

Aufgaben Theoretische Informatik II

Aufgabe 1 Geben Sie für folgende Formel eine konjunktive und eine disjunktive Normalform an.

(a) $p \wedge q \rightarrow (r \leftrightarrow (p \vee q))$

(b) $p \vee ((q \rightarrow r \vee r \rightarrow s) \wedge \neg p \rightarrow s)$

(c) $p \vee \neg r \wedge (\neg p \vee s \leftrightarrow r)$

Bitte beachten: $\neg$ bindet stärker als $\wedge$, $\wedge$ bindet stärker als $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Antwort für a.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \vee q$	$r \leftrightarrow (p \vee q)$	$p \wedge q \rightarrow (r \leftrightarrow (p \vee q))$
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Disjunktive Normalform: $\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \vee \neg p \wedge \neg q \wedge r \vee \neg p \wedge q \wedge \neg r \vee \neg p \wedge q \wedge r \vee p \wedge \neg q \wedge \neg r \vee p \wedge \neg q \wedge r \vee p \wedge q \wedge r$

Konjunktive Normalform: $\neg p \vee \neg q \vee r$.

Kommentar: Die kürzeste disjunktive Normalform ist auch $\neg p \vee \neg q \vee r$.

Aufgabe 2 Beweisen oder widerlegen Sie dass folgende Formeln erfüllbar sind.

(a) $(B \rightarrow E) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (1 \rightarrow A) \wedge (1 \rightarrow B) \wedge (E \wedge A \rightarrow C) \wedge (E \wedge A \wedge C \rightarrow F) \wedge (F \rightarrow G) \wedge (A \wedge G \rightarrow H) \wedge (I \rightarrow 0) \wedge (H \wedge C \rightarrow I)$.

- (b) $(E \rightarrow 0) \wedge (1 \rightarrow G) \wedge (H \rightarrow I) \wedge (I \rightarrow J) \wedge (H \wedge I \rightarrow J) \wedge (G \rightarrow H) \wedge (H \wedge G \rightarrow A)$.
- (c) $(B \rightarrow E) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (1 \rightarrow B) \wedge (E \wedge A \rightarrow C) \wedge (E \wedge A \wedge C \rightarrow F) \wedge (F \rightarrow G) \wedge (A \wedge G \rightarrow H) \wedge (I \rightarrow 0) \wedge (H \wedge C \rightarrow I)$.

Antwort:

- (a) unerfüllbar
 (b) erfüllbar
 (c) erfüllbar

Aufgabe 3 Wieviele Belegungen gibt es, die Aufgabe 2b erfüllen?

Antwort: Eine.

Aufgabe 4 Welches Konjunkt kann bei Aufgabe 2a weggelassen werden ohne an der Unerfüllbarkeit etwas zu ändern?

Antwort: $(C \rightarrow D)$, da D auf keiner linken Seite vorkommt.

Aufgabe 5 Welche der folgenden Klauselmengen entsprechen Hornformeln?

- (a) $\{\{p, \neg q, \neg r\}, \{\neg p, \neg q, r\}, \{p\}, \{\neg q\}\}$.
- (b) $\{\{p, q, \neg r\}, \{\neg p, p\}, \{q\}\}$.
- (c) $\{\{\neg p, \neg q\}, \{\neg q, \neg r\}, \{\neg p, \neg r\}\}$.

Antwort: a und c.

Aufgabe 6 Widerlegen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahren oder geben Sie eine Belegung der Variablen an, die die Klauselmengen wahr macht.

- (a) $\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, s\}, \{\neg p, \neg s\}\}$.
- (b) $\{\{p, q\}, \{\neg p, r\}, \{\neg r, s\}, \{\neg s\}\}$.
- (c) $\{\{p, q, r\}, \{\neg p, q\}, \{\neg r, q\}, \{\neg q\}\}$.

Antwort a.

