Theoretische Informatik 1 – Übungsblatt 9 (SS2006) Lösungen

Aufgabe 9.1 Drücken Sie folgende Prädikate bzw. Sätze als Formeln in $\mathbb{N}$ über der Standardsignatur aus. Lassen Sie dabei Unterstreichungen weg und verwenden Sie Infixnotation, aber achten Sie auf korrekte Klammerung.

a) x ist das kleinste gemeinsame Vielfache von y und z.

b) Zu jeder Quadratzahl gibt es eine noch größere Quadratzahl.

c) y ist keine Lösung der Gleichung $x^2 \dot{-} (3x+2) = 0$ (in den natürlichen Zahlen ω).
Hinweis: Beachten Sie, dass 2 und 3 keine Konstanten in der Modellstruktur $\mathbb{N}$ sind!

Lösung

a) $([(\exists u)x = u * y \land (\exists u)x = u * z] \land (\forall v)[((\exists u)v = u * y \land (\exists u)v = u * z) \supset (v = x \lor x < v)])$

b) $(\forall x)[(\exists y)x = y * y \supset (\exists z)((\exists y)z = y * y \land x < z)]$

c) $\neg\,(y * y) \dot{-} ((y + (y + y)) + (1 + 1)) = 0$

Es gibt natürlich jeweils auch Varianten der genannten Lösungen.

Aufgabe 9.2 Geben Sie zu folgenden Formeln, soweit möglich, jeweils ein Modell und ein Gegenbeispiel an.

a) $(\forall x)(\exists y)P(z,x,y) \supset (\exists x)(\forall y)P(z,x,y)$

b) $(\forall x)(\exists y)\neg R(x,y) \lor (\exists y)(\forall x)R(x,y)$

c) $\neg P(a,a) \land (\forall x)(\forall y)[P(f(x),y) \lor \neg P(x,y)] \land (\forall x)P(f(x),x)$

Lösung

a) Modell: $\mathcal{J} = \langle\langle\{0\},\{\},\{T\},\{\}\rangle,\Phi,I\rangle$, mit $T(0,0,0) = \mathbf{t}$, $\Phi(P) = T$ und $I(v) = 0$ für alle $v \in IVS$. Unter $\mathcal{J}$ ist die Formel wahr, da sowohl $\mathcal{M}_{PF}(\mathcal{J},(\forall x)(\exists y)P(z,x,y)) = \mathbf{t}$ als auch $\mathcal{M}_{PF}(\mathcal{J},(\exists x)(\forall y)P(z,x,y)) = \mathbf{t}$ gilt. (Ebenso ist aber auch jede Interpretation, in der $(\forall x)(\exists y)P(z,x,y)$ falsch ist, ist ein Modell der Implikation.)

Gegenbeispiel: $\mathcal{J} = \langle\langle\omega,\{\},\{G\},\{\}\rangle,\Phi,I\rangle$, mit $G(k,m,n) \iff m < n + k$, $\Phi(P) = G$ und $I(v) = 0$ für alle $v \in IVS$.
Erklärung: Wegen $I(z) = 0$ reduziert sich $\mathcal{M}_{PF}(\mathcal{J},P(z,x,y))$ zu $I(x) < I(y)$. Da zu jeder Zahl $\in \omega$ ein noch größere Zahl existiert, aber es keine Zahl n gibt, die echt kleiner ist als alle Zahlen (inklusive n selbst), ist die Formel (Implikation) unter dieser Interpretation $\mathcal{J}$ falsch.

b) Jede Interpetation, deren Gegenstandsbereich nur ein Element enthält, ist ein Modell der Formel. Z.B.: $\mathcal{J} = \langle\langle\{0\},\{\},\{=\},\{\}\rangle,\Phi,I\rangle$, mit $\Phi(P) == $ und $I(v) = 0$ für alle $v \in IVS$.

Gegenbeispiel: $\mathcal{J} = \langle\langle\omega,\{\},\{\leq\},\{\}\rangle,\Phi,I\rangle$, mit $\Phi(P) =\leq$ und $I(v) = 0$ für alle $v \in IVS$.
Erklärung: Unter dieser Interpretation $\mathcal{J}$ besagt die linke Teilformel: "Für alle $m \in \omega$ gibt es ein $n \in \omega$, sodass $m > n$", während die rechte Teilformel ausdrückt: "Es gibt ein $n \in \omega$, sodass $m \leq n$ für alle $m \in \omega$". Da beide Aussagen falsch sind, ist die gesamte Formel (Disjunktion) unter der Interpretation $\mathcal{J}$ falsch.

c) Modell: $\mathcal{J} = \langle\langle \omega, \{succ\}, \{>\}, \{0\}\rangle, \Phi, I\rangle$, wobei *succ* die Nachfolgerfunktion ($n \mapsto n+1$) ist; $\Phi(f) = succ$, $\Phi(P) =>$, sowie $\Phi(a) = 0$. (I beliebig, z.B., $I(v) = 0$ für alle $v \in IVS$).
Erklärung: $\neg P(a,a)$, drückt unter dieser Interpretation "$0 \leq 0$" aus. $(\forall x)(\forall y)[P(f(x),y) \vee \neg P(x,y)]$ drückt aus, dass für alle $m, n \in \omega$ $m+1 > n$ oder $m \leq n$ gilt. $(\forall x)P(f(x),x)$ drückt aus, dass $n+1 > n$ für alle $n \in \omega$. Da alle drei Aussagen wahr sind, ist auch die Konjunktion der drei Teilformeln wahr in $\mathcal{J}$.

