Stetigkeit

Eine Funktion f heißt stetig an der Stelle $x_0 \in D$, falls $\lim_{x \to x_0} = f(x)$ existiert und $\lim_{x \to x_0} = f(x_0)$.
Die Funktion heißt stetig falls sie in allen Punkten des Definitionsbereichs stetig ist.

laut Skript:

$f: R \to R$ ist stetig in x_0, wenn
$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \exists \in > 0, \delta > 0 : | f(x) - f(x_0) | < \varepsilon \; \forall | x - x_0 | < \delta$
f ist stetig auf R, wenn *f* in allen Punkten $x_0 \in R$ stetig ist.

Mehrdimensional

Eine Funktion *f*: $R^n \to R^m$ heißt stetig in $x_0 \in R^n$ wenn gilt:
$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f(x_0)$, d.h.
$\exists \varepsilon > 0, \delta > 0 : \| f(x) - f(x_0) \| < \varepsilon \;\; \forall \| x - x_0 \| < \delta$
f heißt stetig auf $A \subseteq R^n$, wenn *f* stetig in jedem $x_0 \in A$ ist, besonders auch für $A = R^n$

Limes: Im n-dimensionalen Raum können wir uns von unendlich vielen Richtungen auf unendlich viele Arten dem x_0 nähern.
Definition der Stetigkeit mit Hilfe von Folgen: $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = f(x_0) \quad \forall (x_k) \subseteq R^n$ mit $\lim_{k \to \infty} x_k = x_0$

Bsp: tan
Aufgrund der Definition der Tangens Funktion, nämlich tan(x) = sin(x)/cos(x), ist an den Stellen, an denen der Kosinus 0 ergibt, der Tangens nicht definiert, da eine Division durch Null vorliegt, was aber nicht möglich ist.

Mehrdimensionale Differenzialrechnung

Kettenregel

$g \circ f$

$g(f(x))' = g'(f(x)) * f'(x)$

$\nabla(g \circ f)(x) = \nabla g(f(x)) * \nabla f(x)$

Bsp.:

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

$$g(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$g(f(x)) = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 = 2x_1^2 + 2x_2^2$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 4x_1 \\ 4x_2 \end{pmatrix} \quad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (4x_1, 4x_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (4x_1 + 4x_2, 4x_1 - 4x_2)$$

Gardient

Wie im eindim. Fall wird wieder gelten, dass in einem stationärem Punkt (im mehrd. Fall Sattelpunkt – min, max, Wendepnkt.) die 1. Ableitung gleich null sein muss (horiz. Tangentialebene). Erst mit der 2. Ableitung kann man entscheiden um welchen stat. Punkt es sich handelt

Wenn für eine Funktion f : $R^n \rightarrow R$ alle partiellen Ableitungen existieren, so ist die *erste Ableitung* von f der Gardient

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx_1} \\ \ldots \\ \frac{d}{dx_n} \end{pmatrix} \rightarrow \text{Jacobi Matrix}$$

Hessematrix

$$\nabla^2 f(x) = H_f(x) = \begin{pmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_2x_1 & x_2x_2 & x_2x_3 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & x_3x_3 \end{pmatrix}$$

Eine Funktion f. $A \subseteq R^n \rightarrow R^m$ ist in einem (inneren Punkt) differenzierbar wenn sie in x_0 partiell differenzierbar ist, alle partiellen Ableitungen in einer Umgebung von x_0 existieren und dort stetig sind.
Inner Punkt a heißt innerer Punkt von M, wenn eine Umgebung von a vollständig in M liegt.

Richtungsableitung

Das innere Produkt (Skalarpodukt) des Gradienten von f mit dem Richtungsvektor a $R^n \rightarrow R^m$

in Richtung $a \in R^n$
mit ||a||=1

$$Daf(x_0) = \lim_{t->0} \frac{f(x_0 + t_a) - f(x_0)}{t}$$

und

$$D_{ek} f(x_0) = \frac{d}{dxk} f(x_0)$$

Ableitung von f im Punkt x_0 in Richtung des Vektors a

Für welchen Vektor a ist die Richtungsableitung maximal?

=inneres Produkt von a mit dem Gradienten von f und das Produkt proportional zum cos des eingeschlossenen Winkels → a muss parallel zum Gradienten liegen da Cos von 0° am größten ist.

