \wedge, \vee) \underset{\text{isomorph}}{\cong} (B^n, \wedge, \vee)$$

$$|B^n| = 2^n$$

LINEARE ALGEBRA



Vektoren (Spalten-) $\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

allgem.: $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – Koordinaten

$x_1, \dots, x_n \in K$ Körper

$$K^n = \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, \dots, x_n \in K \right\}$$

Addition

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\lambda \in K \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$

$$\lambda \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Eigenschaften $(K^n, +)$ .. komm. Gruppe $\underline{0} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ Nullvektor

$-\underline{x} = \begin{pmatrix}-x_1\\ \vdots\\ -x_n\end{pmatrix}$

(i) $\lambda\cdot(\underline{x}+\underline{y}) = \lambda\underline{x} + \lambda\cdot\underline{y}$

(ii) $(\lambda\cdot\mu)\cdot\underline{x} = \lambda\cdot\underline{x} + \mu\cdot\underline{x}$

(iii) $(\lambda\cdot\mu)\,\underline{x} = \lambda\cdot(\mu\cdot\underline{x})$

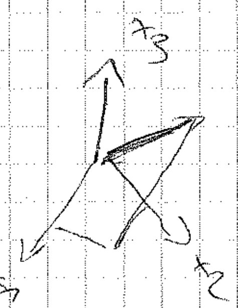
(iv) $1\cdot\underline{x} = \underline{x}$

Def $(V,+,K)$ .. Vektorraum über K

$(V,+)$ kommutative Gruppe, K.. Körper (Skalare.)

Skalarmultiplikation $\lambda\in K,\ \underline{x}\in V \mapsto \lambda\cdot x \in V$

mit (i), (ii), (iii), (iv) w.o.



Bsp $\mathbb{R}^3 = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \,\middle|\, x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\right\}$

$U = \left\{\underline{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1+x_2+x_3=0\right\}$ $\quad \underline{0}\in U$

zB $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix} \in U$

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \in U$ $\qquad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\x_3+y_3\end{pmatrix}$ $\qquad (x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3)$ $= (x_1+x_2+x_3)+(y_1+y_2+y_3)$ $= 0+0$

$x,y\in U \Rightarrow x+y\in U$

$\lambda\in\mathbb{R}, x\in U \Rightarrow \lambda\cdot x\in U$ $\Rightarrow (U,+,\mathbb{R})$ ist Vektorraum

Def $(V,+,K)$ ... V.R. über K

$(U,+,K)$ Unterraum von $(V,+,K)$ $\Leftrightarrow$ (1) $\emptyset \neq U \subseteq V$
(2) $(U,+,K)$ ist V.R. über K

Notation $U \leq V$

Speziell $V \leq V$ $\{\underline{0}\} \leq V$

Satz $(V,+,K)$ V.R. über K

(1) $\emptyset \neq U \subseteq V$

(2) $\underline{x},\underline{y} \in U, \lambda \in K \Rightarrow \underline{x}+\underline{y}, \lambda\cdot\underline{x} \in U$

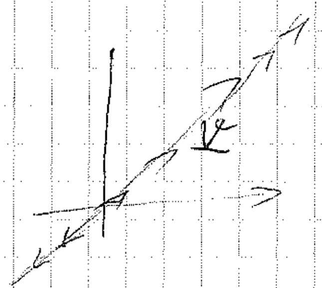
$\Rightarrow U \leq V$

Bsp $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \underbrace{x_1+x_2+x_3=0}_{\text{Lineare Gleichung}} \right\} \leq \mathbb{R}^3$

$(V,+,K)$ Vektorraum

$v \neq \underline{0}$, $\underline{v} \in V$

$\lambda\cdot\underline{v}$ $(\lambda \in K)$



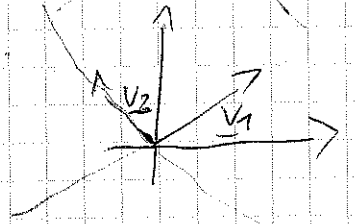
$[\underline{v}] = \{\lambda\underline{v} \mid \lambda \in K\}$

$\boxed{[\underline{v}] \leq V}$ $\quad \lambda_1\underline{v} + \lambda_2\underline{v} = (\lambda_1+\lambda_2)\underline{v}$

$\mu(\lambda\underline{v}) = (\mu\lambda)\underline{v}$

$[\underline{v}]$ ist der kleinste Unterraum von V, der $\underline{v}$ enthält.

$\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$



$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2$

$[v_1, v_2] = \{\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in K\}$

$\boxed{[\underline{v}_1, \underline{v}_2] \leq V}$ der kleinste Unterraum von V der v_1, v_2 enthält

<u>Def</u> $(V, +, K)$ ... V.R. über K

$v_1, \dots, v_n \in V$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$

$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_n v_n$ ... Linearkombination der Vektoren $v_1 \dots v_n$ mit Koeff. $\lambda_1 \dots \lambda_n$

$M \subseteq V$

$[M] = \{$Linearkombinationen von Vek. aus $M\}$ ... lineare Hülle von M

<u>Satz</u> $M \subseteq V$

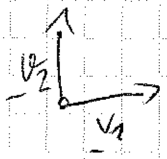
$[M] \leq V$ ist der kleinste Unterraum von V, der M enthält

Bsp: $M = \{v_1, v_2\}$

$[M] = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in K\}$ $\quad [\emptyset] = \{\underline{0}\}$

<u>Def</u> $M \subseteq V$ $\quad [M] = V$, dann ist M ein erzeugendes System von V

$\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}$



$v_2 \notin [v_1]$ (v_1, v_2 lin. unabh.)

