Theoretische Informatik 1 – Übungsblatt 10 (SS2006) Lösungen

Aufgabe 10.1 Bringen Sie folgende Formel G schrittweise in Klauselform:

$$G = \neg((\exists x)P(x, f(a)) \vee (\exists x)[P(x, b) \vee ((\forall y)[P(y, x) \supset (\forall z)P(f(z), y)] \wedge (\forall z)(\exists y)P(z, y))])$$

Lösung
Schritt A:

$$\begin{array}{rl}
A \overset{\text{T3}}{\Rightarrow} & \neg(\exists x)P(x, f(a)) \wedge \neg(\exists x)[P(x, b) \vee ((\forall y)[P(y, x) \supset (\forall z)P(f(z), y)] \wedge (\forall z)(\exists y)P(z, y))] \\
\overset{\text{T6}}{\Rightarrow} & (\forall x)\neg P(x, f(a)) \wedge \neg(\exists x)[P(x, b) \vee ((\forall y)[P(y, x) \supset (\forall z)P(f(z), y)] \wedge (\forall z)(\exists y)P(z, y))] \\
\overset{\text{T6}}{\Rightarrow} & (\forall x)\neg P(x, f(a)) \wedge (\forall x)\neg[P(x, b) \vee ((\forall y)[P(y, x) \supset (\forall z)P(f(z), y)] \wedge (\forall z)(\exists y)P(z, y))] \\
\overset{\text{T3}}{\Rightarrow} & (\forall x)\neg P(x, f(a)) \wedge (\forall x)[\neg P(x, b) \wedge \neg((\forall y)[P(y, x) \supset (\forall z)P(f(z), y)] \wedge (\forall z)(\exists y)P(z, y))] \\
\overset{\text{T1}}{\Rightarrow} & (\forall x)\neg P(x, f(a)) \wedge (\forall x)[\neg P(x, b) \wedge \neg((\forall y)[\neg P(y, x) \vee (\forall z)P(f(z), y)] \wedge (\forall z)(\exists y)P(z, y))] \\
\overset{\text{T2}}{\Rightarrow} & (\forall x)\neg P(x, f(a)) \wedge (\forall x)[\neg P(x, b) \wedge (\neg(\forall y)[\neg P(y, x) \vee (\forall z)P(f(z), y)] \vee \neg(\forall z)(\exists y)P(z, y))] \\
\overset{\text{T5}}{\Rightarrow} & (\forall x)\neg P(x, f(a)) \wedge (\forall x)[\neg P(x, b) \wedge ((\exists y)\neg[\neg P(y, x) \vee (\forall z)P(f(z), y)] \vee \neg(\forall z)(\exists y)P(z, y))] \\
\overset{\text{T3}}{\Rightarrow} & (\forall x)\neg P(x, f(a)) \wedge (\forall x)[\neg P(x, b) \wedge ((\exists y)[\neg\neg P(y, x) \wedge \neg(\forall z)P(f(z), y)] \vee \neg(\forall z)(\exists y)P(z, y))] \\
\overset{\text{T4}}{\Rightarrow} & (\forall x)\neg P(x, f(a)) \wedge (\forall x)[\neg P(x, b) \wedge ((\exists y)[P(y, x) \wedge \neg(\forall z)P(f(z), y)] \vee \neg(\forall z)(\exists y)P(z, y))] \\
\overset{\text{T5}}{\Rightarrow} & (\forall x)\neg P(x, f(a)) \wedge (\forall x)[\neg P(x, b) \wedge ((\exists y)[P(y, x) \wedge (\exists z)\neg P(f(z), y)] \vee \neg(\forall z)(\exists y)P(z, y))] \\
\overset{\text{T5}}{\Rightarrow} & (\forall x)\neg P(x, f(a)) \wedge (\forall x)[\neg P(x, b) \wedge ((\exists y)[P(y, x) \wedge (\exists z)\neg P(f(z), y)] \vee (\exists z)\neg(\exists y)P(z, y))] \\
\overset{\text{T6}}{\Rightarrow} & (\forall x)\neg P(x, f(a)) \wedge (\forall x)[\neg P(x, b) \wedge ((\exists y)[P(y, x) \wedge (\exists z)\neg P(f(z), y)] \vee (\exists z)(\forall y)\neg P(z, y))]
\end{array}$$