- 1 : $\{p, q\}$
- 2 : $\{p, \neg q\}$
- 3 : $\{p\}$ (1, 2)
- 4 : $\{\neg p, s\}$
- 5 : $\{s\}$ (3, 4)
- 6 : $\{\neg p, \neg s\}$
- 7 : $\{\neg s\}$ (3, 6)
- 8 : $\emptyset$ (5, 7)

Antwort b. Erfüllbar. $I(p) = 0, I(q) = 1, I(r) = 0, I(s) = 0$.

Antwort c.

- 1 : $\{\neg q\}$
- 2 : $\{\neg r, q\}$
- 3 : $\{\neg r\}$ (1, 2)
- 4 : $\{\neg p, q\}$
- 5 : $\{\neg p\}$ (1, 4)
- 6 : $\{p, q, r\}$
- 7 : $\{p, r\}$ (1, 6)
- 8 : $\{p\}$ (3, 7)
- 9 : $\emptyset$ (5, 8)

Aufgabe 7 Welche der folgenden widerlegbaren Klauselmengen ist mit Unit-Resolution widerlegbar? (Unit-Resolution bedeutet dass immer eine der Resolventen einelementig ist.)

- (a) $\{\{p, q, r\}, \{p, \neg q, r\}, \{\neg p, q, r\}, \{\neg p, \neg q, r\}, \{\neg r\}\}$.
- (b) $\{\{p\}, \{q\}, \{\neg p, \neg q, s\}, \{\neg p, \neg s\}\}$.

Antwort: b.

Aufgabe 8 Sei $x^0 = \neg x$ und $x^1 = x$. Zeigen Sie

$$\{\{p_1^{i_1} \dots p_n^{i_n}\} : \langle i_1 \dots i_n \rangle \in \{0, 1\}^n\}$$

ist widerlegbar.

Beweis: Durch Induktion nach n .

$$n = 1. \quad \{\{p^i\} : \langle i \rangle \in \{0, 1\}^1\} = \{\{p\}, \{\neg p\}\}.$$

$$n > 1.$$

$$\begin{aligned} & \{\{p_1^{i_1} \dots p_n^{i_n}\} : \langle i_1 \dots i_n \rangle \in \{0, 1\}^n\} = \\ & \{\{p_1^{i_1} \dots p_{n-1}^{i_{n-1}}\} \cup \{p_n\}, \{p_1^{i_1} \dots p_{n-1}^{i_{n-1}}\} \cup \{\neg p_n\} : \langle i_1 \dots i_{n-1} \rangle \in \{0, 1\}^{n-1}\} \end{aligned}$$

ist widerlegbar wenn

$$\{\{p_1^{i_1} \dots p_{n-1}^{i_{n-1}}\} : \langle i_1 \dots i_{n-1} \rangle \in \{0, 1\}^{n-1}\}$$

widerlegbar ist.

Aufgabe 9 Sei $C \subsetneq \{\{p_1^{i_1} \dots p_n^{i_n}\} : \langle i_1 \dots i_n \rangle \in \{0, 1\}^n\}$. Beweisen Sie C ist erfüllbar.

Beweis: Erweitere C zu

$$C^* = \{\{p_1^{i_1} \dots p_n^{i_n}\} : \langle i_1 \dots i_n \rangle \in \{0, 1\}^n\} - \{\{p_1^{v_1} \dots p_n^{v_n}\}\}$$

für gewisse $v_1 \dots v_n \in \{0, 1\}^n$. C^* ist erfüllbar (und damit auch C) da jede Klausel aus C^* mindestens ein $p_i^{1-v_i}$ enthält. Setze $I(p_i) = 1 - v_i$.

Aufgabe 10 Sei $\mathcal{C}$ eine Klauselmeng, $C \in \mathcal{C}$, und V die Menge der Variablen in C . Sei

$$\text{COMP}(C, \mathcal{C}) = \{C' : C \subseteq C' \wedge C' \text{ enthält jede Variable in } V \text{ genau einmal}\},$$

$$\text{COMP}(\mathcal{C}) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \text{COMP}(C, \mathcal{C}).$$

Zeigen Sie $\mathcal{C}$ ist mit Aussagenlogische Resolution widerlegbar dann und nur dann wenn $\text{COMP}(\mathcal{C})$ mit Aussagenlogische Resolution widerlegbar ist.

