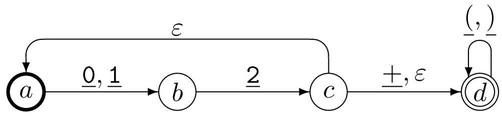
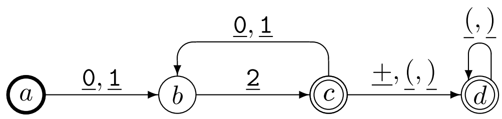
Theoretische Informatik 1 – Übungsblatt 2 (SS2006) Lösungen

Aufgabe 2.1 Geben Sie einen endlichen Automaten an, der dieselbe Sprache akzeptiert wie der `egrep`-Ausdruck `([01]2)+\+?(\(|\))*`. Der Automat muss weder deterministisch noch minimal sein.

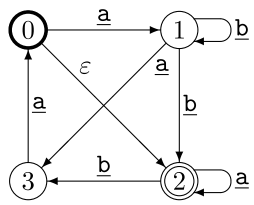
Lösung $\mathcal{A} = \langle\{a,b,c,d\}, \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{+}, \underline{(}, \underline{)}\}, \delta, a, \{d\}\rangle$, wobei die Übergangsfunktion δ durch folgenden Graphen beschrieben wird:



Dieser Automat ist nicht deterministisch (wegen der ε-Übergänge). Die Lösung der Aufgabe ist nicht eindeutig, da es viele andere Automaten gibt, die dieselbe Sprache akzeptieren. Der (bis auf Umbenennung der Zustände eindeutige) minimale deterministische Automat wäre:



Aufgabe 2.2 Sei $\mathcal{A}$ der folgende Automat, wobei 0 Start- und 2 Endzustand ist.



Geben Sie alle Zustandsfolgen (Pfade) an, die vom Startzustand 0 aus mit dem Wort $w = \underline{\mathtt{abaa}}$ durchlaufen werden können. Gilt $w \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$?

Lösung Die durchlaufenen Zustandsfolgen sind:

$$0 \overset{\mathtt{a}}{\rightsquigarrow} 1 \overset{\mathtt{b}}{\rightsquigarrow} 1 \overset{\mathtt{a}}{\rightsquigarrow} 3 \overset{\mathtt{a}}{\rightsquigarrow} 0$$
$$0 \overset{\mathtt{a}}{\rightsquigarrow} 1 \overset{\mathtt{b}}{\rightsquigarrow} 1 \overset{\mathtt{a}}{\rightsquigarrow} 3 \overset{\mathtt{a}}{\rightsquigarrow} 0 \overset{\varepsilon}{\rightsquigarrow} 2$$
$$0 \overset{\mathtt{a}}{\rightsquigarrow} 1 \overset{\mathtt{b}}{\rightsquigarrow} 2 \overset{\mathtt{a}}{\rightsquigarrow} 2 \overset{\mathtt{a}}{\rightsquigarrow} 2$$
$$0 \overset{\varepsilon}{\rightsquigarrow} 2 \overset{\mathtt{a}}{\rightsquigarrow} 2 \overset{\mathtt{b}}{\rightsquigarrow} 3 \overset{\mathtt{a}}{\rightsquigarrow} 0 \overset{\mathtt{a}}{\rightsquigarrow} 1$$
$$0 \overset{\varepsilon}{\rightsquigarrow} 2 \overset{\mathtt{a}}{\rightsquigarrow} 2 \overset{\mathtt{b}}{\rightsquigarrow} 3 \overset{\mathtt{a}}{\rightsquigarrow} 0 \overset{\varepsilon}{\rightsquigarrow} 2 \overset{\mathtt{a}}{\rightsquigarrow} 2$$

Da es einen Pfad gibt, der zum Endzustand führt, wird das Wort akzeptiert, d.h., $\underline{\mathtt{abaa}} \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Aufgabe 2.3 Konstruieren Sie zum indeterministischen Automaten aus Aufgabe 2.2 einen äquivalenten deterministischen.

Lösung Wir berechnen zuerst die erweiterte Übergangsfunktion für die Symbole des Alphabets:

δ^*	$\underline{\mathtt{a}}$	$\underline{\mathtt{b}}$
0	$\{1,2\}$	$\{3\}$
1	$\{3\}$	$\{1,2\}$
2	$\{2\}$	$\{3\}$
3	$\{0,2\}$	$\{\}$

Daraus erhalten wir die Übergangsfunktion des deterministischen Automaten:

