Theoretische Informatik 2 – Übungsblatt 7 mit Musterlösungen

(LV-Nr.: 185.183, 185.231, WS 2004/2005)

Thema: Formale Aspekte von Progr.spr. 3 – Denotationale Semantik

Übung 7.1 *Zeigen Sie, daß die Definiertheitsordnung* $(\mathsf{State} \hookrightarrow \mathsf{State}, \sqsubseteq)$ ***kein*** *vollständiger Verband ist.*

Lösung: Es genügt zu zeigen, daß es bzgl. $\sqsubseteq$ 'widersprüchliche' Elemente von $(\mathsf{State} \hookrightarrow \mathsf{State})$ gibt, d.h. solche die keine gemeinsame obere Schranke besitzen. Dann kann es offensichtlich auch keine kleinste obere Schranke für diese Elemente geben, folglich ist $(\mathsf{State} \hookrightarrow \mathsf{State}, \sqsubseteq)$ kein vollständiger Verband.

Wir geben zwei konkrete solche partielle Funktionen an (die sogar total sind), nämlich g_1 und g_2, definiert durch

$$g_1\ s = s[x \mapsto 1]$$

und

$$g_2\ s = s[x \mapsto 2]\ .$$

Diese beiden Funktionen sind widersprüchlich in dem Sinne, daß sie keine gemeinsame obere Schanke haben. Denn wäre g eine solche obere Schranke, so müßte gelten: $g_1 \sqsubseteq g$ und $g_2 \sqsubseteq g$, also

$$(g_1\ s)\ x = (g\ s)\ x = (g_2\ s)\ x$$

für alle x. Nach Definition von g_1, g_2 gilt aber

$$(g_1\ s)\ x = 1 \neq 2 = (g_2\ s)\ x\ ,$$

was im Widerspruch dazu steht. Also besitzt $\{g_1, g_2\}$ keine obere Schranke.

Eine andere mögliche Wahl von (echt partiellen, aber widersprüchlichen) Funktionen) g_1 und g_2 wäre z.B.

$$g_1\ s = \begin{cases} s[x \mapsto 0], & \text{falls } s\ x \leq 1 \\ \mathsf{undef}, & \text{falls } s\ x > 1 \end{cases}$$

und

$$g_2\ s = \begin{cases} s[x \mapsto 3], & \text{falls } s\ x \geq 1 \\ \mathsf{undef}, & \text{falls } s\ x < 1 \end{cases}$$

Hier sind g_1 und g_2 widersprüchlich, weil für s mit $s\ x = 1$ gilt: $(g_1\ s)\ x = 0 \neq 3 = (g_2\ s)\ x$. (Man beachte: Bei diesem Beispiel ergibt sich lediglich für s mit $s\ x = 1$ eine Widersprüchlichkeit. Für alle anderen Zustände s hingegen sind $g_1\ s$ und $g_2\ s$ miteinander bzgl. Definiertheit vergleichbar!)

Übung 7.2 *Beweisen Sie die folgende Eigenschaft ("Stetigkeit ohne Monotonie' impliziert Monotonie", siehe Lemma 3.3.2, Skriptum S. 82):*

> *Seien $(D, \sqsubseteq)$, $(D', \sqsubseteq')$ ccpo's und $f : D \to D'$ eine (totale) Funktion mit $\bigsqcup'\{f\ d \mid d \in Y\} = f(\bigsqcup Y)$ für alle nicht-leeren Ketten Y von D. Dann ist f monoton.*

Lösung: Wir haben zu zeigen: Für beliebige $d_1, d_2 \in D$ gilt

$$d_1 \sqsubseteq d_2 \quad \Rightarrow \quad f\ d_1 \sqsubseteq' f\ d_2\ .$$

Seien also $d_1, d_2 \in D$ gegeben mit $d_1 \sqsubseteq d_2$. Wir betrachten nun $Y = \{d_1, d_2\} \subseteq D$. Wegen $d_1 \sqsubseteq d_2$ ist Y eine (nicht-leere) Kette von D. Daher folgt mit der Voraussetzung des Lemmas

$$\bigsqcup{}'\{f\ d \mid d \in Y\} = \bigsqcup{}'\{f\ d_1, f\ d_2\} = f(\bigsqcup\{d_1, d_2\}) = f(\bigsqcup Y)\ ,$$

also wegen $d_1 \sqsubseteq d_2$ und folglich $\bigsqcup\{d_1, d_2\} = d_2$ auch

$$\bigsqcup{}'\{f\ d_1, f\ d_2\} = f\ d_2\ .$$

Dies wiederum impliziert nach Definition von *oberer Schranke* schließlich

$$f\ d_1 \sqsubseteq' f\ d_2\ ,$$

was zu beweisen war.