<u>1. Fall:</u> $v_3 \in [v_1, v_2] \Rightarrow [v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2]$

<u>2. Fall:</u> $v_3 \notin [v_1, v_2] \Rightarrow [v_1, v_2, v_3] \supsetneq [v_1, v_2]$

$\supsetneq$ ... Obermenge aber nicht gleich

<u>Def</u> $(V, +, K)$ ... VR über K $\quad M \subseteq V$

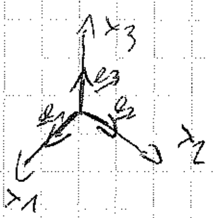
(1) M ist linear unabh. $\Leftrightarrow \forall \underline{v} \in M: \underline{v} \notin [M \setminus \{v\}]$

(2) M ist <u>linear abh.</u> $:\Leftrightarrow \exists \underline{v} \in M: \underline{v} \in [M \setminus \{v\}]$

<u>Bsp</u> $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear abh.

$v_3 = 2 \cdot v_1 - 3 \cdot v_2$

Def Bsp) $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R})$ $\quad M = \{ \underline{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$



$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \underline{e_1} + 4 \cdot \underline{e_2} + 1 \cdot \underline{e_3}$

$\Rightarrow [\{e_1, e_2, e_3\}] = \mathbb{R}^3$ erzeugendes System

Bsp $M = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$[M] = \mathbb{R}^3$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$[\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}] = \mathbb{R}^3$

Bsp $M = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} \overset{?}{=} \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3\\ \lambda_1 + 0 + 3\lambda_3 \\ 0 + 2\lambda_2 + 0\end{pmatrix} \ldots$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 3 \\ \lambda_1 \quad + 3\lambda_3 &= 4 \\ 2\lambda_2 \quad &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_3 &= 7/2 \\ \lambda_1 + 3\lambda_3 &= 4 \end{aligned} \Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 1/2 \qquad \lambda_1 = \frac{5}{2}$$

$$\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} = \frac{5}{2} \ldots$$

v.s.w.

$\Rightarrow [M] = \mathbb{R}^3$

Bsp $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$

$\underline{v}_3 = 2 \cdot \underline{v}_1 - 3 \underline{v}_2 \Rightarrow [\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}]$ l. a.

$\Leftrightarrow 2\underline{v}_1 - 3\underline{v}_2 - 1 \cdot \underline{v}_3 = \underline{0}$

$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0) : \lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}_3 = \underline{0}$

$\left[\lambda_3 \neq 0 \Rightarrow \underline{v}_3 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \underline{v}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \cdot \underline{v}_2 \right.$ usw. $\left. \right]$

Satz $M = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots \underline{v}_n\} \subseteq V$

(1) M ist lin. unabh. $\Leftrightarrow$

$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \ldots \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$

(2) M ist lin. abh. $\Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) \neq (0, 0, \ldots 0)$

$: \lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \ldots \lambda_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$

Bsp $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\ v_3 \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \lambda_3 \underline{v}_3 = \underline{0}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0$ $\qquad \lambda_1 = \lambda_3 - \lambda_2$

$3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$

$4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$

$-2\lambda_2 \cancel{+ 6\lambda_3} = 0$

$\lambda_1 = 2t$

$\lambda_2 = -3t$

$\lambda_3 = -t$

Bsp $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\ \ \underline{e}_2 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\ \ e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\lambda_1 \cdot \underline{e}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{e}_2 + \lambda_3 \cdot \underline{e}_3 = \underline{0}$$

$1\ \lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 0$ $\quad$ ✓ l. u.

$\lambda_3 = 0$

Def $B \subseteq V$ Basis von V

$:\Longleftrightarrow$ (1) $[B] = V$ (ist erz. System)

(2) B lin. unab.

Bsp $E = \{ \underline{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$

kanon. Basis von $(K^3, +, K)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Satz B .. Basis von V

$\Rightarrow$ Jeder Vektor aus V lässt sich **eindeutig** als L.K. der Basisvektoren darstellen

Bew $\underline{v} \in V$ $\quad B = \{ \underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots \underline{b}_n \}$

$\Rightarrow \exists \lambda_1 \dots \lambda_n : \underline{v} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{b}_n \quad ([B] = V)$

Ann. $\underline{v} = \mu_1 \underline{b}_1 + \dots + \mu_n \underline{b}_n \Rightarrow \underline{v} - \underline{v} = 0$

$\Rightarrow (\lambda_1 - \mu_1) \cdot \underline{b}_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) = 0$

$\lambda_1 - \mu_1 = \lambda_n - \mu_n = 0$ ✓

$B = \{ b_1, \dots b_n \}$ $\quad \underline{v} \in V$

$\underline{v} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \dots + \lambda_n b_n$ $\quad \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ .. Koordinaten von $\underline{v}$ bezügl. d. Basis B

Satz B_1, B_2 (endl.) Basen eines Vektorraums

$\Rightarrow |B_1| = |B_2|$

Def $(V, +, K)$ .. V.R. $\quad B$ .. Basis

$\Rightarrow \dim V = |B|$ $\quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\dim K^n = n$ $\quad$ kan. Basis $E = \{ e_1, e_2, \dots, e_n \}$

Satz $U \leq V \Rightarrow \dim U \leq \dim V$

Bem $\dim \underset{\substack{\uparrow \\ B=\emptyset}}{\{0\}} = 0$

Def Matrix $A \in K^{m \times n}$ m Zeilen n Spalten

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

"Tabelle"

$a_{ij} \in K$

Zeile Spalte

Addition $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \Rightarrow A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Skalarmultipl. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \lambda = 2$

$$\lambda \cdot A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$(K^{m \times n}, \cdot, +, K)$ ist VR

$$\lambda \cdot (a_{ij}) = (\lambda \cdot a_{ij})$$

$\dim K^{m \times n} = m \cdot n$