Theoretische Informatik 2 – Übungsblatt 2 mit Musterlösungen

(LV-Nr.: 185.183, 185.231, WS 2004/2005)

Thema: Deduktion 2 – LK und Normalform-Transformation

Übung 2.1 *Beweisen Sie das Sequent*

$$P(a,a), (\forall x)(\forall y)(P(x,y) \supset P(y,f(x))) \vdash P(f(a),f(a))$$

im LK.

Lösung:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\psi(P(a,a),P(a,f(a)),P(f(a),f(a)))\\ P(a,a),P(a,a)\supset P(a,f(a)),P(a,f(a))\supset P(f(a),f(a))\vdash P(f(a),f(a))\end{array}}{P(a,a),P(a,a)\supset P(a,f(a)),Y,P(a,f(a))\supset P(f(a),f(a))\vdash P(f(a),f(a))}\,Al}{P(a,a),P(a,a)\supset P(a,f(a)),X,Y,P(a,f(a))\supset P(f(a),f(a))\vdash P(f(a),f(a))}\,Al}{P(a,a),P(a,a)\supset P(a,f(a)),X,Y\vdash P(f(a),f(a))}\,\forall l}{P(a,a),(\forall y)(P(a,y)\supset P(y,f(a))),X\vdash P(f(a),f(a))}\,\forall l}{P(a,a),(\forall x)(\forall y)(P(x,y)\supset P(y,f(x)))\vdash P(f(a),f(a))}\,\forall l$$

Mit $X = (\forall x)(\forall y)(P(x,y) \supset P(y,f(x)))$ und $Y = (\forall y)(P(a,y) \supset P(y,f(a)))$.
Außerdem gilt $\psi(X_1, X_2, X_3) =$

$$\dfrac{\dfrac{X_1 \vdash X_3, X_1, X_2 \quad X_3, X_1 \vdash X_3, X_1}{X_1, X_2 \supset X_3 \vdash X_3, X_1}\supset l \quad \dfrac{X_2, X_1 \vdash X_3, X_2 \quad X_3, X_2, X_1 \vdash X_3}{X_2, X_1, X_2 \supset X_3 \vdash X_3}\supset l}{X_1, X_1 \supset X_2, X_2 \supset X_3 \vdash X_3}\supset l$$

Übung 2.2 *Geben Sie einen* LK-*Beweis der Formel*

$$(\exists y)(\forall x)(P(y) \supset P(x))$$

an.

Lösung:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(a),P(x_1)\vdash P(x_1),P(x_2),X}{P(a)\vdash P(x_1),P(x_1)\supset P(x_2),X}\supset r}{\vdash P(a)\supset P(x_1),P(x_1)\supset P(x_2),X}\supset r}{\vdash P(a)\supset P(x_1),(\forall x)(P(x_1)\supset P(x)),X}\,\forall l}{\vdash P(a)\supset P(x_1),X}\,\exists r}{\vdash (\forall x)(P(a)\supset P(x)),X}\,\forall l}{\vdash (\exists y)(\forall x)(P(y)\supset P(x))}\,\exists r$$

Mit $X = (\exists y)(\forall x)(P(y) \supset P(x))$.

Übung 2.3 *Konstruieren Sie eine Skolemform der Formel*

$$\neg((\forall x)(\exists y)(\forall z)(P(x,y) \wedge Q(x,z)) \supset ((\exists y)P(a,y) \wedge (\forall z)Q(a,z))).$$

Lösung: 1. Schritt: Umbenennung der Variablen:

$$\neg((\forall x)(\exists y)(\forall z)(P(x,y) \wedge Q(x,z)) \supset ((\exists u)P(a,u) \wedge (\forall v)Q(a,v))).$$

