Theoretische Informatik 1 – Übungsblatt 6 (SS2006) Lösungen

Aufgabe 6.1 Berechnen Sie schrittweise den Wert folgender Terme jeweils in den Variablenbelegungen I und I', wobei $I(\underline{\mathrm{x}}) = 0$, $I(\underline{\mathrm{y}}) = 3$ und $I'(\underline{\mathrm{x}}) = 1$, $I'(\underline{\mathrm{y}}) = 0$:

a) $\underline{\dot{-}(+(\mathrm{x},1),\mathrm{y})}$ (Term über der Modellstruktur $\mathbb{N}$)

b) $\underline{+(\mathrm{x},-(\mathrm{y},1))}$ (Term über der Modellstruktur $\mathbb{Z}$)

Geben Sie die jeweils relevanten Klauseln (MT1/MT2/MT3) der Definition von $\mathcal{M}_\mathcal{T}$ an.
Achten Sie auf korrekte Unterstreichungen.

Lösung

a) Es gibt verschiedene Auswertungsketten, die jeweils zum selben Wert führen. Es folgt je ein Beispiel für die Bestimmung des Werts in den beiden Variablenbelegungen.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{\dot{-}(+(\mathrm{x},1),\mathrm{y})}) &\overset{MT3}{=} \mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{+(\mathrm{x},1)}) \dot{-} \mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{\mathrm{y}}) \\
&\overset{MT3}{=} (\mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{\mathrm{x}}) + \mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{1})) \dot{-} \mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{\mathrm{y}}) \\
&\overset{MT1}{=} (\mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{\mathrm{x}}) + \mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{1})) \dot{-} I(\underline{\mathrm{y}}) \\
&= (\mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{\mathrm{x}}) + \mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{1})) \dot{-} 3 \\
&\overset{MT2}{=} (\mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{\mathrm{x}}) + 1) \dot{-} 3 \\
&\overset{MT1}{=} (0 + 1) \dot{-} 3 \\
&= 1 \dot{-} 3 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\mathcal{T}(I', \underline{\dot{-}(+(\mathrm{x},1),\mathrm{y})}) &\overset{MT3}{=} \mathcal{M}_\mathcal{T}(I', \underline{+(\mathrm{x},1)}) \dot{-} \mathcal{M}_\mathcal{T}(I', \underline{\mathrm{y}}) \\
&\overset{MT3}{=} (\mathcal{M}_\mathcal{T}(I', \underline{\mathrm{x}}) + \mathcal{M}_\mathcal{T}(I', \underline{1})) \dot{-} \mathcal{M}_\mathcal{T}(I', \underline{\mathrm{y}}) \\
&\overset{MT1}{=} (\mathcal{M}_\mathcal{T}(I', \underline{\mathrm{x}}) + \mathcal{M}_\mathcal{T}(I', \underline{1})) \dot{-} I'(\underline{\mathrm{y}}) \\
&= (\mathcal{M}_\mathcal{T}(I', \underline{\mathrm{x}}) + \mathcal{M}_\mathcal{T}(I', \underline{1})) \dot{-} 0 \\
&\overset{MT2}{=} (\mathcal{M}_\mathcal{T}(I', \underline{\mathrm{x}}) + 1) \dot{-} 0 \\
&\overset{MT1}{=} (1 + 1) \dot{-} 0 \\
&= 2 \dot{-} 0 = 2
\end{aligned}$$