Beweis: $\mathcal{C}$ widerlegbar $\implies \text{COMP}(\mathcal{C})$ widerlegbar da $\text{COMP}(C, \mathcal{C})$ die Klausel C herleitet.

$\text{COMP}(\mathcal{C})$ widerlegbar $\implies \mathcal{C}$ widerlegbar da es für jede Klausel $D \in \text{COMP}(\mathcal{C})$ eine Klausel $D' \in \mathcal{C}$ gibt sodass $D' \subseteq D$. Kürze die Resolutionswiderlegung von $\text{COMP}(\mathcal{C})$ dementsprechend.

Aufgabe 11 (Vollständigkeit der Aussagenlogische Resolution) Sei $\mathcal{C}$ eine Klauselmeng. Zeige

$$\mathcal{C} \text{ mit Resolution widerlegbar} \iff \mathcal{C} \text{ unerfüllbar.}$$

Beweis: $\mathcal{C}$ mit Resolution widerlegbar $\iff \text{COMP}(\mathcal{C})$ mit Resolution widerlegbar $\iff \text{COMP}(\mathcal{C}) = \{\{p_1^{i_1} \dots p_n^{i_n}\} : \langle i_1 \dots i_n \rangle \in \{0, 1\}^n\}$.

Aufgabe 12 Seien folgende prädikatlogische Formeln gegeben:

- (1) $(\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow (\forall x B(x) \vee \exists x C(x))) \rightarrow \exists x C(x)$
- (2) $\forall x \exists y \forall z (P(x, y) \vee Q(y, z)) \vee \neg \forall z (P(z, z) \vee Q(z, z))$
- (3) $\forall x \left(P(x) \rightarrow \exists y (Q(y) \rightarrow \forall z (R(z) \rightarrow \exists u (W(u) \rightarrow \forall v S(v)))) \right)$

Geben Sie jeweils:

- (i) eine Pränex-Normalform an
- (ii) eine Skolem-Normalform an
- (iii) eine Klausel-Normalform an

Ad (1)

- (i) $\forall x \exists y \exists x' \forall x'' \exists x''' (P(x, y) \wedge \neg B(x') \wedge \neg C(x'') \vee C(x'''))$.
- (ii) $\forall x P(x, f(x)) \wedge \neg B(c) \wedge \forall x' \neg C(x') \vee C(d)$.
- (iii) $\{P(x, f(x)), C(d)\}, \{\neg B(c), C(d)\}, \{\neg C(x'), C(d)\}$.

Ad (2)

- (i) $\forall x \exists y \forall z \exists z' (P(x, y) \vee Q(y, z) \vee \neg P(z', z') \wedge \neg Q(z', z'))$.
- (ii) $\forall x \forall z (P(x, f(x)) \vee Q(f(x), z)) \vee \neg P(c, c) \wedge \neg Q(c, c)$.
- (iii) $\{P(x, f(x)), Q(f(x), z), \neg P(c, c)\}, \{P(x, f(x)), Q(f(x), z), \neg Q(c, c)\}$.

Ad (3)

- (i) $\forall x \exists y \forall z \exists u \forall v (\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg R(z) \vee \neg W(u) \vee S(v))$.
- (ii) $\forall x (\neg P(x) \vee \neg Q(f(x)) \vee \forall z (\neg R(z) \vee \neg W(g(x, z)) \vee \forall v S(v)))$.
- (iii) $\{\neg P(x), \neg Q(f(x)), \neg R(z), \neg W(g(x, z)), S(v)\}$.

Aufgabe 13 Sei $A = \forall x \exists y (P(x) \rightarrow \neg P(y)) \rightarrow \forall x P(x) \vee \forall x \neg P(x)$.