2. Schritt: Transformation in Normalform 1:

$$\begin{aligned}
&\neg((\forall x)(\exists y)(\forall z)(P(x,y) \wedge Q(x,z)) \supset ((\exists u)P(a,u) \wedge (\forall v)Q(a,v))) \;\Rightarrow_{T1}\\
&\neg(\neg(\forall x)(\exists y)(\forall z)(P(x,y) \wedge Q(x,z)) \vee ((\exists u)P(a,u) \wedge (\forall v)Q(a,v)) \;\Rightarrow_{T3}\\
&\neg\neg(\forall x)(\exists y)(\forall z)(P(x,y) \wedge Q(x,z)) \wedge \neg((\exists u)P(a,u) \wedge (\forall v)Q(a,v)) \;\Rightarrow_{T4}\\
&(\forall x)(\exists y)(\forall z)(P(x,y) \wedge Q(x,z)) \wedge \neg((\exists u)P(a,u) \wedge (\forall v)Q(a,v)) \;\Rightarrow_{T2}\\
&(\forall x)(\exists y)(\forall z)(P(x,y) \wedge Q(x,z)) \wedge (\neg(\exists u)P(a,u) \vee \neg(\forall v)Q(a,v)) \;\Rightarrow_{T6}\\
&(\forall x)(\exists y)(\forall z)(P(x,y) \wedge Q(x,z)) \wedge ((\forall u)\neg P(a,u) \vee \neg(\forall v)Q(a,v)) \;\Rightarrow_{T5}\\
&(\forall x)(\exists y)(\forall z)(P(x,y) \wedge Q(x,z)) \wedge ((\forall u)\neg P(a,u) \vee (\exists v)\neg Q(a,v))
\end{aligned}$$

3. Schritt: Elimination der Existenzquantoren:

$$\begin{aligned}
&(\forall x)(\exists y)(\forall z)(P(x,y) \wedge Q(x,z)) \wedge ((\forall u)\neg P(a,u) \vee (\exists v)\neg Q(a,v)) \;\Rightarrow\\
&(\forall x)(\forall z)(P(x,f(x)) \wedge Q(x,z)) \wedge ((\forall u)\neg P(a,u) \vee (\exists v)\neg Q(a,v)) \;\Rightarrow\\
&(\forall x)(\forall z)(P(x,f(x)) \wedge Q(x,z)) \wedge ((\forall u)\neg P(a,u) \vee \neg Q(a,b)).
\end{aligned}$$

Die letzte Formel ist die Skolemform von

$$\neg((\forall x)(\exists y)(\forall z)(P(x,y) \wedge Q(x,z)) \supset ((\exists y)P(a,y) \wedge (\forall z)Q(a,z))).$$

Übung 2.4 *Berechnen Sie eine Klauselform der Formel*

$$\neg((\forall x)(\exists y)(P(x,y) \wedge \neg Q(x,y)) \vee (\exists x)(\forall y)(P(x,y) \supset Q(x,y))).$$

Lösung: 1. Schritt: Umbenennung der Variablen:

$$\neg((\forall x)(\exists y)(P(x,y) \wedge \neg Q(x,y)) \vee (\exists u)(\forall v)(P(u,v) \supset Q(u,v))).$$

2. Schritt: Transformation in Normalform 1:

$$\begin{array}{l}
\neg((\forall x)(\exists y)(P(x,y) \wedge \neg Q(x,y)) \vee (\exists u)(\forall v)(P(u,v) \supset Q(u,v))) \ \Rightarrow_{T2} \\
\neg(\forall x)(\exists y)(P(x,y) \wedge \neg Q(x,y)) \wedge \neg(\exists u)(\forall v)(P(u,v) \supset Q(u,v)) \ \Rightarrow_{T5} \\
(\exists x)\neg(\exists y)(P(x,y) \wedge \neg Q(x,y)) \wedge \neg(\exists u)(\forall v)(P(u,v) \supset Q(u,v)) \ \Rightarrow_{T6} \\
(\exists x)(\forall y)\neg(P(x,y) \wedge \neg Q(x,y)) \wedge \neg(\exists u)(\forall v)(P(u,v) \supset Q(u,v)) \ \Rightarrow_{T2} \\
(\exists x)(\forall y)(\neg P(x,y) \vee \neg\neg Q(x,y)) \wedge \neg(\exists u)(\forall v)(P(u,v) \supset Q(u,v)) \ \Rightarrow_{T4} \\
(\exists x)(\forall y)(\neg P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge \neg(\exists u)(\forall v)(P(u,v) \supset Q(u,v)) \ \Rightarrow_{T6} \\
(\exists x)(\forall y)(\neg P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge (\forall u)\neg(\forall v)(P(u,v) \supset Q(u,v)) \ \Rightarrow_{T5} \\
(\exists x)(\forall y)(\neg P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge (\forall u)(\exists v)\neg(P(u,v) \supset Q(u,v)) \ \Rightarrow_{T7} \\
(\exists x)(\forall y)(\neg P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge (\forall u)(\exists v)(P(u,v) \wedge \neg Q(u,v)).
\end{array}$$

