Maria Manuelian

# Differenzengleichungen:

$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$

$\Delta y_t$ nennt man die „erste Differenz" von $y_t$ an der Stelle t

$\Delta^k y_t$ nennt man k-te Differenz oder Differenz der Ordnung k

**Eleminieren der Δ Symbole:** $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$

$\Delta^2 y_t = \Delta(y_{t+1} - y_t) = (y_{t+2} - y_{t+1}) - (y_{t+1} - y_t) = y_{t+2} - y_{t+1} - y_{t+1} + y_t = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t$

## Differenzengleichungen erster Ordnung:

**Lösung per Iteration:** Startwert $y_0$ --> weitere Glieder berechnen --> Bildungsgesetz „erraten"

### DIE HOMOGENE LINEARE DIFFERENZENGLEICHUNG 1. ORDNUNG:

**allgemeine Form:** $y_{t+1} + ay_t = 0$

==> $y_t = A\beta^t$ ==> $\beta = -a$

$y_t = A(-a)^t$ —> Startwert $y_0$ legt A fest (einfach t = 0 setzen)

Die Folge ist:

-) oszillierend für $a > 0$

-) konvergent für $|a| < 1$

### DIE INHOMOGENE LINEARE DIFFERENZENGLEICHUNG 1. ORDNUNG:

**allgemeine Form:** $y_{t+1} + ay_t = s$

Allgemeine Lösung einer inhomogenen Differenzengleichung = allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Differenzengleichung + spezielle Lösung der inhomogenen Differenzengleichung

==> $y_t = y_t^{(h)} + y_t^{(s)}$

spezielle Lösung: $y_t^{(s)} = c$

$$\boxed{c = \frac{s}{a+1}}$$

(Voraussetzung: $a \neq -1$)

<u>für a = -1:</u>

$c = s$ —> $y_t^{(s)} = st$

**gesamte Lösung:**

$y_t = A(-a)^t + s/(a+1)$ —> $a \neq -1$

oder:

$y_t = A(-a)^t + st$ —> $a = -1$

$$\boxed{y_t = A(-a)^t + \frac{s}{a+1}}$$

## Differenzengleichungen zweiter Ordnung:

### Die homogene lineare Differenzengleichung 2. ORDNUNG

**allgemeine Form:** $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = 0$

$y_t = A\beta^t$

$A\beta^{t+2} + a_1 A\beta^{t+1} + a_2 A\beta^t = 0$ ==> $\beta^2 + a_1\beta + a_2 = 0$

==> $\beta_{1,2} = -(a_1/2) \pm \sqrt{a_1^2/4 - a_2}$

$$\boxed{\beta_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}}$$

Je nachdem ob der Ausdruck unter der Wurzel positiv, 0 oder negativ ist, erhält man 2 reelle, 1 reelle, oder 2 komplexe Lösungen:

Maria Manuelian

FALL 1: $a_1^2/4 - a_2 > 0 \longrightarrow$ 2 reelle Lösungen $\longrightarrow \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ $(\beta_1 \neq \beta_2)$

**gesamte Lösung:** $y_t = A_1\beta_1^t + A_2\beta_2^t$

$$\boxed{y_t = A_1\beta_1^t + A_2\beta_2^t}$$

$\longrightarrow$ 2 Parameter $A_1$ und $A_2$ $\longrightarrow$ man braucht 2 Startwerte, um zu einer Lösung zu kommen

FALL 2: $a_1^2/4 - a_2 = 0 \longrightarrow$ 1 reelle Lösung $\longrightarrow \beta_1 = \beta_2 = \beta; \beta \in \mathbb{R}$

**gesamte Lösung:** $y_t = A_1\beta^t + A_2\beta^t$

FALL 3: $a_1^2/4 - a_2 < 0 \longrightarrow$ 2 komplexe Lösungen $\longrightarrow \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$

$\beta_{1,2} = -(a_1/2) \pm \sqrt{a_1^2/4 - a_2} = a \pm ib$

$\beta_1 = a + ib; \beta_2 = a - ib$

**Übergang zu Polarkoordinaten:**

$\beta_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$

$\beta_1 = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = re^{-i\varphi}$

$r = |\beta_1| \ (=|\beta_2|) = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a_2}$

$\sin\varphi = b/r = \sqrt{1 - (a_1^2/4a_2)}$

$\cos\varphi = a/r = -a_1/(2\sqrt{a_2})$

**allgemeine Lösung:**

$y_t = r^t(A_1\cos(\varphi t) + A_2 \sin(\varphi t))$

$$\boxed{y_t = r^t(A_1\cos(\varphi t) + A_2 \sin(\varphi t))}$$

## Die inhomogene lineare Differenzengleichung 2. ORDNUNG

**allgemeine Form:** $y_{t+2} + a_1y_{t+1} + a_2y_t = s$

$y_t = y_t^{(h)} + y_t^{(s)}$

spezielle Lösung: $y_t^{(s)} = c$ (= const.)

$c = s/(1 + a_1 + a_2)$

$$\boxed{c = \frac{s}{1 + a_1 + a_2}}$$

$1 + a_1 + a_2 = 0$:

$y_t^{(s)} = ct$

$c = s/(a_1 + 2)$

$$\boxed{c = \frac{s}{a_1 + 2}}$$

$a_2 = -2$:

$y_t^{(s)} = ct^2$

$c = s/2$

$$\boxed{c = \frac{s}{2}}$$

**VIEL GLÜCK !!!**