

Mathematik 2 für Informatiker

Cenker/Uchida

7. 11. 2006

1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Weiters sei r die reelle Funktion $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$r(x) = x^t A x + b^t x.$$

- (a) Berechnen Sie Gradienten und Hessematrix von $r(x)$! (2)
- (b) In welchen/m Punkt/en $x \in \mathbb{R}^2$ ist $r(x)$ stationär? (2)
- (c) Berechnen Sie alle lokalen und globalen Extrema der Funktion $r(x)$, geben Sie deren Art an, bzw. begründen Sie stichhaltig, falls es keine geben sollte! (4)
- (d) In welche Richtung $t \in \mathbb{R}^3$ ist der Anstieg der Funktion $r(x)$ im Punkt $(3, 7)$ maximal? (2)

2. Sei $h(x, y, z)$ die Funktion

$$h(x, y, z) = xy^2 + y \cdot e^z.$$

- (a) Berechnen Sie die quadratische Approximation der Funktion $h(x, y, z)$ in der Nähe des Ursprungs! (5)
- (b) Wie sieht die Tangentialabbildung von $h(x, y, z)$ im Punkt $(1, 1, 0)$ aus? (3)
- (c) In welche Richtung $t \in \mathbb{R}^3$ (berechnen!) ist der Anstieg der Funktion $h(x, y, z)$ im Punkt $(-1, 2, 2)$ maximal? (2)

3. Gegeben seien die Funktionen: $f(x, y) = y^2 - x$ und $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1$

- (a) Zeichnen Sie eine Skizze der Niveaulinien von f und von g . (2)
- (b) Bestimmen Sie das Minimum der Funktion $f(x)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$. (4)
- (c) Für die Funktion g ist vom Startpunkt $(1, 1)$ aus zumindest eine Iteration zur Minimierung der Funktion mit Hilfe der Methode des steilsten Abstiegs zu berechnen. (4)

4. Gegeben seien folgende Funktionen $f(x) = 0.5x + 0.3$, $g(x) = (x/2)^2$ und $h(x) = \sqrt{x}$

- (a) Welche dieser Funktionen sind in welchem Bereich Kontraktionen? (3)
- (b) Berechnen Sie die/den Fixpunkt(e) für f , g und h (falls vorhanden)
 - (i) exakt
 - (ii) mit Iteration (2 Schritte, Startwert $x=0.5$) (4)
- (c) (i) Formulieren Sie das Fixpunktproblem $g(x) = x$ in ein Nullstellenproblem um.
 - (ii) Wie sieht dazu die Newton-Iteration zur Nullstellenbestimmung aus? (3)