Theoretische Informatik 2 – Übungsblatt 3 mit Musterlösungen

(LV-Nr.: 185.183, 185.231, WS 2004/2005)

Thema: Deduktion 3 – Unifikation

Übung 3.1 *Bestimmen Sie einen allgemeinsten Unifikator der Atome*

$$P(x, f(x, y), z)), \ P(f(u, u), v, g(v, v)).$$

Lösung: 1. Schritt: erzeuge zugehöriges Gleichungssystem $\mathcal{E}$ mit

$$\mathcal{E} = \{x \doteq f(u, u), \ f(x, y) \doteq v, \ z \doteq g(v, v)\}.$$

Wende daraufhin die Regeln von $\mathcal{R}$ an bis Termination eintritt.

$$\begin{aligned}
&\{x \doteq f(u, u), \ f(x, y) \doteq v, \ z \doteq g(v, v)\} \text{ (eliminate) } \Rightarrow \\
&\{x \doteq f(u, u), \ f(f(u, u), y) \doteq v, \ z \doteq g(v, v)\} \text{ (orient) } \Rightarrow \\
&\{x \doteq f(u, u), \ v \doteq f(f(u, u), y), \ z \doteq g(v, v)\} \text{ (eliminate) } \Rightarrow \\
&\{x \doteq f(u, u), \ v \doteq f(f(u, u), y), \ z \doteq g(f(f(u, u), y), f(f(u, u), y))\}
\end{aligned}$$

Das letzte System ist in gelöster Form. Daher ist die Substitution

$$\{x \leftarrow f(u, u), \ v \leftarrow f(f(u, u), y), \ z \leftarrow g(f(f(u, u), y), f(f(u, u), y))\}$$

ein allgemeinster Unifikator.

Übung 3.2 *Beweisen Sie dass die Terme*

$$f(f(y, x), f(x, g(y))) \text{ und } f(f(u, u), f(u, u))$$

nicht unifizierbar sind.

Lösung: Wenn die Terme nicht unifizierbar sind so muss sich (wegen des Unifikationstheorems) bei Anwendung von $\mathcal{R}$ schließlich das System $\perp$ ergeben. Es genügt daher das System

$$\mathcal{E}\colon \ \{f(f(y, x), f(x, g(y))) \doteq f(f(u, u), f(u, u))\}$$

Mit $\mathcal{R}$ zu reduzieren und $\perp$ herzuleiten.

$$\begin{aligned}
&\{f(f(y, x), f(x, g(y))) \doteq f(f(u, u), f(u, u))\} \text{ (decompose)} \\
&\{f(y, x) \doteq f(u, u), \ f(x, g(y)) \doteq f(u, u)\} \text{ (decompose) } \Rightarrow \\
&\{y \doteq u, \ x \doteq u, \ f(x, g(y)) \doteq f(u, u)\} \text{ (decompose) } \Rightarrow \\
&\{y \doteq u, \ x \doteq u, \ g(y) \doteq u\} \text{ (orient) } \Rightarrow \\
&\{y \doteq u, \ x \doteq u, \ u \doteq g(y)\} \text{ (eliminate) } \Rightarrow \\
&\{y \doteq u, \ x \doteq u, \ u \doteq g(u)\} \text{ (occurs check) } \Rightarrow \\
&\perp
\end{aligned}$$

Übung 3.3 *Geben Sie alle variablenfreien Terme t über der Signatur $\Sigma\colon \{a, b, f\}$ an für welche die Menge $\{f(f(t)), \ f(f(f(x)))\}$ unifizierbar ist.*

Lösung: Die variablenfreien Terme T_0 über Σ sind

$$T_0 \quad = \quad \{f^n(a) \mid n \geq 0\} \cup \{f^n(b) \mid n \geq 0\}$$

Mit $f^0(t) = t$ und $f^{n+1}(t) = f(f^n(t))$.
Wir suchen daher alle $t \in T_0$ für welche das System

$$\mathcal{E}\colon\ \{f(f(t)) \doteq f(f(f(x)))\}$$

lösbar ist. Wir reduzieren $\mathcal{E}$ erst mit $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned}
&\{f(f(t)) \doteq f(f(f(x)))\} \text{ (decompose) } \Rightarrow\\
&\{f(t) \doteq f(f(x))\} \text{ (decompose) } \Rightarrow\\
&\{t \doteq f(x)\}.
\end{aligned}$$

Das System ist lösbar für alle $t \in T_0$ mit Ausnahme von a und b (hier tritt (clash) auf), d.h. $t \in T_0 - \{a, b\}$. Im Falle $t = f^{n+1}(a)$ ist der Unifikator $\{x \leftarrow f^n(a)\}$ (analog für $t = f^{n+1}(b)$).