b) Es gibt wieder verschiedene Auswertungsketten. Es folgt je ein Beispiel.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{+(\mathrm{x},-(\mathrm{y},1))}) &\overset{MT3}{=} \mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{\mathrm{x}}) + \mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{-(\mathrm{y},1)}) \\
&\overset{MT1}{=} I(\underline{\mathrm{x}}) + \mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{-(\mathrm{y},1)}) \\
&= 0 + \mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{-(\mathrm{y},1)}) \\
&\overset{MT3}{=} 0 + (\mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{\mathrm{y}}) - \mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{1})) \\
&\overset{MT2}{=} 0 + (\mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{\mathrm{y}}) - 1) \\
&\overset{MT1}{=} 0 + (I(\underline{\mathrm{y}}) - 1) \\
&= 0 + (3 - 1) = 0 + 2 = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\mathcal{T}(I', \underline{+(\mathrm{x},-(\mathrm{y},1))}) &\overset{MT3}{=} \mathcal{M}_\mathcal{T}(I', \underline{\mathrm{x}}) + \mathcal{M}_\mathcal{T}(I', \underline{-(\mathrm{y},1)}) \\
&\overset{MT1}{=} I'(\underline{\mathrm{x}}) + \mathcal{M}_\mathcal{T}(I', \underline{-(\mathrm{y},1)}) \\
&= 1 + \mathcal{M}_\mathcal{T}(I', \underline{-(\mathrm{y},1)}) \\
&\overset{MT3}{=} 1 + (\mathcal{M}_\mathcal{T}(I', \underline{\mathrm{y}}) - \mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{1})) \\
&\overset{MT2}{=} 1 + (\mathcal{M}_\mathcal{T}(I', \underline{\mathrm{y}}) - 1) \\
&\overset{MT1}{=} 1 + (I'(\underline{\mathrm{y}}) - 1) \\
&= 1 + (0 - 1) = 1 - 1 = 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.2 Finden Sie 3 verschiedene Terme über $\mathbb{S}$, die alle in einer Variablenbelegung I mit $I(\underline{x}) = \underline{0}$ den Stack $s = \text{pop}(\underline{0}\,\underline{1}\,\underline{0})$ als Wert haben. Die Terme sollen die Variable $\underline{x}$ enthalten. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung.

Lösung Die Terme $t_1 = \underline{\text{push1}}\,\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{)}$, $t_2 = \underline{\text{push1}}\,\underline{(}\,\underline{\text{pop}}\,\underline{(}\,\underline{\text{push1}}\,\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{)}\,\underline{)}\,\underline{)}$ und $t_3 = \underline{\text{push1}}\,\underline{(}\,\underline{\text{pop}}\,\underline{(}\,\underline{\text{push0}}\,\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{)}\,\underline{)}\,\underline{)}$ haben in I alle den Wert $s = \text{pop}(\underline{0}\,\underline{1}\,\underline{0}) = \underline{1}\,\underline{0}$, wie folgende Auswertungsketten beweisen:

$$\mathcal{M}_\mathcal{T}(I, t_1) \stackrel{MT3}{=} \text{push1}(\mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{x})) \stackrel{MT1}{=} \text{push1}(I(\underline{x})) = \text{push1}(\underline{0}) = \underline{1}\,\underline{0}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\mathcal{T}(I, t_2) &\stackrel{MT3}{=} \text{push1}(\mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{\text{pop}}\,\underline{(}\,\underline{\text{push1}}\,\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{)}\,\underline{)})) \stackrel{MT3}{=} \text{push1}(\text{pop}(\mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{\text{push1}}\,\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{)}))) \\
&\stackrel{MT3}{=} \text{push1}(\text{pop}(\text{push1}(\mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{x})))) \stackrel{MT1}{=} \text{push1}(\text{pop}(\text{push1}(I(\underline{x})))) \\
&= \text{push1}(\text{pop}(\text{push1}(\underline{0}))) = \text{push1}(\text{pop}(\underline{1}\,\underline{0})) = \text{push1}(\underline{0}) = \underline{1}\,\underline{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\mathcal{T}(I, t_3) &\stackrel{MT3}{=} \text{push1}(\mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{\text{pop}}\,\underline{(}\,\underline{\text{push0}}\,\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{)}\,\underline{)})) \stackrel{MT3}{=} \text{push1}(\text{pop}(\mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{\text{push0}}\,\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{)}))) \\
&\stackrel{MT3}{=} \text{push1}(\text{pop}(\text{push0}(\mathcal{M}_\mathcal{T}(I, \underline{x})))) \stackrel{MT1}{=} \text{push1}(\text{pop}(\text{push0}(I(\underline{x})))) \\
&= \text{push1}(\text{pop}(\text{push0}(\underline{0}))) = \text{push1}(\text{pop}(\underline{0}\,\underline{0})) = \text{push1}(\underline{0}) = \underline{1}\,\underline{0}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.3 Finden Sie Boolesche Ausdrücke über der Modellstuktur FamX, die folgendes ausdrücken. (Die Ausdrücke sollen nur die Variablensymbole $\underline{x}$ und $\underline{y}$ enthalten).

a) $\underline{x}$ ist eine Nichte von $\underline{y}$, wobei $\underline{y}$ männlich ist;

b) $\underline{x}$ ist ein Sohn einer Großmutter von $\underline{y}$;

c) $\underline{x}$ ist eine Cousine von $\underline{y}$.