Gegenbeispiel: Wie $\mathcal{J}$, außer dass $\Phi(P) =\geq$. *Erklärung:* Es reicht, dass $\neg P(a,a)$, das unter dieser Interpretation "$0 < 0$" ausdrückt, falsch wird.

Aufgabe 9.3 Finden Sie zu folgenden Äquivalenzbehauptungen jeweils einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel.

a) $(\forall x)(\exists y)P(x,y) \sim_e (\exists x)(\forall y)P(y,x)$

b) $(\exists y)R(x,y) =_{\text{PL}} (\exists z)R(x,z)$

c) $(\forall x)[Q(x) \wedge \neg Q(x)] \sim_e (\exists x)[Q(x) \supset \neg Q(x)]$

d) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) =_{\text{PL}} (\forall x)(\forall y)P(x,y)$

Lösung

a) Beide Formeln sind erfüllbar. Es gilt zum Beispiel $\mathcal{M}_{PF}(\mathcal{J}, (\forall x)(\exists y)P(x,y))=\mathbf{t}$, aber auch $\mathcal{M}_{PF}(\mathcal{J}, (\exists x)(\forall y)P(y,x))=\mathbf{t}$ für $\mathcal{J} = \langle\langle \{0\}, \{\}, \{\leq\}, \{\}\rangle, \Phi, I\rangle$, mit $\Phi(P) =\leq$ und $I(v) = 0$ für alle $v \in IVS$. Die Formeln sind daher erfüllungsäquivalent, in Zeichen: $(\forall x)(\exists y)P(x,y) \sim_e (\exists x)(\forall y)P(y,x)$.

b) Es gilt ganz allgemein $\mathcal{M}_{PF}(\mathcal{J}, (\exists y)F) = \mathcal{M}_{PF}(\mathcal{J}, (\exists z)F(y/z))$ falls $z \notin FV(F)$. Die Bedingung MPF7 der Definition der Auswertungsfunktion besagt, dass $\mathcal{M}_{PF}(\mathcal{J}, (\exists y)F) = \mathbf{t}$ gdw $\mathcal{M}_{PF}(\mathcal{J}', F)=\mathbf{t}$ für ein $\mathcal{J}' \overset{y}{\sim} \mathcal{J}$. Letzere Bedingung ist aber identisch mit $\mathcal{M}_{PF}(\mathcal{J}', F(y/z))=\mathbf{t}$ für ein $\mathcal{J}' \overset{z}{\sim} \mathcal{J}$, falls z in F nicht frei vorkommt. Daher auch $(\exists y)R(x,y) =_{\text{PL}} (\exists z)R(x,z)$.

c) Wegen $\mathcal{M}_{PF}(\mathcal{J}, Q(x)) = \mathbf{f}$ gdw. $\mathcal{M}_{PF}(\mathcal{J}, \neg Q(x)) = \mathbf{t}$ folgt $\mathcal{M}_{PF}(\mathcal{J}, (\forall x)[Q(x) \wedge \neg Q(x)]) = \mathbf{f}$ für alle Interpretationen $\mathcal{J}$. Mit anderen Worten: $(\forall x)[Q(x) \wedge \neg Q(x)]$ ist unerfüllbar. Anderseits gilt $\mathcal{M}_{PF}(\mathcal{J}, (\exists x)[Q(x) \supset \neg Q(x)]) = \mathbf{t}$ in jeder Interpretation $\mathcal{J} = \langle \mathcal{D}, \Phi, I\rangle$, in der das Prädikat $\Phi(Q)$ auf wenigstens ein Element des Gegenstandbereichs nicht zutrifft. Mit anderen Worten: $(\exists x)[Q(x) \supset \neg Q(x)]$ ist erfüllbar. Die beiden Formeln sind also nicht erfüllungsäquivalent.

