Prüfungsfragen Cenker 02.07.2004
(http://www.informatik-forum.at/showthread.php?t=20613)

1) Sei f(x,y) die Funktion in R^2 -> R^2:

f(x,y) = (f1(x,y), f2(x,y)) = (xy(xy-1), e^xy - x^2 * y^2)

a) Besitzt die Komponentenfunktion f1(x,y) lokale bzw. globale Extrema?
b) In welchen Punkte des R^2 ist die Funktion f(x,y) lokal invertierbar?
c) Berechnen Sie die Ableitung (Jakobimatrix) der zu f(x,y) inversen Funktion f^-1 im Punkt (1, 0).

2) Sei g(x,y) = x^2 y^3 - 1

a) Tangentialabbildung im Punkt (1, -1).
b) Impliziete Form der Tangentialebene im Punkt (1, -1).
c) Taylorpolynom 2. Grades für g(x,y) im Punkt (1, -1).
d) In welche Richtung ist der Anstieg von g(x,y) im Punkt (1, -2) maximal?

3) a) Man zeichne eine Skizze von

B = {(x,y) € R^2: 1<= x^2 + y^2 <= 4, x >= 0, y >= 0}

b) Integral von I_B 1 dx dy (I soll das Integralzeichen sein, mit Index B).
c) Integral von I_B x*y dx dy

4) Sei F(x) = 1/sqrt(x)

a) In welchen Bereichen ist das eine Kontradiktion
b) Berechnen Sie die/den Fixpunkt(e)
(i) exakt
(ii) mit Iterationen (2 Schritte, Startwert 2)
c) (i) Formulieren Sie obiges Fixpunkt- in ein Nullstellenproblem um.
(ii) Wie sieht dazu die Newton-Iteration zur Nullstellenbestimmung aus.

① $\boxed{S37}$ 2. Juli 2004

a) $f_1(x,y)$ lokale, globale Extrema?

$$f_1(x,y) = x\cdot y\cdot(xy-1) = x^2y^2 - xy$$

$2x\cdot y^2 - y$

$x^2\cdot 2y - x$

$$\nabla f_1(x,y) = \big(y(y-1),\ x(x-1)\big) = 0$$

$$p_1 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad p_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad p_3 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad p_4 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f_1(x,y) = \begin{pmatrix} y(y-1) & 0 \\ 0 & x(x-1)\end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f_1(0,0) = 0$$

$$\nabla^2 f_1(0,1) =$$

$y(2xy-1)$

$x(2xy-1)$

$x\cdot y = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2y}$

$$\nabla f_1(x,y) = \left[y(xy-1) + xy^2,\ x(xy-1)+x^2y\right]$$

$$\nabla^2 f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy-1 \\ 4xy-1 & 2x^2\end{pmatrix}$$

$P(0,0)$ Extremum möglich

$$\nabla^2 f_1(0,0) = \begin{pmatrix} 2\cdot 0^2 & 4\cdot0\cdot0-1 \\ 4\cdot0\cdot0-1 & 2\cdot0^2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

Eigenwerte + Eigenvektoren:

$$\det\begin{pmatrix} 0-\lambda & -1 \\ -1 & 0-\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \cancel{\lambda_{1,2} = 1, -1} \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$$

Nicht positiv Definit, somit kein lokales Extremum und auch kein globales Extremum.

Bei $P(0,0)$ ist ein Sattelpunkt

1b

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2xy^2 - y & 2xy^2 - x \\ y e^{(xy)} - 2xy^2 & x e^{xy} - 2x^2 y \end{pmatrix}$$

$\det(\nabla f) = 0$

$$= (2xy^2 - y) \cdot (x \cdot e^{xy} - 2x^2 y) - (2xy^2 - x) \cdot (ye^{xy} - 2xy^2)$$

$$= 2x^2y^2e^{xy} - 4x^3y^3 - xye^{xy} + \cancel{2x^2y^2} - \{2xy^3e^{xy} + 4x^2y^4 + xye^{xy} - \cancel{2x^2y^2}\}$$

$$= 2x^2y^2e^{xy} - 4x^3y^3 - 2xy^3e^{xy} + 4x^2y^4 = 0$$

$P_1 \notin (0,0)$ $\quad P_1 = (1,1)$ $\quad P_2 =$

Immer wenn $x = y$ ist es nicht invertierbar, da

$$2x^4e^{2x} - 4x^6 - 2x^4e^{2x} + 4x^6 = 0 \quad = \det J_f(x', y')$$

Die Funktion ist überall invertierbar ausser wenn $x' = y'$ oder $x' = 0$ oder $y' = 0$.

1c

Seite 20

Da die $\det J_f(1,0) = 0$ kann nicht Invertiert werden, denn es gilt: $J_{f^{-1}}(f(x_0)) = \left(J_f(x_0)\right)^{-1}$ und weiters gilt

$$\det(J_f^{-1}) = \det(J_f)^{-1} = \frac{1}{\det(J_f)}$$

und da $\det(1,0) = 0$ ist das Inverse ungültig

(2a) Tangentialabbildung Seite 17, 18

$$g(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)$$

$$g(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\left(\begin{pmatrix} \cancel{x_0} \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\nabla f(x,y) = (2xy^3 \, , \, 3x^2y^2)$$

$$g(1,-1) = f(1,-1) + \nabla f(1,-1)\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$$

$$= 1^2 \cdot (-1)^3 - 1 \quad + (-2, 3)\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$$

$$= -2 + (-2x+2) + 3y+3$$

$$= -2x + 3y + 3$$

(2b)