$a = \dfrac{\nabla f(x_0)}{\| \nabla f(x_0) \|}$ Gradient zeigt in Richtung des größten Anstiegs

Gradient = 0 dann stationärer Punkt → könnte ein Maximum sein

<u>Bsp.:</u>

$$f(x,y,z) = z^2 - x^2 - y^2$$

$$a = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\| a \| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25}$$

$$\mathrm{Daf}(1,0,1) = (2z, -2x, -2y)\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{25}} = (2,0,-2)\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{8}{\sqrt{25}}$$

Tangentialabbildung

Sei $f: A \subseteq R^n \rightarrow R^m$ in einem inneren Punkt von A differenzierbar.
Die Funktion $g(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)$ ist eine affin lineare Abb. und heißt Tangentialabb. von f.

Für eine differenzierbare Funkt. f: $R^n \rightarrow R^m$ liefert die Tangentialabb.
$f_t(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)$ in der Umgebung von x_0 eine gute Nährung f dar, also
$f_t(x) - f(x_0) = \nabla f(x_0)(x - x_0) \approx f(x) - f(x_0)$

Das totale Differential

Sei f:Rn→Rm differenzierbar. Die lin. Abb
$df(x_0)\nabla f(x_0)(x - x_0) = \dfrac{d}{dx_1} f(x_0) dx_1 + \ldots + \dfrac{d}{dx_n} f(x_0) dx_n$, mit $dx_i = (x_i - x_i^{(0)})$, heißt totales Differential der Funktion f in x_0.

Das tot. Diff gibt die ungefähre Abweichung des Funktionswertes f(x) an, wenn x von x_0 wenig abweicht.

<u>Bsp.:</u> Fehlerfortpflanzung

$$\Delta f\max(x_1, \ldots, x_n) = \left|\frac{d}{dx_1} f(x)\right| \Delta x_1 + \ldots + \left|\frac{d}{dx_n} f(x)\right| \Delta x_n \qquad \frac{df\max(x)}{df(x)} \ldots \text{rel.Fehler}$$

Marathonläufer soll über Strecke s=10km eine Zeit von t=30min laufen
mittlere Geschwd v = s/t = 20km/h
Messfehler f. s sei $\Delta s = \pm 1m$ ... für $\Delta t = \pm 1sec$
Wie groß ist Δv maximal?

$$\Delta v(s,t) = \left|\frac{d}{ds} v(s,t)\right|\Delta s + \left|\frac{d}{dt} v(s,t)\right|\Delta t = \left|\frac{1}{t}\right|\Delta s + \left|-\frac{s}{t^2}\right|\Delta t = \frac{0{,}001\text{km}}{0{,}5h} + \frac{10km}{0{,}25h^2}\frac{1}{3600}h = 0{,}013km/h$$

Mittelwertsätze

Approximation im Mehrdimensionalen

Sei $f:A \subseteq R^n \rightarrow R$ eine reelle, auf der offenen Menge A differenzierbare Funktion und enthalte A die Strecke S von x nach x_0. Dann gibt es einen Punkt $\xi \in S$. Ist f 2mal stetig diffbar. so gilt: $f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^t \nabla^2 f(x_0)(x - x_0) + O(\| x - x_0 \|^3)$

Da Fehler O(g(x)) mind. genauso schnell gegen 0 geht wie $g(x)=\|x-x_0\|^3$ mit $x \rightarrow x_0$

Implizite Funktionen

Bsp.: löse Funktion als Funktion y = f(x) → $x^2-y^2-1=0$ → $x = \pm\sqrt{y+1}$

Bsp.: Ist Funktion $f(x,y) = (x^2-y^2,2xy)$ im Punkt (1,1) lokal invertierbar?