(a) Geben Sie ein Modell für A an.

(b) Geben Sie ein Gegenbeispiel für A an (d.h. ein Modell für $\neg A$).

Antwort: Da A nur das einstellige Prädikat P enthält genügt es zweielementige Modelle zu betrachten. A übersetzt sich zu $A^* = \left((P(a) \rightarrow \neg P(a)) \vee (P(a) \rightarrow \neg P(b)) \right) \wedge \left((P(b) \rightarrow \neg P(a)) \vee (P(b) \rightarrow \neg P(b)) \right) \rightarrow P(a) \wedge P(b) \vee \neg P(a) \wedge \neg P(b)$.

$P(a)$	$P(b)$	A^*
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ein Modell für A wäre $\langle \{a, b\}, P \rangle$, $P = \emptyset$.

Ein Modell für $\neg A$ wäre $\langle \{a, b\}, P \rangle$, $P = \{\langle b \rangle\}$.

Aufgabe 14 Sei c eine Konstante. Gib von jede der folgende Mengen Terme an ob sie unifizierbar sind, und wenn ja gebe eine MGU.

$$A = \{f(g(x), y), g(f(x), y)\}$$

$$B = \{Q(x, y), Q(f(c), f(x, z)), Q(x, f(f(c), x))\}$$

$$C = \{g(P(x, u), Q(y)), g(P(f(y), c), Q(f(z))), g(P(x, u), Q(f(f(x))))\}$$

Antwort:

A ist nicht unifizierbar weil gleich am Anfang f und g schon verschieden sind.

Eine MGU für B ist $x \mapsto f(c)$, $y \mapsto f(f(c), f(c))$, $z \mapsto f(c)$.

C ist nicht unifizierbar weil $Q(f(f(f(f(z)))))$ nicht mit $Q(f(z))$ unifizierbar ist.

Aufgabe 15 Sei c eine Konstante. Geben Sie von jede der folgende Mengen Terme an ob sie unifizierbar sind, und wenn ja geben Sie eine MGU.

$$A = \{P(x, f(z), g(c, z)), P(c, g(z), g(f(x), c))\}$$

$$B = \{S(f(x), v), S(u, f(u)), S(f(c), f(f(c)))\}$$

$$C = \{R(x, f(z), z), R(f(y), f(z), z), R(f(y), y, f(x))\}$$

Antwort:

A ist nicht unifizierbar weil f und g verschieden sind.

Eine MGU für B ist $x \mapsto c, u \mapsto f(c), v \mapsto f(f(c))$.

C ist nicht unifizierbar weil am Ende $f(f(f(z)))$ nicht mit z unifizierbar ist.

Aufgabe 16 Beweisen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode

$$\exists x \forall y (P(x) \vee Q(y)) \rightarrow \forall y \exists x (P(x) \vee Q(y)).$$

Antwort:

Negation: $\exists x \forall y (P(x) \vee Q(y)) \wedge \exists y \forall x (\neg P(x) \wedge \neg Q(y))$.

Skolemform: $\forall y (P(c) \vee Q(y)) \wedge \forall x (\neg P(x) \wedge \neg Q(d))$.

Klauselform: $\{P(c), Q(y)\}, \{\neg P(x)\}, \{\neg Q(d)\}$.

- 1 : $\{P(c), Q(y)\}$
- 2 : $\{\neg Q(d)\}$
- 3 : $\{P(c)\}$ $Res(1, 2)$
- 4 : $\{\neg P(x)\}$
- 5 : $\emptyset$ $Res(3, 4)$

Aufgabe 17 Ist folgende Klauselmenge widerlegbar mittels Resolution?

$$\begin{aligned} &\{P(x), P(f(x)), P(f(f(x)))\}, \{P(x), P(f(x)), \neg P(f(f(x)))\} \\ &\{P(x), \neg P(f(x)), P(f(f(x)))\}, \{P(x), \neg P(f(x)), \neg P(f(f(x)))\} \\ &\{\neg P(x), P(f(x)), P(f(f(x)))\}, \{\neg P(x), P(f(x)), \neg P(f(f(x)))\} \\ &\{\neg P(x), \neg P(f(x)), P(f(f(x)))\}, \{\neg P(x), \neg P(f(x)), \neg P(f(f(x)))\} \end{aligned}$$

Antwort: Ja, setze P für $P(x)$, Q für $P(f(x))$, R für $P(f(f(x)))$. Die Klauselmenge ist jetzt schon mit Aussagenlogischer Resolution nach Aufgabe 8 widerlegbar.