$\hat{\delta}$	$\underline{\mathtt{a}}$	$\underline{\mathtt{b}}$
$\{0\}$	$\{1,2\}$	$\{3\}$
$\{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\{3\}$	$\{0,2\}$	$\{\}$
$\{2,3\}$	$\{0,2\}$	$\{3\}$
$\{1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\{0,2\}$	$\{1,2\}$	$\{3\}$
$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\{0,2,3\}$	$\{0,1,2\}$	$\{3\}$
$\{0,1,2\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$

Alle Zustände, die den Endzustand des indeterministischen Automaten, 2, enthalten, sind Endzustände des deterministischen Automaten. Außerdem ist auch der Startzustand ein Endzustand, da der indeterministische Automat das Leerwort akzeptiert. Daher wird der deterministische Automat spezifiziert durch

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \quad = \quad \langle\ & \{\{0\},\{1,2\},\{3\},\{2,3\},\{1,2,3\},\{0,2\},\{\},\{0,2,3\},\{0,1,2\}\},\\ & \{\underline{\mathtt{a}},\underline{\mathtt{b}}\},\ \hat{\delta},\ \{0\},\\ & \{\{0\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\},\{0,2\},\{0,2,3\},\{0,1,2\}\}\ \rangle\ .\end{aligned}$$

Aufgabe 2.4 Sei $\mathcal{A}$ der endliche Automat $\langle\{0,\ldots,6\},\ \{\underline{\mathtt{a}},\underline{\mathtt{b}}\},\ \delta,\ 0,\ \{1,6\}\rangle$, wobei die Übergangsfunktion definiert ist durch

δ	$\underline{\mathtt{a}}$	$\underline{\mathtt{b}}$
0	5	6
1	0	6
2	0	5
3	5	1
4	4	4
5	6	1
6	3	1

Konstruieren Sie mit Hilfe einer Unterscheidbarkeitstabelle einen minimalen deterministischen Automaten, der äquivalent zu $\mathcal{A}$ ist, und stellen Sie ihn graphisch dar.

Lösung Im ersten Schritt eliminieren wir alle nicht-erreichbaren Zustände. Ausgehend vom Startzustand 0 notieren wir alle erreichbaren Zustände:

$$\begin{array}{ll} 0 & \\ 0 & 5\,6 \\ 0\,5 & 6\,1 \\ 0\,5\,6 & 1\,3 \\ 0\,5\,6\,1 & 3 \\ 0\,5\,6\,1\,3 & \end{array}$$

Wir können somit die Zustände 2 und 4 steichen:

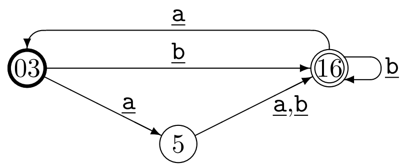
δ'	$\underline{\mathtt{a}}$	$\underline{\mathtt{b}}$
0	5	6
1	0	6
3	5	1
5	6	1
6	3	1

Für die verbleibenden Zustände erhalten wir folgende Unterscheidbarkeitstabelle:

	0	1	3	5
1	ε			
3		ε		
5	$\underline{\mathtt{a}}$	ε	$\underline{\mathtt{a}}$	
6	ε		ε	ε

Daher sind die Zustände 0 und 3 sowie die Zustände 1 und 6 ununterscheidbar und können jeweils zu einem einzigen zusammengefasst werden, den wir 03 bzw. 16 nennen. Wir erhalten den Automaten $\langle\{03, 16, 5\},\ \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\},\ \delta'',\ 03, \{16\}\rangle$, wobei δ'' wie folgt definiert ist:

δ''	$\underline{\mathtt{a}}$	$\underline{\mathtt{b}}$
03	5	16
16	03	16
5	16	16



Aufgabe 2.5 Wir bezeichnen mit $n_s(w)$ die Anzahl der Vorkommnisse des Symbols s im Wort w. Beispiele: $n_{\underline{\mathtt{a}}}(\underline{\mathtt{abbab}}) = 2$, $n_{\underline{\mathtt{b}}}(\underline{\mathtt{abbab}}) = 3$, $n_{\underline{\mathtt{c}}}(\underline{\mathtt{abbab}}) = 0$.
Sei L die Sprache $\{w \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^* \mid n_{\underline{\mathtt{a}}}(w) \bmod 3 > n_{\underline{\mathtt{b}}}(w) \bmod 3\}$, d.h., L enthält Wörter wie $\underline{\mathtt{aba}}$ und $\underline{\mathtt{bbab}}$, nicht aber $\underline{\mathtt{bab}}$ oder $\underline{\mathtt{aabba}}$. Geben Sie einen endlichen Automaten für L an.

Lösung Eine Zustandsbezeichnung m/n bedeutet, dass die Anzahl der bisher gelesenen $\underline{\mathtt{a}}$s kongruent m und jene der $\underline{\mathtt{b}}$s kongruent n modulo 3 ist.