Lösung *Anmerkung:* Es gibt jeweils auch alternative Lösungen zu den folgenden:

a) $\underline{(}\,\underline{\mathit{Onkel}}\,\underline{(}\,\underline{y}\,\underline{,}\,\underline{x}\,\underline{)}\,\underline{\land}\,\underline{\mathit{weiblich}}\,\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{)}\,\underline{)}$

b) Wenn man voraussetzt, dass sich das Prädikat *Onkel* nur auf die leiblichen Brüder der Mutter bzw. des Vaters einer Person bezieht, so gibt es eine sehr einfache Lösung:
$\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{=}\,\underline{\mathit{Vater}}\,\underline{(}\,\underline{y}\,\underline{)}\,\underline{\lor}\,\underline{(}\,\underline{\mathit{Onkel}}\,\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{,}\,\underline{y}\,\underline{)}\,\underline{)}$.
Allerdings wird auch der Ehemann einer Schwester meiner Mutter oder meines Vaters üblicherweise als mein Onkel bezeichnet. Daher wird folgende Lösung vorgeschlagen:
$\underline{(}\,\underline{\mathit{männlich}}\,\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{)}\;\underline{\land}\,\underline{(}\,\underline{\mathit{Mutter}}\,\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{)}\,\underline{=}\,\underline{\mathit{Mutter}}\,\underline{(}\,\underline{\mathit{Mutter}}\,\underline{(}\,\underline{y}\,\underline{)}\,\underline{)}\,\underline{\lor}\,\underline{\mathit{Mutter}}\,\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{)}\,\underline{=}\,\underline{\mathit{Mutter}}\,\underline{(}\,\underline{\mathit{Vater}}\,\underline{(}\,\underline{y}\,\underline{)}\,\underline{)}\,\underline{)}\,\underline{)}$

c) $\underline{(}\,\underline{\mathit{weiblich}}\,\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{)}\,\underline{\land}\,\underline{(}\,\underline{\mathit{Geschwister}}\,\underline{(}\,\underline{\mathit{Vater}}\,\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{)}\,\underline{,}\,\underline{\mathit{Vater}}\,\underline{(}\,\underline{y}\,\underline{)}\,\underline{)}\,\underline{\lor}\,\underline{(}\,\underline{\mathit{Geschwister}}\,\underline{(}\,\underline{\mathit{Mutter}}\,\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{)}\,\underline{,}\,\underline{\mathit{Vater}}\,\underline{(}\,\underline{y}\,\underline{)}\,\underline{)}\,\underline{\lor}$
$\underline{(}\,\underline{\mathit{Geschwister}}\,\underline{(}\,\underline{\mathit{Vater}}\,\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{)}\,\underline{,}\,\underline{\mathit{Mutter}}\,\underline{(}\,\underline{y}\,\underline{)}\,\underline{)}\,\underline{\lor}\,\underline{(}\,\underline{\mathit{Geschwister}}\,\underline{(}\,\underline{\mathit{Mutter}}\,\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{)}\,\underline{,}\,\underline{\mathit{Mutter}}\,\underline{(}\,\underline{y}\,\underline{)}\,\underline{)}\,\underline{)}\,\underline{)}\,\underline{)}\,\underline{)}\,\underline{)}$

Aufgabe 6.4 Erklären Sie alle Fehler im folgenden Auswertungsversuch des Booleschen Ausdrucks $B = \underline{(}\,\underline{2}\,\underline{\geq}\,\underline{x}\,\underline{\dot-}\,\underline{2}\,\underline{)}\,\underline{\land}\,\underline{x}\,\underline{\neq}\,\underline{y}$ über $\mathbb{N}$ in der Variablenbelegung I mit $I(\underline{x}) = 1$ und $I(\underline{y}) = 2$:

„B lautet in offizieller Syntax $\underline{(}\,\underline{\leq}\,\underline{(}\,\underline{\dot-}\,\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{,}\,\underline{2}\,\underline{)}\,\underline{,}\,\underline{2}\,\underline{)}\,\underline{\land}\,\underline{\neg}\,\underline{\equiv}\,\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{,}\,\underline{y}\,\underline{)}\,\underline{)}$.