Übung 7.3 *Gegeben sei die übliche Partialordnung $(\mathbb{N}_m, \leq)$ auf dem Anfangsstück $N_m = \{0, 1, \ldots, m\}$ der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ für ein beliebiges, aber festes $m > 0$, sowie die Funktionen $f_1 \colon \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_m$, $f_2 \colon \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_m$, definiert durch*

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \textit{falls } x \leq 1,\ x \in \mathbb{N}_m \\ x - 1 & \textit{falls } x > 1,\ x \in \mathbb{N}_m \end{cases}$$

bzw.

$$f_2(x) = m - x\ .$$

Geben Sie an, ob f_i monoton ist, für $i = 1, 2$, und begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Lösung: f_1 ist monoton: Sei $x \leq y$, $x, y \in \mathbb{N}_m$. Falls $x, y \leq 1$, dann folgt $f(x) = 0 \leq 0 = f(y)$. Falls $x \leq 1$, $y > 1$, dann folgt $f(x) = 0 \leq y - 1 = f(y)$. Falls $x, y > 1$, so folgt (wegen $x \leq y$) $f(x) = x - 1 \leq y - 1 = f(y)$. Damit sind alle Fälle betrachtet, und die Monotonie von f_1 ist bewiesen.
f_2 ist hingegen nicht monoton: Es gilt zwar $0 \leq 1$, nicht aber $f_2(0) = m - 0 = m \leq m - 1 = f_2(1)$.

Übung 7.4 *Bestimmen Sie denotationale Semantik $\mathcal{S}_{ds}[\![P]\!]$ des folgenden Programms*

$$P \equiv y :=\ 1\ ;\ \mathsf{while}\ \neg(x = 1)\ \mathsf{do}\ (y :=\ y * x;\ x :=\ x - 1)$$

mittels Fixpunktberechnung. (nach Satz 3.3.3).

Lösung: Wir erhalten mit [$\mathsf{comp_{ds}}$], [$\mathsf{ass_{ds}}$] und [$\mathsf{while_{ds}}$]:

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{S}_{ds}[\![P]\!]s & = & \mathcal{S}_{ds}[\![\mathsf{while}\ \neg(x=1)\ \mathsf{do}\ (y := \ y*x;\ x := \ x-1)]\!](\mathcal{S}_{ds}[\![y := \ 1]\!]s) \\
 & = & \mathcal{S}_{ds}[\![\mathsf{while}\ \neg(x=1)\ \mathsf{do}\ (y := \ y*x;\ x := \ x-1)]\!](s[y \mapsto 1]) \\
 & = & (\mathsf{FIX}\ \ F)\ (s[y \mapsto 1])\ ,
\end{array}$$

wobei

$$\begin{array}{rcl}
(F\ g)\ s & = & \mathsf{cond}(\mathcal{B}[\![\neg(x=1)]\!]s, (g \circ \mathcal{S}_{ds}[\![y := \ y*x;\ x := \ x-1]\!])s), \mathsf{id}\ s) \\
 & = & \mathsf{cond}(s\ x \neq 1, g(\mathcal{S}_{ds}[\![x := \ x-1]\!](\mathcal{S}_{ds}[\![y := \ y*x]\!]s)), s) \\
 & = & \mathsf{cond}(s\ x \neq 1, g(\mathcal{S}_{ds}[\![x := \ x-1]\!]s[y \mapsto s\ y * s\ x]), s) \\
 & = & \mathsf{cond}(s\ x \neq 1, g\ s[y \mapsto s\ y * s\ x][x \mapsto s\ x - 1], s) \\
 & = & \begin{cases} g(s[y \mapsto (s\ y * s\ x)][x \mapsto (s\ x-1)]), & \text{falls } s\ x \neq 1 \\ s, & \text{falls } s\ x = 1 \end{cases}
\end{array}$$

