Mehrere Mengen

geg: Universum M und Menge A in M

daraus folgt die charakteristische Funktion: $\chi_A(x)$
außerdem $\chi_M(x) = 1 \ \forall\ x \in M \Rightarrow$ trivial: $\chi_A(x) \leq \chi_M(x) \ \forall\ x \in M$ (daher ist A entweder 0 oder 1)

1. Die Teilmenge

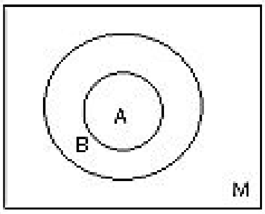
geg.: Zwei Mengen A und B (in M). A ist Teil von B
$\Rightarrow$ A ist Teilmenge von B (da wir von Mengen sprechen bzw. unter der Annahme, dass sowohl A, B als auch M Mengen sind)
$\chi_A(x) \leq \chi_B(x) \ \forall\ x \in M$
$A \subseteq B$
Daraus folgt $x \in A \Rightarrow x \in B$
Das bedeutet aber natürlich nicht, dass auch $x \in B \Rightarrow x \in A$

Zeichenerklärung:

$\subseteq$… "Teilmenge von"

$\Rightarrow$… "impiziert"

symbolisch



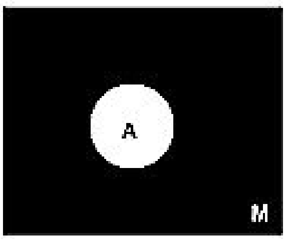
… VENN - Diagramme

kurz: $\chi_A \leq \chi_B$
daher:
- haben einen gemeinsamen Definitionsbereich
- für jedes Element ist der Funktionswert $\chi_A \leq \chi_B$

2. Das Komplement

man kann natürlich auch mit Mengen rechnen.
$\chi_A(x) - \chi_B(x) = 0$, wenn $\chi_A(x) = 1$ bzw.
$\chi_A(x) - \chi_B(x) = 1$, wenn $\chi_A(x) = 0$

symbolisch:



… dies nennt man Komplement von A (in M)

man schreibt $C_M(A)$ bzw. $C(A)$ bzw. $\overline{A}$

Anmerkung: manchmal schreibt man das Universum dazu; man kann es aber weglassen, wenn es länger gleichbleibt

Frage: Was gilt denn nun hier?
gilt $A \subseteq \overline{A}$, oder gilt $A \not\subseteq \overline{A}$?

Antwort: es muss nicht sein, dass nur $A \not\subseteq \overline{A}$ gilt, da ja
$A = \emptyset \Rightarrow A \subseteq \overline{A}$;-)
und nur wenn $A \neq \emptyset \Rightarrow A \not\subseteq \overline{A}$

charackteristische Funktion daher:
$\chi_{\overline{A}} = \chi_M - \chi_A = 1 - \chi_A = 1_{(M)} - \chi_A$

Anmerkung: $1_{(M)}$ … 1 auf konstanten Funktionsbereich M

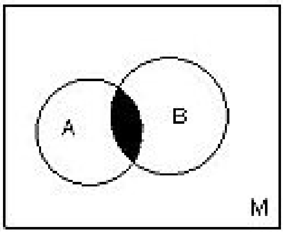
man kann aber auch schreiben:
$\overline{A} = \{(x \mid x \in M) \wedge (x \notin A)\}$
$\overline{A} = \{(x \mid x \in M)\ \&\ (x \notin A)\}$

Anmerkung: &… "et"=$\wedge$

3. Der Durchschnitt

geg.: Mengen A und B und das Universum M

symbolisch:



$A \cap B = \{x \mid x \in A\ \&\ x \in B\}$ bzw. $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

$\chi_{A \cap B} = 1 \Leftrightarrow \chi_A(x) = 1\ \&\ \chi_B(x) = 1$
$\chi_{A \cap B} = \chi_A(x) \bullet \chi_B(x)$

$\chi_{A \cap B} = \min(\chi_A(x), \chi_B(x))$

$\chi_A(x) \bullet \chi_B(x) \Rightarrow$ Regel: $A \cap B = B \cap A$ (da ja die Reihenfolge bei einem Produkt egal ist)

und weil's so schön war noch einmal in einer Zeile:
$\chi_{A \cap B} = \chi_A(x) \bullet \chi_B(x) = \min(\chi_A(x), \chi_B(x))$

