Mathematik 2 Prüfung

Prof. Cenker Prof. Uchida

Mitschrift 22. Juni 2004

1) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Weiters sei f die reelle Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^t A x + b^t x.$$

a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von $f(x)$.
b) In welchen/m Punkt/en $x \in \mathbb{R}^2$ ist $f(x)$ stationär.
c) Berechnen Sie die Richtungsableitung im Punkt $(1,1)$ in Richtung $(-4,3)$.
d) In welche Richtung ist die Ableitung im Punkt $(1,1)$ maximal?

a)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x,y)\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-4,-2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 8xy - 4x - 2y \end{aligned}$$

$$\nabla f(x,y) = (4x + 8y - 4, 4y + 8x - 2)$$

$$H_f = \nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

b)

$$\nabla f(x,y) = (0,0)$$

$$\begin{array}{rrrll}
4x & +8y & -4 & = 0 & \quad | \cdot 2 \\
8x & +4y & -2 & = 0 & \\
\hline
0 & 12y & -6 & = 0 & \Rightarrow y = \frac{1}{2} \\
\hline
8x & +4\frac{1}{2} & -2 & = 0 & \Rightarrow x = 0
\end{array}$$

$$\Rightarrow \text{Punkt } \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

c)

$$\begin{aligned}
D_a\ f(x_0) &= \nabla f(x_0) \cdot a \cdot \frac{1}{||a||} = \quad \text{(normieren)} \\
&= (8,10) \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = -\frac{2}{5}
\end{aligned}$$

d)

$$\text{In Richtung des Gradienten: } \nabla f(1,1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

2) Sei $f(x,y)$ die Funktion

$$f(x,y) = e^{x-y}.$$

a) Berechnen Sie die Tangentialabbildung von $f(x,y)$ im Punkt $(4,4)$.
b) Wie sieht die implizite Form der Tangentialebene im Punkt $(4,4)$ aus?
c) Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Grades für die Funktion $f(x,y)$ im Punkt $(-1,1)$.
d) In welche Richtung ist der Anstieg der Funktion $f(x,y)$ im Punkt $(-2,-1)$ maximal?

a)

$$\begin{aligned}
g(x,y) &= f(x_0,y_0)+\nabla f(x_0,y_0)\cdot\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = \\
&= e^{4-4}+(1,-1)\cdot\begin{pmatrix} x-4 \\ y-4 \end{pmatrix} = \\
&= 1+x-4-(y-4)=x-y+1
\end{aligned}$$

$$\nabla f(x,y) = (e^{x-y}, -e^{x-y})$$

b)

$$z=x-y+1 \quad \Rightarrow \quad x-y-z+1=0$$

d)

In Richtung des Gradienten: $(e^{-2+1}, -e^{-2+1}) = (e^{-1}, -e^{-1})$

c)

$$f(x,y) = f(x_0,y_0)+\nabla f(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}(x-x_0,y-y_0)\nabla^2 f(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}+R$$

$$(x_0,y_0) = (-1,1)$$

$$\nabla f(x,y) = \left(e^{x-y},-e^{x-y}\right)=\left(e^{-2},-e^{-2}\right)$$

$$H_f(x,y) = \nabla^2 f(x,y)=\begin{pmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ -e^{x-y} & e^{x-y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-2} & -e^{-2} \\ -e^{-2} & e^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx e^{-2}+\left(e^{-2},-e^{-2}\right)\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}(x+1,y-1)\begin{pmatrix} e^{-2} & -e^{-2} \\ -e^{-2} & e^{-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix}= \\ &= e^{-2}\left(1+(1,-1)\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}(x+1,y-1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix}\right)= \\ &= e^{-2}\left(1+(x+1)-(y-1)+\frac{1}{2}\left((x+1)^2+(y-1)^2-2(x+1)(y-1)\right)\right)= \\ &= e^{-2}\left(x-y+3+\frac{1}{2}\left((x^2+2x+1)+(y^2-2y+1)-2xy+2x-2y+2\right)\right)= \\ &= e^{-2}\left(\frac{x^2+y^2}{2}-xy+3x-3y+5\right) \end{aligned}$$

3)
a) Man berechne das Integral der Funktion

$$f(x_1,x_2)=x_1+x_2$$

über den Bereich

$$B=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1^2+x_2^2\le 1\}.$$

b) Man berechne das Volumen des folgenden Bereiches

$$S=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,\ x_1+x_2+x_3\le 1\}.$$

a)

Einheitskreis: $x_2 \leq 1 - x_1^2 \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{1-x_1^2} \leq x_2 \leq \sqrt{1-x_1^2}$

$$\begin{aligned}
\iint_B x_1 + x_2 \; dx_2 \; dx_1 &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} x_1 + x_2 \; dx_2 \; dx_1 = \\
&= \int_{-1}^{1} \left(x_1 x_2 + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x_2=-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} \; dx_1 = \\
&= \int_{-1}^{1} \left(x_1\sqrt{1-x_1^2} + \frac{1-x_1^2}{2} + x_1\sqrt{1-x_1^2} - \frac{1-x_1^2}{2} \right) \; dx_1 = \\
&= -\int_{-1}^{1} (-2x_1) \underbrace{\sqrt{1-x_1^2}}_{\sqrt{u}} \; dx_1 = -\int_{\dots}^{\dots} \sqrt{u} \; du = \\
&= -\left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_{u=\dots}^{\dots} = -\left(\frac{2}{3} (1-x_1^2)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_{x_1=-1}^{1} = 0 - 0 = 0
\end{aligned}$$

b)