Aufgabe 18 Widerlegen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens:

$$\left\{ \{P(a, b, c)\}, \{\neg P(x, y, z), P(y, x, z)\}, \{\neg P(x, y, z), P(z, y, x)\}, \right. \\ \left. \{\neg P(x, y, z), P(x, z, y)\}, \{\neg P(c, a, b)\} \right\}.$$

Antwort:

$$\begin{array}{ll} 1 : & \{P(a, b, c)\} \\ 2 : & \{\neg P(x, y, z), P(z, y, x)\} \\ 3 : & \{P(c, b, a)\} \quad \text{Res}(1, 2) \\ 4 : & \{\neg P(x, y, z), P(x, z, y)\} \\ 5 : & \{P(c, a, b)\} \quad \text{Res}(3, 4) \\ 6 : & \{\neg P(c, a, b)\} \\ 7 : & \emptyset \quad \text{Res}(5, 6) \end{array}$$

Aufgabe 19 Beweisen Sie folgende Formeln mit Hilfe des Resolutionsverfahrens oder zeigen Sie dass sie nicht gültig sind.

$$A1. \forall x \exists y \forall u \exists v P(x, y, u, v) \rightarrow \forall x \forall u \exists y \exists v P(x, y, u, v).$$

$$A2. \forall x \forall u \exists y \exists v P(x, y, u, v) \rightarrow \forall x \exists y \forall u \exists v P(x, y, u, v).$$

Antwort: Die Klauselform von $\neg A1$ ist

$$\{P(x, f(x), u, g(x, u))\}, \{\neg P(c, y, d, v)\}.$$

Dies ist widerlegbar mit m.g.u. $\{x \mapsto c, y \mapsto f(c), u \mapsto d, v \mapsto g(c, d)\}$.

Die Klauselform von $\neg A2$ ist

$$\{P(x, f(x, u), u, g(x, u))\}, \{\neg P(c, y, h(y), v)\}.$$

Dies ist nicht widerlegbar, $\neg A2$ erfüllbar. Also $A2$ nicht gültig.

Aufgabe 20 Sei die Klauselmeng $\Delta = \{\{P(u), P(v)\}, \{\neg P(x), \neg P(y)\}\}$ gegeben. Zeige mit Hilfe der Resolutionsmethode dass Δ widerlegbar ist.

Antwort: Hinweis: Die Widerlegung kann nicht ohne Faktorisierungsregel durchgeführt werden.

$$\begin{array}{ll} 1 : & \{P(u), P(v)\} \\ 2 : & \{P(u)\} \quad \text{FA}(1) \\ 3 : & \{\neg P(x), \neg P(y)\} \\ 4 : & \{\neg P(x)\} \quad \text{Res}(2, 3) \\ 5 : & \emptyset \quad \text{Res}(2, 4) \end{array}$$

Aufgabe 21 Seien folgende prädikatlogische Formeln gegeben:

$$(I) \quad (\forall x (A(x) \rightarrow B(x))) \rightarrow \exists y (C(y) \wedge \neg B(y))$$

$$(II) \quad \forall x (C(x) \rightarrow B(x))$$

$$(III) \quad \exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$$

Beweise mit Hilfe der Resolutionsmethode dass $(I), (II) \models (III)$.

Antwort: Zuerst setzen wir (I), (II), und $\neg(III)$ mittels Skolemisierung in Klauselnormalform. Wir numerieren gleich die Klauseln für die Verwendung im folgenden Resolutionsbeweis.