Schritt B: Zunächst muss die erhaltene NNF syntaxbereinigt werden:

$$\overset{\text{Q1}}{\Rightarrow} \quad (\forall u)\neg P(u, f(a)) \wedge (\forall x)[\neg P(x, b) \wedge ((\exists y)[P(y, x) \wedge (\exists z)\neg P(f(z), y)] \vee (\exists v)(\forall w)\neg P(v, w))]$$

Skolemisierung:

$$\begin{array}{rl}
\overset{\text{Sko}}{\Rightarrow} & (\forall u)\neg P(u, f(a)) \wedge (\forall x)[\neg P(x, b) \wedge ([P(g(x), x) \wedge (\exists z)\neg P(f(z), g(x))] \vee (\exists v)(\forall w)\neg P(v, w))] \\
\overset{\text{Sko}}{\Rightarrow} & (\forall u)\neg P(u, f(a)) \wedge (\forall x)[\neg P(x, b) \wedge ([P(g(x), x) \wedge \neg P(f(h(x)), g(x))] \vee (\exists v)(\forall w)\neg P(v, w))] \\
\overset{\text{Sko}}{\Rightarrow} & (\forall u)\neg P(u, f(a)) \wedge (\forall x)[\neg P(x, b) \wedge ([P(g(x), x) \wedge \neg P(f(h(x)), g(x))] \vee (\forall w)\neg P(i(x), w))]
\end{array}$$

Schritt C: $\Rightarrow \neg P(u, f(a)) \wedge [\neg P(x, b) \wedge ([P(g(x), x) \wedge \neg P(f(h(x)), g(x))] \vee \neg P(i(x), w))]$

Schritt D:

$$\overset{\text{D2}}{\Rightarrow} \quad \neg P(u, f(a)) \wedge [\neg P(x, b) \wedge ([P(g(x), x) \vee \neg P(i(x), w)] \wedge [\neg P(f(h(x)), g(x)) \vee \neg P(i(x), w)])]$$

Wir erhalten

$$cl(G) = \big\{\{\neg P(u, f(a))\},\ \{\neg P(x, b)\},\ \{P(g(x), x), \neg P(i(x), w)\},\ \{\neg P(f(h(x)), g(x)), \neg P(i(x), w)\}\big\}$$

Aufgabe 10.2 Wenden Sie das Regelsystem $\mathcal{UR}$ an um für folgende Atommengen einen allgemeinsten Unifikator zu berechnen, bzw. um festzustellen, dass die Menge nicht unifizierbar ist.

a) $\{R(x, f(y, z), g(y)),\ R(u, x, g(z))\}$

b) $\{P(a, x),\ P(y, f(c)),\ P(z, z)\}$

Lösung

a) Ein entsprechendes Term-Gleichungssystem lautet $\mathcal{E} = \{x \doteq u, f(y, z) \doteq x, g(y) \doteq g(z)\}$. Durch Anwendung von Regeln aus $\mathcal{UR}$ erhalten wir:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{E} & \stackrel{\text{orient}}{\Rightarrow} & \{x \doteq u, x \doteq f(y, z), g(y) \doteq g(z)\} \\ & \stackrel{\text{elim.}}{\Rightarrow} & \{x \doteq u, u \doteq f(y, z), g(y) \doteq g(z)\} \\ & \stackrel{\text{elim.}}{\Rightarrow} & \{u \doteq f(y, z), x \doteq f(y, z), g(y) \doteq g(z)\} \\ & \stackrel{\text{decomp.}}{\Rightarrow} & \{u \doteq f(y, z), x \doteq f(y, z), y \doteq z\} \\ & \stackrel{\text{elim.}}{\Rightarrow} & \{y \doteq z, u \doteq f(z, z), x \doteq f(z, z)\} \end{array}$$

Aus der gelösten Form erhalten wir den MGU $\sigma = \{y \leftarrow z, u \leftarrow f(z, z), x \leftarrow f(z, z)\}$.
Probe: Es gilt $\sigma(R(x, f(y, z), g(y))) = R(f(z, z), f(z, z), g(z)) = \sigma(R(u, x, g(z)))$.