$$\mathcal{M}_{BA}(I, B) \stackrel{MBA3}{=} \mathbf{t} \quad \text{falls } \mathcal{M}_{BA}(I, \underline{(}\,\underline{2}\,\underline{\leq}\,\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{\dot-}\,\underline{2}\,\underline{)}\,\underline{)}) = \mathbf{t} \text{ oder } \mathcal{M}_{BA}(I, \underline{\neg}\,\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{\equiv}\,\underline{y}\,\underline{)}\;\underline{)} = \mathbf{t}$$

Wir werten zunächst $\mathcal{M}_{BA}(I, \underline{\neg}\,\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{\equiv}\,\underline{y}\,\underline{)})$ aus:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{BA}(I, \underline{\neg}\,\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{\equiv}\,\underline{y}\,\underline{)}) &\stackrel{MBA3}{=} \begin{cases} \mathbf{t} & \text{falls } \mathcal{M}_{BA}(I, \underline{(}\,\underline{x}\,\underline{\equiv}\,\underline{y}\,\underline{)}) = \mathbf{f} \\ \mathbf{f} & \text{sonst} \end{cases} \\
&\stackrel{MBA1}{=} (\mathcal{M}_{BA}(I, \underline{x}) \,\underline{\neq}\, \mathcal{M}_{BA}(I, \underline{y})) \\
&\stackrel{MBA2}{=} (I\,\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{)} \neq I\,\underline{(}\,\underline{y}\,\underline{)}) \\
&\stackrel{MT1}{=} \mathbf{f} \text{ da } \underline{1} \,\underline{\neq}\, \underline{2}
\end{aligned}$$

Da $\mathcal{M}_{BA}(I, \underline{\neg}\,\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{\equiv}\,\underline{y}\,\underline{)}) = \mathbf{f}$ müssen wir $\mathcal{M}_{BA}(I, \underline{(}\,\underline{2}\,\underline{\geq}\,\underline{x}\,\underline{\dot-}\,\underline{2}\,\underline{)})$ nicht mehr auswerten.
Wegen MBA3 erhalten wir $\mathcal{M}_{BA}(I, B) = \mathbf{f}$.“

Lösung Tatsächlich lautet B in offizieller Syntax $\underline{(}\underline{\leq}\underline{(}\underline{\dot-}\underline{(}\underline{x}\underline{,}\underline{2}\underline{)}\underline{,}\underline{2}\underline{)}\underline{\land}\underline{\neg}\underline{\equiv}\underline{(}\underline{x}\underline{,}\underline{y}\underline{)}\underline{)}$, wie angegeben. Die folgende Zeile enthält vier Fehler:

$$\text{“}\mathcal{M}_{BA}(I,B) \overset{MBA3}{=} \mathbf{t} \quad \text{falls } \mathcal{M}_{BA}(I,\underline{(}2\underline{\leq}\underline{(}\underline{x}\underline{\dot-}2\underline{)}\underline{)}) = \mathbf{t} \text{ oder } \mathcal{M}_{BA}(I,\underline{\neg}\,\underline{(}\underline{x}\underline{\equiv}\underline{y}\underline{)}\,\underline{)} = \mathbf{t}\text{”}$$

- Gemäß MBA3 muss es “und” statt “oder” heißen.
- Die beiden Vorkommen von “2” sind auf der syntaktischen, objektsprachlichen Ebene und gehören daher unterstrichen.
- Die Argumente in “$\underline{(}2\underline{\leq}\underline{(}\underline{x}\underline{\dot-}2\underline{)}\underline{)}$” sind vertauscht. Es müsste “$\underline{(}\underline{(}\underline{x}\underline{\dot-}\underline{2}\underline{)}\underline{\leq}\underline{2}\underline{)}$” oder, alternativ, “$\underline{\leq}\underline{(}\underline{\dot-}\underline{(}\underline{x}\underline{,}\underline{2}\underline{)}\underline{,}\underline{2}\underline{)}$” heißen.
- Die letzte Klammer der Zeile ist auf der metasprachlichen und nicht auf der objektsprachlichen Ebene und gehört folglich nicht unterstrichen.

Die weitere Auswertung kann tatsächlich mit “$\mathcal{M}_{BA}(I,\,\underline{\neg}\,\underline{(}\,\underline{x}\underline{\equiv}\underline{y}\,\underline{)}\,)$” beginnen. In der Zeile

$$\text{“ } \mathcal{M}_{BA}(I,\,\underline{\neg}\,\underline{(}\,x\underline{\equiv}y\,\underline{)}\,) \overset{MBA3}{=} \begin{cases} \mathbf{t} & \text{falls } \mathcal{M}_{BA}(I,\,\underline{(}\,x\underline{\equiv}y\,\underline{)}\,) = \mathbf{f} \\ \mathbf{f} & \text{sonst} \end{cases} \text{ ”}$$

gehören alle Vorkommen von “x” und “y” unterstrichen, da diese Individuenvariablensymbole sein sollen. Außerdem wurde nicht MBA3 sondern MBA2 für diesen Auswertungsschritt verwendet.