4. Die Vereinigung

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ od. } x \in B\}$ bzw.
$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

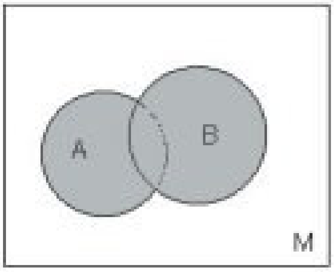
Anmerkung: Prof. Baron zieht es vor statt $\vee$ ein $\curlyvee$ zu schreiben, da es sonst zu sehr dem Buchstaben ähneln würde;
z.B.: $u = v \vee v = w$ stattdessen: $u = v \curlyvee v = w$

Problem bei der ganzen Sache ist aber, dass es zwei verschiedene Arten von "oder's" gibt:

a. Das einschließende 'oder' ($x \in A$ oder $x \in B$ oder von beidem; siehe lat. 'vel')
b. Das ausschließende 'oder' ($x \in A$ oder $x \in B$ aber nicht von beidem; siehe lat. 'aut')

ad a) Mit einschließendem 'oder'

symbolisch:



dazugehörige Funktion:
$\chi_{A \cup B}(x) = \max(\chi_A(x), \chi_B(x))$
$\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x)$ (Problem: könnte aber 2 ergeben!)

daher andere Schreibweisen:
$[\chi_{A \cup B}(x) = -\chi_A(x) \bullet \chi_B(x)]$ bzw.
$\chi_{A \cup B}(x) = -\chi_A(x) \dot{+} \chi_B(x)$ bzw.
$\chi_{A \cup B}(x) = \min(1, \chi_A(x) + \chi_B(x))$

Anmerkung: erste Möglichkeit ist eingeklammert, da zweite besser;
$\dot{+}$… eingeschränkte/beschränkte Summe

Rechentabelle:

+	0	1
0	0	1
1	1	1

$1 - \chi_{A \cup B} = 1 - \chi_A - \chi_B + \chi_A \bullet \chi_B$
$= (1 - \chi_A)(1 - \chi_B)$
$\chi_{\overline{A \cup B}} = \chi_{\overline{A}} \bullet \chi_{\overline{B}} = \chi_{\overline{A} \cap \overline{B}}$

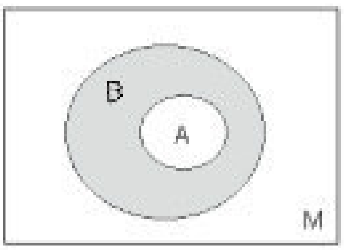
$\Rightarrow$ Eine der DE MORGAN'schen Regeln: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
$\overline{\overline{A}} = A$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

ad b) Mit ausschließendem 'oder'

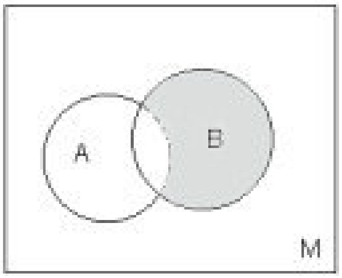
geg.: $A \subseteq B$ bzw. $C_B(A)$ bzw. $\chi_B - \chi_A$

symbolisch:



$B - A$, nur wenn $A \subseteq B$

sonst

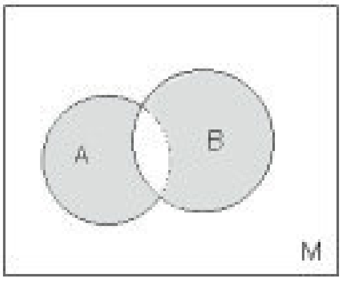


$\chi_B \dot{-} \chi_A = \{x \mid x \in B \,\&\, x \notin A\} = B \dot{-} A = B \setminus A$

$B \setminus A = A \setminus B$, wenn beide $\varnothing$

$(B \setminus A) \bigcup (A - B) = A \bigcup B - A \bigcap B = \{x \mid x \in A \text{ aut } x \in B\}$

symbolisch:



$A \triangle B$

<u>Anmerkung</u>: $\triangle$ … symetrische Differenz; entspricht dem aut

mod 2	0	1
0	0	1
1	1	0