Für die konkrete Fixpunktberechnung gemäß $\mathsf{FIX}\ \ f = \bigsqcup\{f^n\ \perp\ \mid\ n \geq 0\}$ berechnen wir sukzessive $F^0\perp$, $F^1\perp$, $F^2\perp$, $\ldots$, und schließen daraus auf $\mathsf{FIX}\ \ f$ wie folgt (derÜbersichtlichkeit wegen verwenden wir dabei die Abkürzungen $s' = s[y \mapsto (s\ \ y * s\ \ x)][x \mapsto (s\ \ x-1)]$ und $s'' = s'[y \mapsto (s'\ y * s'\ x)][x \mapsto (s'\ x - 1)]$):

$$(F^0\perp)\ s = \mathsf{undef} \qquad\qquad (\text{da } (F^0\perp)s = (\mathsf{id}\perp)s = \perp s)$$

$$(F^1\perp)\ s = \begin{cases} \perp s' & \text{falls } s\ x \neq 1 \\ s, & \text{falls } s\ x = 1 \end{cases} = \begin{cases} \mathsf{undef}, & \text{falls } s\ x \neq 1 \\ s, & \text{falls } s\ x = 1 \end{cases}$$

$$(\text{da } (F^1\perp)s = (F(F^0\perp))s = (F(\mathsf{id}\perp))s = (F\perp)s)$$

$$(F^2\perp)\ s = \begin{cases} (F^1\perp)s', & \text{falls } s\ x \neq 1 \\ s, & \text{falls } s\ x = 1 \end{cases} = \begin{cases} \mathsf{undef}, & \text{falls } s\ x \neq 1 \text{ und } s\ x \neq 2 \\ s', & \text{falls } s\ x = 2 \\ s, & \text{falls } s\ x = 1 \end{cases}$$

$$(\text{da } (F^2\perp)s = (F(F^1\perp))s \text{ und}^1$$

$$(F^1\perp)s' = \begin{cases} \mathsf{undef}, & \text{falls } s'\ x \neq 1 \\ s', & \text{falls } s'\ x = 1 \end{cases} = \begin{cases} \mathsf{undef}, & \text{falls } s\ x \neq 2 \\ s', & \text{falls } s\ x = 2 \end{cases}\ )$$

$$(F^3\perp)\ s = \begin{cases} (F^2\perp)s', & \text{falls } s\ x \neq 1 \\ s, & \text{falls } s\ x = 1 \end{cases} = \begin{cases} \mathsf{undef}, & \text{falls } s\ x \neq 1,\ s\ x \neq 2, \text{ und } s\ x \neq 3 \\ s'', & \text{falls } s\ x = 3 \\ s', & \text{falls } s\ x = 2 \\ s, & \text{falls } s\ x = 1 \end{cases}$$

$\ldots$

$$(F^n\perp)\ s = \begin{cases} \mathsf{undef}, & \text{falls } s\ x < 1 \text{ oder } s\ x > n \\ s[y \mapsto s\ y * s\ x * (s\ x-1) * (s\ x-2) * \ldots * 1][x \mapsto 1], & \text{falls } 1 \leq s\ x \leq n \end{cases}$$

$$(\mathsf{FIX}\ \ F)\ s = \begin{cases} \mathsf{undef}, & \text{falls } s\ x < 1 \\ s[y \mapsto (s\ y * \prod_{k=1}^{n} k)][x \mapsto 1], & \text{falls } n = s\ x \geq 1 \end{cases}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{S}_{ds}[\![P]\!]s & = & \mathcal{S}_{ds}[\![\mathsf{while}\ \neg(x=1)\ \mathsf{do}\ (y := \ y*x;\ x := \ x-1)]\!]\ (\mathcal{S}_{ds}[\![y := \ 1]\!]s) \\
 & = & (\mathsf{FIX}\ \ F)\ (s[y \mapsto 1]) \\
 & = & \begin{cases} \mathsf{undef}, & \text{falls } s\ x < 1 \\ s[y \mapsto \prod_{k=1}^{n} k][x \mapsto 1], & \text{falls } n = s\ x \geq 1 \end{cases}
\end{array}$$

[1] Man beachte: $s'x \neq 1$ gdw. $sx \neq 2$, da $s'x = s[y \mapsto (s\ y * s\ x)][x \mapsto (s\ x-1)]x = s\ x - 1$.

Übung 7.5 *Bestimmen Sie denotationale Semantik $\mathcal{S}_{ds}[\![P]\!]$ des folgenden Programms*

$$P \equiv \mathsf{while}\ \neg(x = y)\ \mathsf{do}\ x :=\ y$$

mittels Fixpunktberechnung (nach Satz 3.3.3).