(I)

1. $\{A(c), C(d)\}$
2. $\{A(c), \neg B(d)\}$
3. $\{\neg B(c), C(d)\}$
4. $\{\neg B(c), \neg B(d)\}$

(II)

5. $\{\neg C(x), B(x)\}$

$\neg(III)$

6. $\{\neg A(x), B(x)\}$

$$7 : \quad \{\neg A(c), C(d)\} \quad Res(3, 6)$$

$$8 : \quad \{C(d)\} \quad Res(1, 7)$$

$$9 : \quad \{\neg A(c), \neg B(d)\} \quad Res(4, 6)$$

$$10 : \quad \{\neg B(d)\} \quad Res(2, 9)$$

$$11 : \quad \{\neg C(d)\} \quad Res(5, 10)$$

$$12 : \quad \emptyset \quad Res(8, 11)$$

Aufgabe 22 Seien c, d und e Konstanten. Geben Sie ein Refutierung der folgende Klauselmenge:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{r(d, y), \neg p(x)\}, \\ \{\neg t(y, d), p(y)\}, \\ \{\neg r(y, f(e)), \neg s(e)\}, \\ \{t(c, d), \neg s(d)\}, \\ \{s(x)\} \end{array} \right\}.$$

Antwort:

- | | | |
|------|----------------------------------|--------------|
| 1 : | $\{s(x)\}$ | |
| 2 : | $\{t(c, d), \neg s(d)\}$ | |
| 3 : | $\{t(c, d)\}$ | $Res(1, 2)$ |
| 4 : | $\{\neg t(y, d), p(y)\}$ | |
| 5 : | $\{p(c)\}$ | $Res(3, 4)$ |
| 6 : | $\{r(d, y), \neg p(x)\}$ | |
| 7 : | $\{r(d, y)\}$ | $Res(5, 6)$ |
| 8 : | $\{r(d, y')\}$ | Umbenennen 7 |
| 9 : | $\{\neg r(y, f(e)), \neg s(e)\}$ | |
| 10 : | $\{\neg s(e)\}$ | $Res(8, 9)$ |
| 11 : | $\emptyset$ | $Res(1, 10)$ |

Aufgabe 23 Geben Sie ein Refutierung mit Hilfe der Unitresolution von dem Klauselmengen $\{\{p, q, \neg r\}, \{\neg u\}, \{t, \neg q\}, \{r, u\}, \{\neg t, \neg s, u\}, \{\neg p\}, \{s\}\}$.

Antwort:

- | | | |
|------|-------------------------|---------------|
| 1 : | $\{s\}$ | |
| 2 : | $\{\neg t, \neg s, u\}$ | |
| 3 : | $\{\neg t, u\}$ | $Res(1, 2)$ |
| 4 : | $\{\neg u\}$ | |
| 5 : | $\{\neg t\}$ | $Res(3, 4)$ |
| 6 : | $\{t, \neg q\}$ | |
| 7 : | $\{\neg q\}$ | $Res(5, 6)$ |
| 8 : | $\{\neg p\}$ | |
| 9 : | $\{p, q, \neg r\}$ | |
| 10 : | $\{p, \neg r\}$ | $Res(7, 9)$ |
| 11 : | $\{\neg r\}$ | $Res(8, 10)$ |
| 12 : | $\{r, u\}$ | |
| 13 : | $\{u\}$ | $Res(11, 12)$ |
| 14 : | $\emptyset$ | $Res(4, 13)$ |

Aufgabe 24 Die Fibonacci-Zahlen

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...

sind rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned}
 F(0) &= 1, \\
 F(1) &= 1, \\
 F(n+2) &= F(n+1) + F(n).
 \end{aligned}$$

Sei

$$G(n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

1. Druck $G(n)$ aus mit Hilfe der Lösungen der Gleichung $x^2 = x + 1$.
2. Benutze 1 um zu zeigen dass $\frac{\sqrt{5}}{5}G(n) = F(n)$.

