Maria Manuelian

Prüfungs-Know-How für Mathematik 2 für Informatiker:

Methode des steilsten Abstiegs (steepest descent) oder Gradientenverfahren:

Geg.: Funktion, deren Minimum bestimmt werden soll: $f(x, y) = \dots$ (irgendein Ausdruck)

1) Startpunkt bestimmen: $x_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$ —> meistens angegeben (oder mit 0 auffüllen)

2) 1. Ableitung (Gradient) von f bestimmen und transformieren:

$(\nabla f(x))^t$ berechnen

3) Richtung aus dem Gradienten bestimmen:

$d_1 = -(\nabla f(x_1))^t$ —> Startpunkt: in den Gradienten mit negativem Vorzeichen einsetzen

4) φ-Funktion bilden:

$\varphi(\lambda) = f(x_1 + \lambda \bullet d_1)$

5) φ-Funktion nach λ ableiten:

$\varphi'(\lambda) = \dots$ (irgendein Ausdruck)

6) λ^* aus obigem Ausdruck berechnen

$\lambda^* = \dots$ (irgendein Ausdruck)

7) nächsten Punkt berechnen

$x_2 = x_1 + \lambda^* d_1$ allgemein: $x_{k+1} = x_k + \lambda^* d_k$

Mehrdimensionaler Taylor

$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) + ½ (x - x_0)^t \nabla^2 f(x_0)(x - x_0) + \text{Rest}$

x_0 … Punkt, um den man das Taylorpolynom entwickeln soll

$\nabla f(x_0)$ … Punkt in den Gradienten einsetzen (1. Ableitung)

$(x - x_0)$ … $\begin{pmatrix} x - p_1 \\ y - p_2 \end{pmatrix}$

$(x - x_0)^t$ ... $(x-p_1, y-p_2)$

$\nabla^2 f(x_0)$ … 2. Ableitung = Hessematrix = $\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$ $f''_{xy} = f''_{yx}$ (Diagonale)

Rest … zu ignorieren

Tangentialabbildung:

$g(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)$

Lagrange-Funktion - Optimierung mit Nebenbedingungen:

Wird bei der mehrdimensionalen Optimierung verwendet:

f_1 = erste Funktion

f_2 = zweite Funktion

Angabe: Bestimmen Sie das Minimum/Maximum der Funktion f_1 unter der Nebenbedingung $f_2 = 0$:

$L(x, y, \lambda) = f_1 - \lambda^*(f_2)$

Weiterer Weg: nach allen Variablen und λ ableiten —> jede der daraus resultierenden Gleichungen 0 setzen

Alle Lösungen für x und y herausfinden! (Achtung: bei der Division durch Variablen gehen Lösungen verloren! Herausheben!!!)

Überprüfung: Wenn man den Gradienten der Funktion noch einmal nach x und y ableitet, erhält man die Hesse-Matrix (2. Ableitung) der Funktion f_1. In diese setzt man die Kandidaten für lokale Extrema ein und überprüft, ob die Matrix dann positiv definit (—> Minimum), negativ definit (—> Maximum) oder indefinit (Kandidat für Sattelpunkt) ist.

Definitheit einer Matrix:

Im 2-dimensionalen Raum (Ebene) überprüft man, ob ein punkt ein Minimum oder ein Maximum ist, indem man in die 2. Ableitung einsetzt:

$f'' > 0$ … Minimum

$f'' < 0$ … Maximum

$f'' = 0$ … Kandidat für Wendepunkt —> Überprüfung durch Einsetzen in die 3. Ableitung

Im mehrdimensionalen Raum funktioniert das im Grunde genommen nicht anders: Da hier die 2. Ableitung eine Matrix ist, muss man ein anderes Kriterium finden, das „größer 0“ oder „kleiner 0“ entspricht: **Die Definitheit einer Matrix**

Zustände: positiv definit - positiv semidefinit - indefinit - negativ semidefinit - negativ definit

Es gibt 2 Möglichkeiten die Definitheit festzustellen:

1) Eigenwerte der Matrix berechnen:

positiv definit	falls alle Eigenwerte größer als Null sind;
positiv semidefinit	falls alle Eigenwerte größer oder gleich Null sind;
negativ definit	falls alle Eigenwerte kleiner als Null sind;
negativ semidefinit	falls alle Eigenwerte kleiner oder gleich Null sind und
indefinit	falls positive und negative Eigenwerte existieren

2) Hauptminoren der Matrix berechnen:

Hauptminoren = Determinanten der quadratischen Untermatrizen

positiv definit	falls alle Hauptminoren größer als Null sind;
negativ definit	falls die Hauptminoren alternierend negativ und positiv sind
Indefint	falls die Matrix weder positiv noch negativ definit ist

Für Semidefinitheit gibt es kein Hauptminorenkriterium

Stationäre Punkte: Maximum —> negativ definite Hesse-Matrix, Minimum —> positiv definite Hesse-Matrix, Kandidat für Sattelpunkt —> indefinite Hesse-Matrix