Mit (T7):

$$\frac{\neg(X \supset Y)}{X \wedge \neg Y}$$

wobei (T7) durch (T1), (T3) und (T4) simulierbar ist:

$$\begin{array}{cl}
\neg(X \supset Y) & \\
\hline
\neg(\neg X \vee Y) & T1 \\
\hline
\neg\neg X \wedge \neg Y & T3 \\
\hline
X \wedge \neg Y & T4
\end{array}$$

2-malige $\exists$-Elimination auf der Normalform 1 ergibt die Skolemform

$$(\forall y)(\neg P(a,y) \vee Q(a,y)) \wedge (\forall u)(P(u,f(u)) \wedge \neg Q(u,f(u))).$$

Weglassen der Quantoren ergibt die Negationsnormalform

$$(\neg P(a,y) \vee Q(a,y)) \wedge (P(u,f(u)) \wedge \neg Q(u,f(u))).$$

Daraus ergibt sich die konjunktive Normalform

$$(\neg P(a,y) \vee Q(a,y)) \wedge P(u,f(u)) \wedge \neg Q(u,f(u)).$$

Die zugehörige Klauselform ist dann

$$\{P(a,y) \vdash Q(a,y); \ \ \vdash P(u,f(u)); \ \ Q(u,f(u)) \vdash\}.$$

Übung 2.5 *Berechnen Sie eine Klauselform der Formel*

$$\neg(\exists x)(P(x) \supset ((\exists y)Q(x,y) \supset (\forall z)R(x,z))).$$

Lösung: 1. Schritt: Normalform 1:

$$\begin{aligned}
&\neg(\exists x)(P(x) \supset ((\exists y)Q(x,y) \supset (\forall z)R(x,z))) \Rightarrow_{T6} \\
&(\forall x)\neg(P(x) \supset ((\exists y)Q(x,y) \supset (\forall z)R(x,z))) \Rightarrow_{T7} \\
&(\forall x)(P(x) \wedge \neg((\exists y)Q(x,y) \supset (\forall z)R(x,z))) \Rightarrow_{T7} \\
&(\forall x)(P(x) \wedge ((\exists y)Q(x,y) \wedge \neg(\forall z)R(x,z))) \Rightarrow_{T5} \\
&(\forall x)(P(x) \wedge ((\exists y)Q(x,y) \wedge (\exists z)\neg R(x,z))).
\end{aligned}$$

Mit (T7):

$$\frac{\neg(X \supset Y)}{X \wedge \neg Y}$$

wobei (T7) durch (T1), (T3) und (T4) simulierbar ist:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg(X \supset Y)}{\neg(\neg X \vee Y)}\,T1}{\neg\neg X \wedge \neg Y}\,T3}{X \wedge \neg Y}\,T4$$

Die Skolemform von

$$(\forall x)(P(x) \wedge ((\exists y)Q(x,y) \wedge (\exists z)\neg R(x,z)))$$

ist

$$(\forall x)(P(x) \wedge (Q(x,f(x)) \wedge \neg R(x,g(x)))).$$

und die Negationsnormalform

$$(P(x) \wedge (Q(x,f(x)) \wedge \neg R(x,g(x)))).$$

Die Formel ist (nach Weglassung überflüssiger Klammern bereits in KNF; die Klauselform ist daher

$$\{\vdash P(x);\quad \vdash Q(x,f(x));\quad R(x,g(x)) \vdash\}.$$