Antwort. Sei $x_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, so dass $G(n) = x_0^{n+1} - x_1^{n+1}$. Weil die Rekursionsgleichungen F eindeutig definieren genügt es zu zeigen dass diese von $\frac{\sqrt{5}}{5}G(n)$ erfüllt werden. Tatsächlich haben wir $\frac{\sqrt{5}}{5}G(0) = \frac{\sqrt{5}}{5}(x_0 - x_1) = 1$ und $\frac{\sqrt{5}}{5}G(1) = \frac{\sqrt{5}}{5}(x_0^2 - x_1^2) = \frac{\sqrt{5}}{5}((x_0 + 1) - (x_1 + 1)) = 1$, und weil $x_0^{n+3} = x_0^{n+2} + x_0^{n+1}$ (und dass gleiche für x_1) haben wir auch $\frac{\sqrt{5}}{5}G(n+2) = \frac{\sqrt{5}}{5}G(n+1) + \frac{\sqrt{5}}{5}G(n)$.

Aufgabe 25 Zeige dass die folgende Funktionen und Relationen primitiv rekursiv sind:

1. Konstante Funktionen: Für Konstante c ist die Funktion $\lambda x.c$ primitiv rekursiv.

Antwort: Die Nachfolgerfunktion S ist als primitiv rekursive Basisfunktion gegeben. Durch c -fache Zusammensetzung erhalten wir $\lambda x.S(\dots(S(0))\dots)$.

2. Die Signum Funktion:

$$\text{sg}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Antwort: Definiere $\text{sg}(0) = 0$, $\text{sg}(x+1) = 1$.

3. Die Fallunterschied Funktion:

$$\text{cases}(x, y, z) = \begin{cases} x & \text{falls } z = 0, \\ y & \text{falls } z > 0. \end{cases}$$

Antwort: Definiere $\text{cases}(x, y, 0) = x$, $\text{cases}(x, y, z+1) = y$.

4. Abgeschnittene Subtraktion:

$$x \dot{-} y = \begin{cases} 0 & \text{falls } y > x, \\ x - y & \text{anders.} \end{cases}$$

Antwort: Definiere zuerst die Vorgänger Funktion

$$\begin{aligned}\text{pd}(0) &= 0 \\ \text{pd}(x+1) &= x.\end{aligned}$$

Dann definiere

$$\begin{aligned}x \dot{-} 0 &= x \\ x \dot{-} (y+1) &= \text{pd}(x \dot{-} y).\end{aligned}$$

5. Die charakteristische Funktion $\chi_{<}$ der Ungleichheitsrelation:

$$\chi_{<}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x < y, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Antwort: Mann definiere $\chi_{<}(x, y) = \text{sg}(y \dot{-} x)$.

6. Die charakteristische Funktion $\chi_{=}$ der Gleichheitsrelation:

$$\chi_{=}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Antwort: Unter Benutzung der vorher definierte Funktionen sg , $\dot{-}$, und $\chi_{<}$ können wir definieren $\chi_{=}(x, y) = 1 \dot{-} \text{sg}(\chi_{<}(x, y) + \chi_{<}(y, x))$.

7. Zeige dass die Summe $\lambda x, y. x + y$ und das Produkt $\lambda x, y. x \cdot y$ primitiv rekursiv sind.

8. Sei f primitiv rekursiv. Zeige dass auch die begrenzte Summe $g(x) = \sum_{y \leq x} f(y)$ primitiv rekursiv ist.

Antwort: Definiere

$$\begin{aligned}g(0) &= f(0) \\ g(x+1) &= g(x) + f(x).\end{aligned}$$

9. Sei f primitiv rekursiv. Zeige dass auch das begrenzte Produkt $h(x) = \prod_{y \leq x} f(y)$ primitiv rekursiv ist.

Antwort: Definiere

$$\begin{aligned}g(0) &= f(0) \\ g(x+1) &= g(x) \cdot f(x).\end{aligned}$$

10. Zeige dass die Aussagenlogische Operatoren primitiv rekursiv sind. Dass heisst, für gegebene primitiv rekursive Relationen P und Q sind auch die Funktionen $\lambda x. \neg P(x)$, $\lambda x, y. P(x) \wedge Q(y)$, $\lambda x, y. P(x) \vee Q(y)$, und $\lambda x, y. P(x) \rightarrow Q(y)$ primitiv rekursiv.