b) Ein entsprechendes Term-Gleichungssystem lautet $\mathcal{E} = \{a \doteq y, x \doteq f(c), y \doteq z, f(c) \doteq z\}$. Durch Anwendung von Regeln aus $\mathcal{UR}$ erhalten wir:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{E} & \stackrel{\text{elim.}}{\Rightarrow} & \{y \doteq z, a \doteq z, x \doteq f(c), f(c) \doteq z\} \\ & \stackrel{\text{orient}}{\Rightarrow} & \{y \doteq z, z \doteq a, x \doteq f(c), f(c) \doteq z\} \\ & \stackrel{\text{elim.}}{\Rightarrow} & \{z \doteq a, y \doteq a, x \doteq f(c), f(c) \doteq a\} \\ & \stackrel{\text{clash}}{\Rightarrow} & \bot \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist also nicht lösbar. D.h., dass es keinen Unifikator der Menge $\{P(a, x), P(y, f(c)), P(z, z)\}$ gibt.

Aufgabe 10.3 Finden Sie zur Klauselmenge $\Pi = \{C_1, C_2, C_3\}$ mit $C_1 = \{P(x, a), P(f(u), u)\}$, $C_2 = \{\neg P(x, y), P(g(x), y)\}$, $C_3 = \{P(x, x), P(a, y), P(y, y)\}$

a) alle Faktoren von Klauseln in Π,

b) alle binären Resolventen von Varianten von Klauseln in Π,

c) alle Robinson-Resolventen von Varianten von Klauseln in Π.

Beachten Sie, dass die Varianten variablenfremd sein müssen. Es genügt jeweils eine Variante einer Klausel anzugeben. Geben Sie auch jeweils die verwendenten MGUs und das resolvierte Atom an.

Lösung

a) C_1, C_2 und C_3 sind jeweils auch Faktoren ihrer selbst.
Darüberhinaus hat C_1 den Faktor $\{P(f(a), a\}$ mit MGU $\{x \leftarrow f(a), u \leftarrow a\}$.
C_2 hat keinen weiteren Faktor.
C_3 hat drei weitere (bis auf Variablenumbenennungen) verschiedene Faktoren:

- $\{P(a, a)\}$ mit MGU $\{x \leftarrow a, y \leftarrow a\}$ aller Literale der Klausel C_3.
- $\{P(x, x), P(a, a)\}$ mit MGU $\{y \leftarrow a\}$ der Teilmenge $\{P(a, y), P(y, y)\}$ von C_3.
- $\{P(a, y), P(y, y)\}$ mit MGU $\{x \leftarrow y\}$ der Teilmenge $\{P(x, x), P(y, y)\}$ von C_3. (Diese Teilmenge hat auch den MGU $\{y \leftarrow x\}$. Doch der entsprechende Faktor $\{P(a, x), P(x, x)\}$ ist nur eine Variante von $\{P(a, y), P(y, y)\}$.)

b) Wir betrachten zunächst folgende paarweise variablenfremde Varianten: $C_1 = \{P(x,a), P(f(u),u)\}$, $C_2' = \{\neg P(z,y), P(g(z),y)\}$, und $C_3' = \{P(v,v), P(a,w), P(w,w)\}$. Folgende binäre Resoventen können aus diesen Elternklauseln gebildet werden:

1. $\{P(f(u),u), P(g(z),a)\}$ binärer Resovent von C_1, C_2' mit MGU $\{x \leftarrow z, y \leftarrow a\}$,
   resolviertes Atom: $P(z,a)$
2. $\{P(x,a), P(g(f(u)),u)\}$ binärer Resovent von C_1, C_2' mit MGU $\{z \leftarrow f(u), y \leftarrow u\}$,
   resolviertes Atom: $P(f(u),u)$
3. $\{P(g(v),v), P(a,w), P(w,w)\}$ binärer Resovent von C_2', C_3' mit MGU $\{z \leftarrow v, y \leftarrow v\}$,
   resolviertes Atom: $P(v,v)$
4. $\{P(g(a),w), P(v,v), P(w,w)\}$ binärer Resovent von C_2', C_3' mit MGU $\{z \leftarrow a, y \leftarrow w\}$,
   resolviertes Atom: $P(a,w)$
5. $\{P(g(w),w), P(v,v), P(a,w)\}$ binärer Resovent von C_2', C_3' mit MGU $\{z \leftarrow w, y \leftarrow w\}$,
   resolviertes Atom: $P(w,w)$