In “ $\overset{MBA1}{=} (\mathcal{M}_{BA}(I,\underline{x})\underline{\neq}\mathcal{M}_{BA}(I,\underline{y}))$ ” ist “$\mathcal{M}_{BA}$” (zwei mal) durch “$\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$” zu ersetzen, da $\underline{x}$ und $\underline{y}$ Terme, aber keine Booleschen Ausdrücke sind. Außerdem gehört ‘$\neq$’ nicht unterstrichen, da nicht das Zeichen ‘$\underline{\neq}$’, sondern dessen Bedeutung – also Ungleichheit – gemeint ist.

In “ $\overset{MBA2}{=} (I\,\underline{(}\,\underline{x}\,\underline{)} \neq I\,\underline{(}\,\underline{y}\,\underline{)}\,)$ ” gehören auch die inneren Klammern nicht unterstrichen, da sie ja jeweils nicht Bestandteil des betroffenen Terms sind. Außerdem wurde nicht MBA2 sondern MT1 verwendet.

In “ $\overset{MT1}{=}$ **f** da $\underline{1}\neq\underline{2}$ ” gehören “1” und “2” nicht unterstrichen, da sie jeweils für die entsprechenden Zahlen selbst stehen und keine Konstantensymbole sind. Außerdem ist das Ergebniss “**t**” und nicht “**f**”. Weiters gehört “MT1” (ersatzlos) gestrichen, da hier keine Anwendung der ‘Meaning’-Funktion $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ vorliegt.

Der verbleibende Rest des Textes wäre korrekt, wenn das Ergebnis des vorhergehenden Schrittes wirklich **f** lauten würde. Tatsächlich müsste man allerdings wegen $\mathcal{M}_{BA}(I,\,\underline{\neg}\,\underline{(}\,\underline{x}\underline{\equiv}\underline{y}\,\underline{)}\,) = \mathbf{t}$ auch noch $\mathcal{M}_{BA}(I,\underline{(}\underline{2}\underline{\geq}\underline{x}\underline{\dot-}\underline{2}\underline{)})$ berechnen. Wegen $\mathcal{M}_{BA}(I,\underline{(}\underline{2}\underline{\geq}\underline{x}\underline{\dot-}\underline{2}\underline{)}) = \mathbf{t}$ folgt aus MBA3, dass $\mathcal{M}_{BA}(I,B) = \mathbf{t}$.

Aufgabe 6.5 Es sei $\pi = \underline{\text{while}}\ \underline{(}\underline{x}\underline{\neq}\underline{y}\underline{)}\ \underline{\text{do}}\ \underline{\text{begin}}\ \underline{x}\underline{\leftarrow}\underline{(}\underline{x}\underline{-}\underline{1}\underline{)}\,\underline{;}\,\underline{y}\underline{\leftarrow}\underline{0}\ \underline{\text{end}}$

a) Zeigen Sie schrittweise, dass $\pi \in ALI$.

b) Berechen Sie $\mathcal{M}_{AL}(I,\pi)$, wobei $I(\underline{x}) = 1$ und $I(\underline{y}) = 0$.

Lösung

a) Syntaktische (‘bottom up’-)Analyse von π:

- $\underline{x},\underline{y} \in IVS \overset{BA1}{\Longrightarrow} \underline{\equiv}\underline{(}\underline{x}\underline{,}\underline{y}\underline{)} \in \mathcal{BA}(\mathbb{Z}) \overset{BA2}{\Longrightarrow} \underline{(}\underline{x}\underline{\neq}\underline{y}\underline{)} \in \mathcal{BA}(\mathbb{Z})$, da $\underline{(}\underline{x}\underline{\neq}\underline{y}\underline{)}$ für $\underline{\neg}\underline{\equiv}\underline{(}\underline{x}\underline{,}\underline{y}\underline{)}$ steht
- $\underline{x} \in IVS,\ \underline{(}\underline{x}\underline{-}\underline{1}\underline{)} \in \mathcal{T}(\mathbb{Z}) \overset{AL1}{\Longrightarrow} \alpha_1 = \underline{x}\underline{\leftarrow}\underline{(}\underline{x}\underline{-}\underline{1}\underline{)} \in ALI$
- $\underline{y} \in IVS,\ \underline{0} \in \mathcal{T}(\mathbb{Z}) \overset{AL1}{\Longrightarrow} \alpha_2 = \underline{y}\underline{\leftarrow}\underline{0} \in ALI$
- $\alpha_1, \alpha_2 \in AL \overset{AL2}{\Longrightarrow} \beta = \underline{\text{begin}}\ \alpha_1\,\underline{;}\,\alpha_2\ \underline{\text{end}} \in ALI$
- $\underline{(}\underline{x}\underline{\neq}\underline{y}\underline{)} \in \mathcal{BA}(\mathbb{Z}),\ \beta \in ALI \overset{AL4}{\Longrightarrow} \pi = \underline{\text{while}}\ \underline{(}\underline{x}\underline{\neq}\underline{y}\underline{)}\ \underline{\text{do}}\ \beta \in ALI$

b) Semantische Analyse, sprich: Auswertung von π in der Variablenbelegung I (unter Verwendung der Abkürzungen α_1, α_2, β. π wie oben vereinbart):

$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{M}_{AL}(I,\pi) & = & \mathcal{M}_{AL}(I, \underline{\text{while}}\ \underline{(}\underline{\text{x}}\underline{\neq}\underline{\text{y}}\underline{)}\ \underline{\text{do}}\ \beta) \\
 & & \left[\ \mathcal{M}_{BA}(I, \underline{(}\underline{\text{x}}\underline{\neq}\underline{\text{y}}\underline{)}) = (\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,\underline{\text{x}}) \neq \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,\underline{\text{y}})) = (1\neq 0) = \mathbf{t}\ \right] \\
 & \overset{MAL4}{=} & \mathcal{M}_{AL}(\mathcal{M}_{AL}(I,\beta), \underline{\text{while}}\ \underline{(}\underline{\text{x}}\underline{\neq}\underline{\text{y}}\underline{)}\ \underline{\text{do}}\ \beta) \\
 & \overset{MAL2}{=} & \mathcal{M}_{AL}(\mathcal{M}_{AL}(\mathcal{M}_{AL}(I,\alpha_1),\alpha_2), \underline{\text{while}}\ \underline{(}\underline{\text{x}}\underline{\neq}\underline{\text{y}}\underline{)}\ \underline{\text{do}}\ \beta) \\
 & \overset{MAL1}{=} & \mathcal{M}_{AL}(\mathcal{M}_{AL}(I',\alpha_2), \underline{\text{while}}\ \underline{(}\underline{\text{x}}\underline{\neq}\underline{\text{y}}\underline{)}\ \underline{\text{do}}\ \beta) \\
 & & \text{wobei} \quad I'(\underline{\text{x}}) = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{(}\underline{\text{x}}\underline{-}\underline{1}\underline{)}) = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,\underline{\text{x}}) - \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,\underline{1}) \\
 & & \qquad\qquad\quad = I(\underline{\text{x}}) - 1 = 1 - 1 = 0 \\
 & & \qquad\qquad I'(v) = I(v) \text{ für } v \neq \underline{\text{x}} \\
 & \overset{MAL1}{=} & \mathcal{M}_{AL}(I'', \underline{\text{while}}\ \underline{(}\underline{\text{x}}\underline{\neq}\underline{\text{y}}\underline{)}\ \underline{\text{do}}\ \beta) \\
 & & \text{wobei} \quad I''(\underline{\text{y}}) = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,\underline{0}) = 0 \\
 & & \qquad\qquad I''(v) = I'(v) \text{ für } v \neq \underline{\text{y}} \\
 & & \left[\begin{array}{l} \mathcal{M}_{BA}(I'', \underline{(}\underline{\text{x}}\underline{\neq}\underline{\text{y}}\underline{)}) = (\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I'',\underline{\text{x}}) \neq \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I'',\underline{\text{y}})) = (I''(\underline{\text{x}}) \neq I''(\underline{\text{y}}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = (I'(\underline{\text{x}}) \neq 0) = (0 \neq 0) = \mathbf{f} \end{array} \right] \\
 & \overset{MAL4}{=} & I''
\end{array}
$$