Theoretische Informatik 2 – Übungsblatt 12 mit Musterlösungen

(LV-Nr.: 185.183, 185.231, WS 2004/2005)

Thema: Berechenbarkeit – Zusatzbeispiele

Übung 12.1 *Sei* $\mathrm{REK}_1 = \{f \mid f \in \mathrm{REK},\ (\exists n) f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}\}$ *(die Menge aller rekursiven Funktionen mit 1-stelligem Wertebereich). Sei* Ω *der folgende Operator auf* REK_1*: Ist* $f \in \mathrm{REK}_1^n$ *und* $x \in \mathbb{N}^n$ *so gilt*

$$\Omega(f)(x) = f(x)^{f(x)}.$$

Zeigen Sie, dass $\Omega(f)$ *mittels der Operatoren* $BO \cup \{\mathrm{Pr}\}$ *und der Funktionen* $BF \cup \{+, *, \dot{-}, f\}$ *ausgedrückt werden kann.*

Lösung: Es gilt

$$\Omega(f)(x) = (\exp \circ \Delta_2^1 \circ f)(x)$$

also

$$\Omega(f) = \exp \circ (\Delta_2^1 \circ f).$$

Da $\circ \in BO$ und $\Delta_2^1 \in BF$ liegt, so genügt es, exp auszudrücken. Nach Skriptum Seite 93 ist aber

$$\exp = \mathrm{Pr}(C_1^1, E(mal; I_1^3, I_3^3)).$$

Damit ist aber

$$\Omega(f) = \mathrm{Pr}(C_1^1, E(mal; I_1^3, I_3^3)) \circ (\Delta_2^1 \circ f)$$

der gesuchte Ausdruck (alle Funktionen sind in $BF \cup \{+, *, \dot{-}, f\}$).

Übung 12.2 *Sei* $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *definiert als*

$$g(x) \quad = \quad \min\{k \mid x + k > 2^x\}.$$

Beweisen Sie, dass g *primitiv rekursiv ist.*

Lösung: Da $\mathrm{PR} = cl_{\mathrm{Pr}}(BF \cup \{S\})$ gilt (Skriptum Seite 95), so müssen wir g mittels $\mathrm{Pr}, \times, E, \circ$ aus den Basisfunktionen repräsentieren.
Nun gilt aber

$$g(x) = \min\{k \mid x + k > 2^x\} = (2^x \dot{-} x) + 1\ ,$$

und daher auch

$$\begin{aligned}
g &= S \circ E(minus; \exp_2, I^1) \text{ für} \\
\exp_2(0) &= 1, \\
\exp_2(n+1) &= \exp_2(n) + \exp_2(n) = (plus \circ (\Delta_2^1 \circ I_2^2))(n, \exp_2(n)), \text{ i.e.} \\
\exp_2 &= \mathrm{Pr}(1, plus \circ (\Delta_2^1 \circ I_2^2)).
\end{aligned}$$

Daher sind alle Operatoren in der Darstellung von g in $BO \cup \{\mathrm{Pr}\}$ und alle Funktionen in $BF \cup \{S, \dot{-}, +\}$. Formal wäre noch zu zeigen, dass $+$ und $\dot{-}$ primitiv rekursiv sind (siehe Skriptum).

Übung 12.3 *Seien $A \subseteq \mathbb{N}^k$ und $B \subseteq N^l$ für $k, l \geq 1$. Wir definieren $A \leq_m B$ wenn es eine rekursive Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^l$ gibt mit*

$$x \in A \Longleftrightarrow f(x) \in B$$

für alle $x \in A$. Beweisen Sie:

(a) $\leq_m$ ist reflexiv.

(b) $\leq_m$ ist transitiv.

(c) Wenn $A \leq_m B$, und B rekursiv aufzählbar ist dann ist auch A rekursiv aufzählbar.

Lösung: (a) $A \leq_m A$ gilt weil die Funktion I^k rekursiv ist.

(b) Gelte $A \leq_m B$ und $B \leq_m C$, also

$$\begin{aligned} &x \in A \Longleftrightarrow f(x) \in B \text{ und} \\ &y \in B \Longleftrightarrow g(y) \in C \text{ für } f, g \in \text{REK. Dann gilt auch} \\ &x \in A \Longleftrightarrow g(f(x)) \in C. \end{aligned}$$

Aber $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ und mit $f, g \in$ REK ist auch $g \circ f \in$ REK. Somit also $A \leq_m C$.

(c) Angenommen $x \in A \Longleftrightarrow f(x) \in B$ für ein $f \in$ REK und $B = D(g)$ für ein $g \in$ PREK. Dann gilt

$$x \in A \Longleftrightarrow f(x) \in D(g) \Longleftrightarrow x \in D(g \circ f).$$

Und damit $A = D(g \circ f)$. Aber $f, g \in$ PREK und daher $g \circ f \in$ PREK. D.h. A ist rekursiv aufzählbar.