Außerdem lässt sich aber aber auch noch $C_2 = \{\neg P(x,y), P(g(x),y)\}$ mit seiner eigenen Variante $C_2'' = \{\neg P(u,v), P(g(u),v)\}$ resolvieren:

6. $\{P(g(g(u)),v), \neg P(u,v)\}$ binärer Resovent von C_2, C_2'' mit MGU $\{x \leftarrow g(u), y \leftarrow v\}$
   resolviertes Atom: $P(g(u),v)$

Alle anderen binären Resolventen sind nur Varianten dieser 6 Klauseln.

c) Alle 6 binären Resolventen sind auch Robinson-Resolventen. Darüber hinaus lassen sich noch folgende weitere Robinson-Resolventen bilden. (In C_2 ist $\{\neg P(z,y)\}$ die einzige für die Resolution relevante Teilmenge. Aber in der jeweils anderen Elternklause kann man auch mehr als nur ein Literal zur Robinson-Resolution heranziehen.)

7. $\{P(g(f(a)),a)\}$ Robinson-Resolvent von C_1, C_2' MGU: $\{x \leftarrow f(a), u \leftarrow a, z \leftarrow f(a), y \leftarrow a\}$,
   resolviertes Atom: $P(f(a),a)$ (beide Literale von C_1 wurden unifiziert)
8. $\{P(g(a),a)\}$ Robinson-Resolvent von C_2', C_3' MGU: $\{z \leftarrow a, y \leftarrow a, v \leftarrow a, w \leftarrow a\}$,
   resolviertes Atom: $P(a,a)$ (alle drei Literale von C_3' wurden unifiziert)
9. $\{P(g(a),a), P(a,a)\}$ Robinson-Resolvent von C_2', C_3' MGU: $\{z \leftarrow a, y \leftarrow a, v \leftarrow a, w \leftarrow a\}$,
   resolviertes Atom: $P(a,a)$ (unifizierte Teilmenge von $C_3' : \{P(v,v), P(a,w)\}$)
10. $\{P(g(a),a), P(v,v)\}$ Robinson-Resolvent von C_2', C_3' MGU: $\{z \leftarrow a, y \leftarrow a, w \leftarrow a\}$,
    resolviertes Atom: $P(a,a)$ (unifizierte Teilmenge von $C_3' : \{P(a,w), P(w,w)\}$)
11. $\{P(g(v),v), P(a,v)\}$ Robinson-Resolvent von C_2', C_3' MGU: $\{z \leftarrow v, y \leftarrow v, w \leftarrow v\}$,
    resolviertes Atom: $P(v,v)$ (unifizierte Teilmenge von $C_3' : \{P(v,v), P(w,w)\}$)

Aufgabe 10.4 Finden Sie eine Resolutionswiderlegung von

$$\Pi = \big\{\{\neg R(x,c,c)\},\ \{R(x,y,z), \neg R(f(z),x,y)\},\ \{R(f(c),f(c),f(x))\}\big\}.$$

Geben Sie dabei die verwendeten MGUs, die resolvierten Atome und die Elternklauseln der Resolventen an.

Lösung Resolutionswiderlegung von Π:

1. $\{\neg R(u,c,c)\} \in' \Pi$
2. $\{R(x,y,z), \neg R(f(z),x,y)\} \in' \Pi$
3. $\{\neg R(f(c),u,c)\}$ Robinson-Resolvent von $1,2$; MGU $= \{x \leftarrow u, y \leftarrow c, z \leftarrow c\}$
   resolviertes Atom: $R(u,c,c)$
4. $\{\neg R(f(c),f(c),u)\}$ Robinson-Resolvent von $2,3$; MGU $= \{x \leftarrow f(c), y \leftarrow u, z \leftarrow c\}$
   resolviertes Atom: $R(f(c),u,c)$
5. $\{\neg R(f(u),f(c),f(c))\}$ Robinson-Resolvent von $2,4$; MGU $= \{x \leftarrow f(c), y \leftarrow f(c), z \leftarrow u\}$
   resolviertes Atom: $R(f(c),f(c),u)$
6. $\{R(f(c),f(c),f(x))\} \in' \Pi$
7. $\{\}$ Robinson-Resolvent von $5,6$; MGU $= \{u \leftarrow c, x \leftarrow c\}$
   resolviertes Atom: $R(f(c),f(c),f(c))$