Kontraktion (Numerik):

$\|T(x)-T(y)\| \leq q\|x-y\|$

Nullstellenproblem - Fixpunktproblem

Nullstellenproblem: Schnittpunkt der Funktion mit der x-Achse

$F(x) = x$ (Fixpunktproblem) —> $G(x) = F(x) - x = 0$ (Nullstellenproblem)

Fixpunktproblem: Schnittpunkt der Funktion mit der 1. Mediane ($y=x$)

$G(x) = 0$ (Nullstellenproblem) —> $F(x) = G(x) + x = x$ (Fixpunktproblem)

Maria Manuelian

Differentialgleichungen:

I) Einfache Differentialgleichungen:

Integrieren:

Anmerkungen: $y'(x) = dy/dx$

$y'(x) = a(x)$

$dy/dx = a(x) \longrightarrow dy = a(x)\,dx \longrightarrow y(x) = \int a(x)\,dx$

$\Longrightarrow y(x) = \int a(x)\,dx + c \qquad c \in \mathbb{R}$

Bsp.: $y'(x) = 3x^2 \longrightarrow y(x) = \int 3x^2\,dx = x^3 + c$

Anfangswertbedingungen:

Bsp.: $y(0) = 4$

$y(0) = 0^3 + c = 4 \longrightarrow c = 4 \longrightarrow y(x) = x^3 + 4$

Trennung der Variablen:

Form: $y'(x) = a(x)f(y) \longrightarrow$ umformen — $y'(x) = dy/dx$

$dy/dx = a(x)f(y) \longrightarrow dy/f(y) = a(x)\,dx \longrightarrow$

$\int 1/y\,dy = \int a(x)\,dx + c$

Bsp.: $y'(x) + xy^2(x) = 0$ — $y'(x) = dy/dx$

$dy/dx = -xy^2(x) \longrightarrow -(1/y^2)\,dy = x\,dx \longrightarrow$

$-\int 1/y^2\,dy = \int x\,dx$ — $\int 1/y^2 = \int y^{-2} = y^{-1}/(-1) = -1/y$

$1/y = x^2/2 + c_1 = (x^2+c)/2$

$y(x) = 2/(x^2 + c)$

II) Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung:

Form: $y'(x) + a(x)y(x) = s(x)$ — $a(x), s(x) \longrightarrow$ integrierbar

$s(x) = 0 \longrightarrow$ homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Lösungsverfahren:

$y = y_h + y_p$

i) y_h ... Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

ii) y_p ... partikuläre (spezielle) Lösung

$y'(x) + a(x)y(x) = 0$

i) Trennung der Variablen - Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

$dy/dx = -a(x)y(x) \longrightarrow 1/y\,dy = -a(x)\,dx \longrightarrow \int 1/y\,dy = -\int a(x)\,dx$

log ... Logarithmus naturalis (ln am Taschenrechner [e^x])

$\Longrightarrow \log(y) = -\int a(x)\,dx + \log(C)$

C kann irgendeine Konstante sein, also auch der Logarithmus von einer beliebigen Konstanten $\longrightarrow$ Rechenregeln für Logarithmen

$\Longrightarrow y(x) = e^{-\int a(x)\,dx} \bullet C$

Bsp.: $y' + 3x^2y = 0$

$dy/dx = -3x^2y$

$1/y\,dy = -3x^2\,dx \longrightarrow \int 1/y\,dy = -\int 3x^2\,dx \longrightarrow \log(y) = -x^3 + \log(C)$

$y(x) = C \bullet e^{-x^3}$

Anfangswert: z.B. $y(0) = 2$

$y(0) = C \bullet e^0$

$y(x) = 2e^{-x^3}$

ii) Die partikuläre Lösung

$y'(x) + a(x)y(x) = s(x)$

2 Fälle: 1) $s(x) = s;\ a(x) = a\ (\neq 0) \longrightarrow$ reelle Konstante

$y_p = s/a$

2) $s(x);\ a(x) \longrightarrow$ nicht konstant

Variation der Konstanten

Maria Manuelian

$C \longrightarrow C(x)$

$y_p(x) = C(x) \bullet e^{-\int a(x)\,dx}$

$y_p' + a(x) y_p = s(x)$

$\longrightarrow \ldots \longrightarrow C(x) = \int s(x) \bullet e^{\int a(x)\,dx}\,dx$ Integral im Exponent zuerst auswerten

allgemeine Lösung: $y = y_h + y_p$

$y(x) = e^{-\int a(x)\,dx} \bullet \left(C + \int s(x) \bullet e^{\int a(x)\,dx}\,dx\right)$

Bsp.: $y'(x) + (y/x) = x^2 + 4$

homog. Lsg: y_h: $y'(x) + (y/x) = 0$

$dy/dx = -y/x$

$1/y\,dy = -1/x\,dx$

$\int 1/y\,dy = -\int 1/x\,dx$

$\log(y_h) = -\log(x) + \log(C)$

$y_h(x) = C/x$

partik. Lsg: y_p: $x^2 + 4 \longrightarrow$ nicht konstant $\longrightarrow$ Variation der Konstanten