$$-2x + 3y + 3 - z = 0$$

$$z = -2x + 3y + 3$$

2c $\boxed{S35}$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x_0 - x_0 \\ y - y_0\end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}^t \nabla^2 f(x,y) \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0\end{pmatrix} + R$$

$$f(1,-1) \approx -2 + (-2,3)\begin{pmatrix}x-1\\y+1\end{pmatrix} + \frac{1}{2} (x-1,\ y+1)\begin{pmatrix}-2 & 6\\ 6 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y+1\end{pmatrix}$$

$$\approx -2 \quad -2x+2+3y+3 + \frac{1}{2}\left(-2x+2+6y+6,\ 6x-6-6y-6\right)\begin{pmatrix}x-1\\y+1\end{pmatrix}$$

$$\approx -2x+3y+3 + \frac{1}{2}\left(-2x^2+2x+6xy-6y+8x-8+6xy+6x-6y^2-6y-12y-12\right.$$

$$\approx \quad -\text{''} \quad + \frac{1}{2}\left(-2x^2-6y^2+16x-24y+12xy-20\right)$$

$$\approx -x^2-3y^2+6x-9y+6xy-7$$

$$\nabla f(x,y) = (2xy^3,\ 3x^2y^2)$$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^3 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6x^2y \end{pmatrix}$$

2d $\boxed{\text{Seite } 16}$

$$a = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$$

$$\nabla f(1,-2) = (-16,\ 12)$$

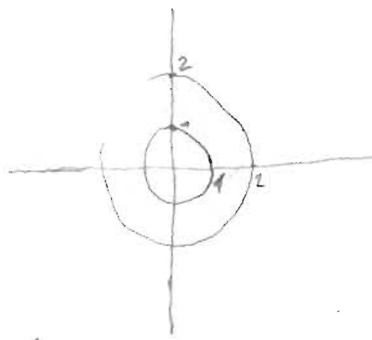
$$\|\nabla f(x_0)\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-16)^2+12^2} \quad \sqrt{256+144} = \underline{20}$$

$$a = \frac{(-16,12)}{20} = (-0{,}8,\ 0{,}6)$$

3a) Seite 50 gleiches Bsp

$B = \{(x,y) \in R^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

a) Skizze



b) $\int_B 1 \, dx \, dy$

Koordinatentransformation

$g: (r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ mit $x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$g(r,\varphi) = (x,y)$

$r^2 = x^2 + y^2 \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$

$M = \{(r,\varphi) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ ($\sqrt{4}$)

falsch, sollte pi/2 statt 2pi sein, weil x>=0 und y>=0 --> im einheitskreis im 1. quadranten; 2pi wäre der ganze kreis

$$\int_0^{2\pi}\int_1^2 1 \cdot r \, dr \, d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Big|_1^2 \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{4}{2} - \frac{1}{2} \, d\varphi = \frac{3}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\cdot 2\pi$$

$= 3\pi$

Maple:

```
>int(int(r,r=1..2),phi=0..2*PI);
```
✓

3c) Grenzen wie in 3a siehe 3b), auch hier pi/2 statt 2pi

$$\int_0^{2\pi}\int_1^2 r\cdot\cos\varphi\cdot r\cdot\sin\varphi\cdot r \, dr\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^2 r^3\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi \, dr\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4}\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi \Big|_1^2 \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} 4\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi - \frac{1}{4}\cos\varphi\cdot\sin\varphi \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} 3\tfrac{3}{4}\cos\varphi\cdot\sin\varphi \, d\varphi$$

$$= 3\tfrac{3}{4}\ \frac{1}{2}\cdot\sin\varphi \Big|_0^{2\pi}$$

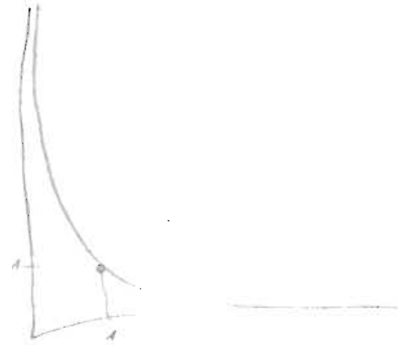
$$= \frac{15}{8}\cdot\sin(2\pi)^2$$

$$= \frac{15}{8}\cdot 0 = 0$$

④ S 56

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

a)



$$\| f(x) - f(y) \| \leq q \, \| x - y \|$$

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right\| \leq q \, \| x - y \|$$

?

$]1, \infty[$ bestimmt, da wenn $a > 1$, dann ist immer ein q möglich, da sie die Variable klein wird.

stimmt vielleicht nicht

S ~~55~~

4b

(i) $f(x^*) = \frac{1}{\sqrt{x^*}} = x^*$

$= \frac{1}{\sqrt{x^*}} - x^* = 0$

$x^* = 1$

(ii) Startwert = 2

$f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} = x_0$

$x_0 = 2$

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x_2 = \frac{1}{\sqrt{x_1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}} = 1{,}189$

c

(i) $f(x) - x = \frac{1}{\sqrt{x}} - x = 0$

(ii)

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - x = 0$

$g(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - x = x^{-\frac{1}{2}} - x$

$g'(x) = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} - 1$

$x_0 = 2$

$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = 2 - \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - 2}{-\frac{1}{2} 2^{-\frac{3}{2}} - 1} = 0{,}9$

$x_2 = 0{,}9 - \frac{\frac{1}{\sqrt{0{,}9}} - 0{,}9}{-\frac{1}{2} 0{,}9^{-\frac{3}{2}} - 1} = 0{,}997$