Simplex

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} 1 \; dx_3 \; dx_2 \; dx_1 &= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} 1 - x_1 - x_2 \; dx_2 \; dx_1 = \\
&= \int_0^1 \left((1-x_1)x_2 - \frac{x_2^2}{2} \right) \Big|_{x_2=0}^{(1-x_1)} \; dx_1 = \\
&= \int_0^1 \left((1-x_1)(1-x_1) - \frac{(1-x_1)^2}{2} \right) \; dx_1 = \\
&= \int_0^1 \frac{(1-x_1)^2}{2} \; dx_1 = \int_0^1 \frac{1}{2} \left(1 - 2x_1 + x_1^2 \right) \; dx_1 = \\
&= \left(\frac{1}{2} x_1 - \frac{x_1^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{x_1^3}{3} \right) \Big|_{x_1=0}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

4) Gegeben seien die Funktionen

$$f(x,y) = x + y^2$$

und

$$g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 1.$$

a) Zeichnen Sie eine Skizze der Niveaulinien von f.
b) Man bestimme das Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$.
c) Für die Funktion g sind ausgehend von Startpunkt (1,1) zumindest 2 Iterationen zur Minimierung der Funktion mit Hilfe der Methode des steilsten Ansiegs zu berechnen.

a)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x + y^2 \\ g(x,y) &= 2x^2 + y^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= c \\ x + y^2 &= c \\ x &= c - y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^2 &= c - x \\ y &= \pm\sqrt{c - x} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= x+y^2 \longrightarrow \text{MIN!}\\
g(x,y) &= 2x^2+y^2-1=0 \qquad \text{Ellipse}
\end{aligned}$$

$$L(x,y,\lambda) = x+y^2-\lambda\left(2x^2+y^2-1\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(x,y,\lambda}{\partial x} &= 1-4\lambda x=0 \qquad \Longrightarrow x\neq 0\\
\frac{\partial L(x,y,\lambda}{\partial y} &= 2y-2\lambda y=0\\
\frac{\partial L(x,y,\lambda}{\partial \lambda} &= -\underbrace{\left(2x^2+y^2-1\right)}_{y=0\implies x^2=\frac{1}{2}}=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \qquad y &= 0:\\
x &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\\
\longrightarrow P_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\\
P_2 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \qquad y &\neq 0:\\
2-2\lambda &= 0\\
\Rightarrow \lambda &= 1\\
x &= \frac{1}{4}\\
2\frac{1}{4^2}+y^2 &= 1\\
y^2 &= 1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}\Longrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{7}{8}}\Longrightarrow P_3=\left(\frac{1}{4},\sqrt{\frac{7}{8}}\right),P_4=\left(\frac{1}{4},-\sqrt{\frac{7}{8}}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(P_1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
f(P_2) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \implies \text{kleinster Wert} \implies \text{Minimum} \\
f(P_3) &= \frac{1}{4} + \frac{7}{8} \\
f(P_4) &= \frac{1}{4} + \frac{7}{8}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\nabla g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4x \\ 2y \end{pmatrix} \\
\nabla g \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
d_1 = -\nabla g \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}
$$

$$
x_2 = x_1 + \lambda d_1
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi(\lambda) &= g(x_1 + \lambda d_1) = g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix} 1-4\lambda \\ 1-2\lambda \end{pmatrix} = \\
&= 2(1-4\lambda)^2 + (1-2\lambda)^2 - 1 = 36\lambda^2 - 20\lambda^2 + 2
\end{aligned}
$$

$$
\varphi'(\lambda) = 72\lambda - 20 = 0 \implies \lambda^\star = \frac{5}{18}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{18}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla g(x_2) &= \nabla g \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix} \Longrightarrow d_2 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi(\lambda) &= g(x_1 + \lambda d_2) = g\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{9} + \frac{4}{9}\lambda \\ \frac{4}{9} - \frac{8}{9}\lambda \end{pmatrix}\right) = \\
&= g\left(\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 + 4\lambda \\ 4 - 8\lambda \end{pmatrix}\right) = 2\frac{1}{81}(-1+4\lambda)^2 + \frac{1}{81}(4-8\lambda)^2 - 1 = \\
&= \frac{1}{81}\left(96\lambda^2 - 80\lambda - 63\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi'(\lambda) &= \frac{192}{81}\lambda - \frac{80}{81} = 0 \longrightarrow \lambda^\star = \frac{5}{12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_3 &= x_2 + \lambda^\star d_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{5}{12}\begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix} = \frac{2}{27}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$