$y_p = C(x)/x \longrightarrow y_p' = (C'(x)x - C(x))/x^2$ Quotientenregel

einsetzen: $a = 1/x$; $s = x^2 + 4$

$y_p' + a(x) y_p = s(x)$

$(C'(x)x - C(x))/x^2 + 1/x \bullet C(x)/x = x^2 + 4$

$C'(x)x - C(x) + C(x) = (x^2 + 4)x^2$

$C'(x)x = (x^2 + 4)x^2$

$C'(x) = x^3 + 4x$

$C(x) = \int C'(x) = \int x^3 + 4x\,dx = x^4/4 + 2x^2$

$y_p = C(x)/x = (x^4/4 + 2x^2)/x = x^3/4 + 2x$

$y = y_h + y_p$

$y(x) = C/x + x^3/4 + 2x$

Anfangswert: $y(1) = 1 \longrightarrow$ angegeben

$y(1) = c/1 + 1/4 + 2 = 1 \longrightarrow c = -5/4$

$\Longrightarrow y(x) = -5x/4 + x^3/4 + 2x$

III) Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

Form: $y''(x) + a_1(x) y'(x) + a_2(x) y(x) = s(x)$

$s(x) = 0 \longrightarrow$ homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$y = y_h + y_p$

$s(x); a_1(x); a_2(x) \longrightarrow$ konstant ($s, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$) $\longrightarrow y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = s$

$s = 0 \longrightarrow$ homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

i) Homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

Ansatz: $y(x) = Ce^{\lambda x} \longrightarrow y'(x) = \lambda C e^{\lambda x} \longrightarrow y''(x) = \lambda^2 C e^{\lambda x}$

$Ce^{\lambda x}(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0$

$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = 0$

$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$

Lsg. der charakteristischen Gleichung:

$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$

$\lambda_{1,2} = -a_1/2 \pm \sqrt{a_1^2/4 - a_2}$ (kleine Lösungsformel)

Je nach Wert der Diskriminante (Wert unter der Wurzel) unterscheidet man 3 Fälle:

1) $a_1^2/4 - a_2 > 0$

2) $a_1^2/4 - a_2 = 0$

3) $a_1^2/4 - a_2 < 0$

Maria Manuelian

Fall 1: 2 reelle Lösungen ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)

$y_1(x) = C_1 e^{\lambda_1 x}$; $y_2(x) = C_2 e^{\lambda_2 x}$

allg. Lsg.: $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

Fall 2: Doppellösung ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$)

$y_1(x) = C_1 e^{\lambda x}$; $y_2(x) = x C_2 e^{\lambda x}$

allg. Lsg.: $y(x) = C_1 e^{\lambda x} + x C_2 e^{\lambda x} = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}$

Fall 3: 2 komplexe Lösungen ($\lambda_{1,2} = -a_1/2 \pm i \bullet \sqrt{a_1^2/4 - a_2}$) —> $a \pm bi$

$y_1(x) = C'_1 e^{(a+ib)x} = C'_1 e^{ax} e^{ibx}$; $y_2(x) = C'_2 e^{(a-ib)x} = C'_2 e^{ax} e^{-ibx}$;

allg. Lsg.: $y(x) = C'_1 e^{ax} e^{ibx} + C'_2 e^{ax} e^{-ibx} = e^{ax}(C'_1 e^{ibx} + C'_2 e^{-ibx})$

Eulersche Formel ($e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$):

...

$y(x) = e^{ax}(C_1 \cos(bx) + C_2 \cos(bx))$

—> $a < 0$ (gedämpft); $a > 0$ (aufschaukelnd); $a = 0$ (konstant)

Bsp: $y''(x) + y'(x) + y(x) = 0$

$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ —> $\lambda_{1,2} = (-1/2) \pm i \bullet (\sqrt{3}/2)$

Lsg: $y(x) = e^{-1/2}(C_1 \cos((\sqrt{3}/2)x) + C_2 \sin((\sqrt{3}/2)x))$

ii) Inomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

Basis: $y = y_h + y_p$

partikuläre Lösung: $y_p(x) = s/a_2$ falls $a_2 \neq 0$

$y_p(x) = x \bullet s/a_1$ falls $a_2 = 0, a_1 \neq 0$

Bsp: $y''(x) - y(x) = 3$

homog. Lsg.: $\lambda^2 - 1 = 0$ —> $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ —> $y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

part. Lsg.: $y_p(x) = s/a_2 = 3/(-1) = -3$

$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 3$

Anfangswerte.: $y(0) = 3$; $y'(0) = 4$

$y(0) = 3$ —> $C_1 + C_2 - 3 = 3$

$y'(0) = 4 = C_1 - C_2$

$C_1 = 5$; $C_2 = 1$

$y(x) = 5e^x + e^{-x} - 3$