Lösung: Wir erhalten mit [$\mathsf{while_{ds}}$]

$$\mathcal{S}_{ds}[\![\mathsf{while}\ \neg(x = y)\ \mathsf{do}\ x :=\ y]\!] = FIX\ F\ ,$$

wobei F gegeben ist durch

$$\begin{array}{rcl}(F\ g)\ s & = & \mathsf{cond}(\mathcal{B}[\![\neg(x = y)]\!]s, (g \circ \mathcal{S}_{ds}[\![x :=\ y]\!])s, \mathsf{id}\ s) \\ & = & \mathsf{cond}(s\ x \neq s\ y, g(\mathcal{S}_{ds}[\![x :=\ y]\!]s), s) \\ & = & \mathsf{cond}(s\ x \neq s\ y, g(s[x \mapsto s\ y]), s) \\ & = & \left\{\begin{array}{ll} g(s[x \mapsto s\ y], & \text{falls } s\ x \neq s\ y \\ s, & \text{falls } s\ x = s\ y \end{array}\right.\end{array}$$

Für die konkrete Fixpunktberechnung gemäß $\mathsf{FIX}\ \ f = \bigsqcup\{f^n\ \perp \mid n \geq 0\}$ berechnen wir sukzessive $F^0\perp$, $F^1\perp$, $F^2\perp$, $\ldots$, und schließen daraus auf $\mathsf{FIX}\ \ f$ wie folgt.

$$(F^0\perp)\ s = \mathsf{undef} \qquad\qquad (\text{da } (F^0\perp)s = (\mathsf{id}\perp)s = \perp s)$$

$$(F^1\perp)\ s = \left\{\begin{array}{ll} \perp s[x \mapsto s\ y], & \text{falls } s\ x \neq s\ y \\ s, & \text{falls } s\ x = s\ y \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{ll} \mathsf{undef}, & \text{falls } s\ x \neq s\ y \\ s, & \text{falls } s\ x = s\ y \end{array}\right.$$

$$\text{da } (F^1\perp)s = (F(F^0\perp))s = (F(\mathsf{id}\perp))s = (F\perp)s$$

$$\begin{array}{rcl}(F^2\perp)\ s & = & (F(F^1\perp))\ s \\ & = & \left\{\begin{array}{ll} (F^1\perp)s[x \mapsto s\ y], & \text{falls } s\ x \neq s\ y \\ s, & \text{falls } s\ x = s\ y \end{array}\right. \\ & = & \left\{\begin{array}{ll} \perp s[x \mapsto s\ y][x \mapsto s[x \mapsto s\ y]\ y], & \text{falls } s[x \mapsto s\ y]\ x \neq s[x \mapsto s\ y]\ y \text{ und } s\ x \neq s\ y \\ s[x \mapsto s\ y] & \text{falls } s[x \mapsto s\ y]\ x = s[x \mapsto s\ y]\ y \text{ und } s\ x \neq s\ y \\ s, & \text{falls } s\ x = s\ y \end{array}\right. \\ & = & \left\{\begin{array}{ll} s[x \mapsto s\ y] & \text{falls } s\ x \neq s\ y \\ s, & \text{falls } s\ x = s\ y \end{array}\right.\end{array}$$

da der 1. Fall oben wegen $s[x \mapsto s\ y]\ x = s\ y$, $s[x \mapsto s\ y]\ y = s\ y$ nicht auftreten kann

$$\begin{array}{rcl}(F^3\perp)\ s & = & (F(F^2\perp))\ s \\ & = & \left\{\begin{array}{ll} (F^2\perp)s[x \mapsto s\ y], & \text{falls } s\ x \neq s\ y \\ s, & \text{falls } s\ x = s\ y \end{array}\right. \\ & = & \left\{\begin{array}{ll} s[x \mapsto s\ y][x \mapsto (s[x \mapsto s\ y])\ y], & s[x \mapsto s\ y]\ x \neq s[x \mapsto s\ y]\ y \text{ und } s\ x \neq s\ y \\ s[x \mapsto s\ y], & s[x \mapsto s\ y]\ x = s[x \mapsto s\ y]\ y \text{ und } s\ x \neq s\ y \\ s, & \text{falls } s\ x = s\ y \end{array}\right. \\ & = & \left\{\begin{array}{ll} s[x \mapsto s\ y] & \text{falls } s\ x \neq s\ y \\ s, & \text{falls } s\ x = s\ y \end{array}\right.\end{array}$$

da der 1. Fall oben wegen $s[x \mapsto s\ y]\ x = s\ y$, $s[x \mapsto s\ y]\ y = s\ y$ nicht auftreten kann

Aus $F^3\perp = F^2\perp$ folgt aber $F^n\perp = F^2\perp$ für alle $n \geq 3$, daher auch $\mathsf{FIX}\ \ F = \bigsqcup\{F^n\perp \mid n \geq 0\} = F_2\perp$.