d) Die Interpretation $\mathcal{J} = \langle\langle \omega, \{\}, \{\leq\}, \{\}\rangle, \Phi, I\rangle$, mit $\Phi(P) =\leq$ (I beliebig) ist ein Gegenbeipiel zu dieser Behauptung. Unter dieser Intpretation drückt $(\exists x)(\forall y)P(x,y)$ aus, dass es eine kleinste natürliche Zahl gibt, und $(\forall x)(\forall y)P(x,y)$ drückt aus, dass jede Zahl kleiner oder gleich jeder (anderen oder selben) Zahl ist. Es gilt also $\mathcal{M}_{PF}(\mathcal{J}, (\exists x)(\forall y)P(x,y)) = \mathbf{t}$ und $\mathcal{M}_{PF}(\mathcal{J}, (\forall x)(\forall y)P(x,y)) = \mathbf{f}$; und daher $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \neq_{\text{PL}} (\forall x)(\forall y)P(x,y)$

Aufgabe 9.4 Zeigen Sie die Gültigkeit von $(\exists x)[Q(x) \supset (\forall y)Q(y)]$ mit dem Tableau-Kalkül oder finden Sie ein Gegenbeispiel, falls diese Formel nicht gültig ist.

Lösung Folgendes Tableau ist geschlossen; daher ist $(\exists x)[Q(x) \supset (\forall y)Q(y)]$ gültig:

$$
\begin{array}{rcl}
(1) & \mathbf{f} : (\exists x)[Q(x) \supset (\forall y)Q(y)] & \text{Annahme} \\
\cline{2-2}
(2) & \mathbf{f} : Q(a) \supset (\forall y)Q(y) & \text{von } 1 \\
\cline{2-2}
(3) & \mathbf{t} : Q(a) & \text{von } 2 \\
(4) & \mathbf{f} : (\forall y)Q(y) & \text{von } 2 \\
\cline{2-2}
(5) & \mathbf{f} : Q(c) & \text{von } 4 \\
\cline{2-2}
(6) & \mathbf{f} : Q(c) \supset (\forall y)Q(y) & \text{von } 1 \\
\cline{2-2}
(7) & \mathbf{t} : Q(c) & \text{von } 6 \\
(8) & \mathbf{f} : (\forall y)Q(y) & \text{von } 6 \\
 & \times & \text{Wid.: } 5/7
\end{array}
$$

Man Beachte, dass in Zeile 5 ein neuer Parameter als 'Zeuge' fur die δ-Formel $\mathbf{f} : (\forall y)Q(y)$ gewählt werden muss. Hingegen kann in Zeile 6 auch dieser Parameter c zur Instanzierung der γ-Formel $\mathbf{f} : (\exists x)[Q(x) \supset (\forall y)Q(y)]$ verwendet werden.

Aufgabe 9.5 Verwenden Sie den Tableau-Kalkül um folgenden Satz zu beweisen: Jede reflexive, euklidische Relation ist symmetrisch. Genauer: Zeigen Sie mittels eines entsprechenden geschlossenen Tableaus, dass $\mathit{refl}, \mathit{eukl} \models \mathit{sym}$ gilt, wobei:

$$\begin{aligned} \mathit{refl} &= (\forall x)R(x,x), \\ \mathit{eukl} &= (\forall x)(\forall y)(\forall z)[(R(x,y) \wedge R(x,z)) \supset R(y,z)], \\ \mathit{sym} &= (\forall x)(\forall y)[R(x,y) \supset R(y,x)]. \end{aligned}$$

Lösung

(1)	$\mathbf{t} : (\forall x)R(x,x)$							Annahme
(2)	$\mathbf{t} : (\forall x)(\forall y)(\forall z)[(R(x,y) \wedge R(x,z)) \supset R(y,z)]$							Annahme
(3)	$\mathbf{f} : (\forall x)(\forall y)[R(x,y) \supset R(y,x)]$							Annahme
(4)	$\mathbf{f} : (\forall y)[R(c,y) \supset R(y,c)]$							von 3
(5)	$\mathbf{f} : R(c,d) \supset R(d,c)$							von 4
(6)	$\mathbf{t} : R(c,d)$							von 5
(7)	$\mathbf{f} : R(d,c)$							von 5
(8)	$\mathbf{t} : (\forall y)(\forall z)[(R(c,y) \wedge R(c,z)) \supset R(y,z)]$							von 2
(9)	$\mathbf{t} : (\forall z)[(R(c,d) \wedge R(c,z)) \supset R(d,z)]$							von 8
(10)	$\mathbf{t} : (R(c,d) \wedge R(c,c)) \supset R(d,c)$							von 9
(11)	$\mathbf{f} : R(c,d) \wedge R(c,c)$				von 10	(12)	$\mathbf{t} : R(d,c)$	von 10
(13)	$\mathbf{f} : R(c,d)$	von 11	(14)	$\mathbf{f} : R(c,c)$	von 11		$\times$	Wid.: 7/12
	$\times$	Wid.: 6/13	(15)	$\mathbf{t} : R(c,c)$	von 1			
				$\times$	Wid.: 14/15			

Das Tableau zeigt, dass es keine Interpretation gibt, unter der die Relation R zwar reflexiv und euklidisch, aber nicht symmetrisch ist.