$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ Determinanden !=0 dh invertierbar

Bsp.: Berechne y' durch implizite Diff → $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

$\nabla_1 f = 2xb^2 \quad \nabla_2 f = 2ya^2 \quad \nabla y(x) = -\frac{2xb^2}{2ya^2} = \frac{xb^2}{ya^2}$ ||| $\nabla y(x) = -\nabla_2 f(x,y(x))^{-1} * \nabla_1 f(x,y(x))$

Bsp.: Bestimme y' und gib jene Bereiche an für die f explizit nach y auflösbar ist

$y2e^{3x}+2x^2=0$

$\nabla_1 f = y^2 3e^{3x} + 4x \quad \nabla_2 f = 2ye^{3x} \quad \nabla y(x) = \frac{y^2 3e^{3x} + 4x}{2ye^{3x}}$

$y^2 e^{3x} = 2x^2 \rightarrow y = \sqrt{\frac{2x^2}{e^{3x}}}$ nur lösbar für x = 0

Bsp.: Best. z' von $f(x,y,z) = x^2 + y^3 - z = 0$ im Punkt (1,1,2)

$\frac{dz}{dx} = -\frac{2x}{-1} = 2x \qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{3y^2}{-1} = 3y^2 \quad \nabla z(x,y) = (2x \;\; 3y^2)$ im Punkt $\Rightarrow (2 \;\; 6)$

Umkehrfunktion

$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \rightarrow \nabla \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2y \end{vmatrix} \begin{matrix} 1(a) & 0(c) \\ 0(b) & 1(d) \end{matrix} \begin{matrix} 4a-4b=1 & 4a+4b=0 \\ 4c-4d=0 & 4c+4d=1 \end{matrix} \xrightarrow{\text{auflösen}} \begin{matrix} c=d & a=-b \\ b=-\frac{1}{8} & d=\frac{1}{8} \end{matrix} \ldots$

Taylor

Es kann unter bestimmten Bedingungen lokal eine Approximation mit Hilfe von Ableitungen an einer best. Stelle berechnet werden.
Sei f 2mal stetig diffbar. bei x_0 dann gilt:

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^t \nabla^2 f(x_0)(x - x_0) + \text{Rest} \Rightarrow \frac{\text{Rest}}{\| x - x_0 \|^2} \to 0$$

Optimierung

Kriterium von Sylvester

positiv definit: wenn alle Hauptminoren positiv sind
positiv semidefinit: wenn alle ihre Hauptminoren positiv od. null sind
negativ definit: wenn ihre Hauptminoren alternierend negativ und positiv sind
negativ semidefinit: alterniederend negativ und positiv od null sind

Hinreichende Bedingung für lokale Optima:

f: 2mal stetig differenzierbar bei x_0

1. Ableitung $\nabla f(x_0)=0$
2. Ableitung $H=H_f(x_0)= \nabla^2 f(x_0)$
   → positiv definit → x_0 ... lokale Minimastelle
   → negativ definit → x_0 ... lokale Maximastelle
3. Spezialfall D im R^2 gilt: Falls det Hf (x0) < 0, so liegt kein Extremum sondern ein Sattelpunkt vor.

konvex: Determinaten müssen alle **positiv** sein
konkav: Determinaten müssen alle **negativ** sein

<u>Bsp.:</u>

$\searrow \; - \; \nearrow$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} \boxed{5} & 3 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

$$A_{1x1} = 5$$

$$A_{2x2} = 5*2 - 3*3 = 1$$

$$A_{3x3} = 5*2*2 + 3*1*1 + 1*3*1 - 1*2*1 - 1*1*5 - 2*3*3$$

Lagrange – wenn NBs „="

1.) $L(x, y, \lambda) = f(x_1, ..., x_n) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x_1, ..., x_n)$

Variablen Funktion NB

2.) $\nabla f(x)$ → I Variablen ausrechnen
...
3.) Punkte mit geänderte Hesse untersuchen

$$H = \begin{pmatrix} 0 & g_{x1} & g_{x2} \\ g_{x1} & L_{x1x1} & L_{x1x2} \\ g_{x2} & L_{x2x1} & L_{x2x2} \end{pmatrix} \begin{matrix} H > 0 \ldots \text{lokales Max} \\ H < 0 \ldots \text{lokales Min} \\ H = 0 \ldots \text{keine Aussage} \end{matrix}$$

4.) Funktionswert → in Funktion einfach Punkt einsetzten

Polarkoordinatentransformation

$$\int xydxdy \text{ mit } N = \{(x,y) \in R^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$\int xydxdy = \int r\cos\varphi\cos\varphi r \det(J_g(r,\varphi))dud\varphi \quad x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

$$\int_1^2 \int_0^{\pi/2} r\cos\varphi\cos\varphi r.rdrd\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{r^4}{4}\cos\varphi os\varphi s\Big|_1^2 \ldots = 15/8$$