Antwort: Z.B. $\lambda x, y. P(x) \vee Q(y)$ wird definiert durch $sg(P(x) + Q(y))$ und $\lambda x. \neg P(x)$ von $1 \div P(x)$.

11. Begrenzte Quantifikation: Gegeben eine primitiv rekursive Relation R sind auch die Relationen $P(x) = \exists y \leq x R(y)$ und $Q(x) = \forall y \leq x R(y)$ primitiv rekursiv.

Antwort: Mann definiere $P(x) = sg\left(\sum_{y \leq x} R(y)\right)$ und $Q(x) = \prod_{y \leq x} R(y)$.

12. Begrenzte Suche: Gegeben f primitiv rekursiv, definiere die Funktion

$$\mu y \leq z (f(\vec{x}, y) = 0)$$

die den kleinsten Wert $y \leq z$ ausgibt so dass $f(\vec{x}, y) = 0$, und die 0 ausgibt falls so eine y nicht existiert.

Antwort: Definiere zuerst die Relation R durch

$$R(\vec{x}, y) \equiv f(\vec{x}, y) = 0 \wedge \forall w < y (f(\vec{x}, w) \neq 0).$$

Dann kann es höchstens ein y geben mit $R(\vec{x}, y)$, und $\mu y \leq z (f(\vec{x}, y) = 0)$ wird gegeben durch $\sum_{y \leq z} y \cdot R(\vec{x}, y)$.

13. Division: Die Relation $x|y$, x teilt y ist primitiv rekursiv.

Antwort: Mit Hilfe von begrenzte Quantifikation und $\chi_=($ (siehe oben) können wir $x|y$ definieren durch $\exists z \leq y (x \cdot z = y)$.

14. Primzahlen: Der Funktion $n \mapsto p_n$, wo p_n der n -te Primzahl ist.

Antwort: Mann definiere zuerst ein Prädikat $\text{Prim}(x)$ durch

$$\text{Prim}(x) \Leftrightarrow x = 2 \vee (x > 2 \wedge \forall y \leq x (y|x \rightarrow y = 1 \vee y = x)).$$

Also die Relation $\text{Prim}(x)$ druckt aus dass x ein Primzahl ist. Wir benutzen weiter dass für jede gegebene Zahl n immer ein Primzahl $\leq 2n$ vorhanden ist. (Bertrands Postulat, zuerst bewiesen von Chebyshev. Mann könnte auch eine höhere obere Schranke benutzen die leichter zu beweisen ist.) Dann definieren wir mit Hilfe begrenzte Quantifikation

$$\begin{aligned} p_1 &= 2 \\ p_{n+1} &= \mu z \leq 2p_n (z > p_n \wedge \text{Prim}(z)). \end{aligned}$$

Aufgabe 26 Sei $f \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x)$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) f, g nicht berechenbar $\implies f \cdot g$ nicht berechenbar.

(b) f, g nicht total $\implies f \cdot g$ nicht total.

Antwort: (a) Falsch. Gegenbeispiel: Sei A eine unentscheidbare Menge, und sei χ_A die charakteristische Funktion von A , also

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \notin A, \\ 1 & \text{falls } x \in A. \end{cases}$$

Dann sind sowohl χ_A als $1 - \chi_A$ nicht berechenbar, aber $\chi_A(x) \cdot (1 - \chi_A(x)) = 0$ für alle x und damit berechenbar.

(b) Richtig. Das Produkt zweier Werten ist nicht definiert wenn einer dieser Werten nicht definiert ist.