Mathematik 1 für InformatikerInnen

Gutjahr / Cenker

16. Dezember 2003

1. Sei $A = \{0, 1\}$ und $W = \{w \in A^* \mid w \text{ besteht aus höchstens 3 Zeichen}\}$.
   Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm folgender Halbordnung R auf W:
   $w_1 R w_2$ genau dann, wenn es Wörter $w, w' \in A^*$ gibt, sodass $w_2 = w w_1 w'$.

2. Gegeben sind die Folgen

$$a_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n, \qquad b_n = n \cdot a_n \quad \text{und} \quad c_n = \begin{cases} a_n & n \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots$$

   Berechnen Sie die erzeugenden Funktionen dieser drei Folgen, vereinfachen Sie diese, soweit es geht!

3. Gegeben seien folgende lineare Abbildungen:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} \\ g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \\ h\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ 2x_1 - x_2 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Bilden Sie, wenn möglich, die folgenden Verknüpfungen und berechnen Sie deren Umkehrabbildung in Matrixschreibweise.

   (a) $f \circ g$
   (b) $h \circ h$
   (c) $g \circ h \circ f$
   (d) $f \circ h \circ g$

   Hinweis: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

4. Gegeben sind die vier Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad a_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A, die aus diesen vier Vektoren gebildet wird, d. h. $A = (a_1\, a_2\, a_3\, a_4)$, nur mit Hilfe des Entwicklungssatzes!

(b) Sind a_1, a_2, a_3, a_4 linear abhängig?

(c) Welche Eigenschaften lassen sich für die durch die Matrix A gegebene lineare Abbildung $f(x) = Ax$ ableiten? Wie muss insbesondere das Argument x der Funktion aussehen?

(d) Welche Eigenschaften lassen sich daraus für das/ein lineare/s Gleichungssystem $Ax = b$ ableiten, wenn b ein beliebiger, aber konstanter vierdimensionaler Vektor sein kann?