# Mathematik 1 für InformatikerInnen

**Gutjahr / Cenker**

18. Mai 2004

1. Sei $A = \{0, 1\}$ und $W = \{w \in A^* \mid w \text{ besteht aus höchstens 3 Zeichen}\}$.
   Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm folgender Halbordnung $R$ auf $W$:
   $w_1 R w_2$ genau dann, wenn es Wörter $w, w' \in A^*$ gibt, sodass $w_2 = w w_1 w'$.

2. Gegeben sind die Folgen

$$a_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n, \qquad b_n = n \cdot a_n \quad \text{und} \quad c_n = \begin{cases} a_n & n \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots$$

   Berechnen Sie die erzeugenden Funktionen dieser drei Folgen, vereinfachen Sie diese, soweit es geht!

3. Gegeben seien folgende Matrizen:

$$F = (\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}) \qquad G = (\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) \qquad H = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix})$$

   Diese Matrizen definieren lineare Abbildungen $f(x) = Fx$, $g(x) = Gx$ und $h = Hx$.

   (a) Was ist jeweils die Dimension der Definitions- und Wertemengen dieser Abbildungen?

   (b) Welche Verknüpfungen $s(x) \circ t(x)$ können gebildet werden, wobei die Funktionen $s(x)$ und $t(x)$ jeweils durch die Funktionen $f$, $g$ und $h$ belegt werden können? ($g \circ g$ wäre eine solche Belegung, insgesamt gibt es 9 Möglichkeiten).

   (c) Welche der Abbildungen $f$, $g$ und $h$ sind bijektiv, welche nicht und warum/warum nicht?

4. Gegeben sind die vier Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lesen Sie die Aufgabenstellung zuerst durch und beginnen Sie dann in einer geeigneten Reihenfolge.

(a) Sind $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ linear abhängig?

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A$, die aus diesen vier Vektoren gebildet wird, d. h. $A = (a_1\, a_2\, a_3\, a_4)$, nur mit Hilfe des Entwicklungssatzes!

(c) Welche Eigenschaften lassen sich daraus für das/ein lineare/s Gleichungssystem $Ax = b$ ableiten, wenn $b$ ein beliebiger, aber konstanter vierdimensionaler Vektor sein kann?

(d) Berechnen Sie die Determinante der zu $A$ inversen Matrix!

(e) Welche Eigenschaften lassen sich für die durch die Matrix $A$ gegebene lineare Abbildung $f(x) = Ax$ ableiten? Wie muss insbesondere das Argument $x$ der Funktion aussehen?