Aufgabe 10.5 Verwenden Sie die Resolutionsmethode um folgenden Satz zu beweisen: Jede reflexive, euklidische Relation ist symmetrisch. Genauer: Zeigen Sie durch Transformation in Klauselnormalform und anschließende Anwendungen der Resolutionsregel, dass $\mathit{refl}, \mathit{eukl} \models \mathit{sym}$ gilt, wobei:

$$\begin{aligned}
\mathit{refl} &= (\forall x)R(x,x),\\
\mathit{eukl} &= (\forall x)(\forall y)(\forall z)[(R(x,y) \wedge R(x,z)) \supset R(y,z)],\\
\mathit{sym} &= (\forall x)(\forall y)[R(x,y) \supset R(y,x)].
\end{aligned}$$

Lösung Wir müssen die Konsequenzbehauptung zunächst in eine Klauselmenge transformieren, die unerfüllbar ist, genau dann wenn die Behauptung gilt. Dazu können wir die Formeln *refl* und *eukl*, sowie $\neg \mathit{sym}$ getrennt übersetzen um eine entsprechende Klauselmenge $\Pi = cl(\mathit{refl}) \cup cl(\mathit{eukl}) \cup cl(\neg \mathit{sym})$ zu finden:

- $cl(\mathit{refl}) = \{\{R(x,x)\}\}$;
- $cl(\mathit{eukl}) = cl((\forall x)(\forall y)(\forall z)[\neg(R(x,y) \wedge R(x,z)) \vee R(y,z)])$
  $= cl((\forall x)(\forall y)(\forall z)[(\neg R(x,y) \vee \neg R(x,z)) \vee R(y,z)]) = \{\{\neg R(x,y), \neg R(x,z), R(y,z)\}\}$;
- $cl(\neg \mathit{sym}) = cl(\neg(\forall x)(\forall y)[\neg R(x,y) \vee R(y,x)] = cl((\exists x)\neg(\forall y)[\neg R(x,y) \vee R(y,x)]$
  $= cl((\exists x)(\exists y)\neg[\neg R(x,y) \vee R(y,x)] = cl((\exists x)(\exists y)[\neg\neg R(x,y) \wedge \neg R(y,x)]$
  $= cl((\exists x)(\exists y)[R(x,y) \wedge \neg R(y,x)] = cl((\exists y)[R(a,y) \wedge \neg R(y,a)]$
  $= cl(R(a,b) \wedge \neg R(b,a)) = \{\{R(a,b)\}, \{\neg R(b,a)\}\}$.

Wir erhalten also insgesamt die Klauselmenge:

$$\Pi = \big\{\{R(x,x)\},\ \{\neg R(x,y), \neg R(x,z), R(y,z)\},\ \{R(a,b)\},\ \{\neg R(b,a)\}\big\}$$

Resolutionswiderlegung von Π: (Alle verwendeten Robinson-Resloventen sind auch binäre Resolventen.)

1. $\{\neg R(x,y), \neg R(x,z), R(y,z)\} \in' \Pi$
2. $\{R(a,b)\} \in' \Pi$
3. $\{\neg R(a,z), R(b,z)\}$ Robinson-Resolvent von $1,2$; MGU $= \{x \leftarrow a, y \leftarrow b\}$
4. $\{R(x,x)\} \in' \Pi$
5. $\{R(b,a)\}$ Robinson-Resolvent von $3,4$; MGU $= \{x \leftarrow a, z \leftarrow a\}$
6. $\{\neg R(b,a)\} \in' \Pi$
7. $\{\}$ Robinson-Resolvent von $4,5$; MGU $= \{\}$

Damit ist (indirekt) nachgewiesen, dass *sym* logisch aus *refl* und *eukl* folgt.