Übung 3.4 *Bestimmen Sie einen Unifikator der Atome*

$$P(x, f(x), f(u)), \quad P(f(y), z, y)$$

welcher kein *allgemeinster Unifikator ist.*

Lösung:
1. Bestimme System und löse es:

$$\begin{aligned}
&\{x \doteq f(y),\ f(x) \doteq z,\ f(u) \doteq y\} \text{ (orient) } \Rightarrow\\
&\{x \doteq f(y),\ f(x) \doteq z,\ y \doteq f(u)\} \text{ (eliminate) } \Rightarrow\\
&\{x \doteq f(f(u)),\ f(x) \doteq z,\ y \doteq f(u)\} \text{ (eliminate) } \Rightarrow\\
&\{x \doteq f(f(u)),\ f(f(f(u))) \doteq z,\ y \doteq f(u)\} \text{ (orient) } \Rightarrow\\
&\{x \doteq f(f(u)),\ z \doteq f(f(f(u))),\ y \doteq f(u)\}.
\end{aligned}$$

Da das letzte System in gelöster Form ist, ist die Substitution

$$\sigma\colon\ \{x \leftarrow f(f(u)),\ z \leftarrow f(f(f(u))),\ y \leftarrow f(u)\}$$

ein A.U. Sei nun $\theta_n = \{u \leftarrow f^n(u)\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann sind für alle $n \geq 1$ die Substitutionen

$$\theta_n \circ \sigma$$

Unifikatoren welche *keine* allgemeinsten Unifikatoren sind.
Man beachte, dass

$$\theta_n \circ \sigma = \{x \leftarrow f^{n+2}(u), z \leftarrow f^{n+3}(u), y \leftarrow f^{n+1}(u)\}.$$

Übung 3.5 (*) *Sei f ein 2-stelliges Funktionssymbol und*

$$\begin{aligned}
s_1 &= f(x_1, x_1), & s_{n+1} &= f(s_n, x_{n+1}) \text{ für } n \geq 1,\\
t_1 &= f(a, y), & t_{n+1} &= f(t_n, y) \text{ für } n \geq 1.
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie für alle $n \geq 1$ einen allgemeinsten Unifikator σ_n von $\{s_n, t_n\}$.

Lösung:
Behauptung:

$$\sigma_n = \{x_1 \leftarrow a, \ldots, x_n \leftarrow a, y \leftarrow a\}.$$

Beweise mit vollständiger Induktion nach n, dass die gelöste Form des Systems $\{s_n \doteq t_n\}$

$$\{x_1 \doteq a, \ldots, x_n \doteq a, y \doteq a\}.$$

ist.

Induktionsbasis:
Für $n = 1$ ist das zugehörige System

$$\mathcal{E}_1\colon\ \{x_1 \doteq a, x_1 \doteq y\}.$$

Durch Anwendung von (eliminate) und (orient) erhalten wir die gelöste Form

$$\{x_1 \doteq a, y \doteq a\}.$$

was zu zeigen war.
Induktionshypothese (IH): gelte die Behauptung für n.
Für $n+1$ ist das zugehörige System per Def. von s_{n+1}, t_{n+1}:

$$\mathcal{E}_{n+1}\colon \{f(s_n, x_{n+1}) \doteq f(t_n, y)\}.$$

$$\begin{aligned}
&\{f(s_n, x_{n+1}) \doteq f(t_n, y)\} \text{ (decompose) } \Rightarrow \\
&\{s_n \doteq t_n, x_{n+1} \doteq y\} \text{ ist nach (IH) äquivalent zu} \\
&\{x_1 \doteq a, \ldots, x_n \doteq a, y \doteq a\} \cup \{x_{n+1} \doteq y\} \text{ (eliminate) } \Rightarrow \\
&\{x_1 \doteq a, \ldots, x_n \doteq a, y \doteq a\} \cup \{x_{n+1} \doteq a\} = \\
&\{x_1 \doteq a, \ldots, x_n \doteq a, x_{n+1} \doteq a, y \doteq a\}.
\end{aligned}$$

Damit gilt die Behauptung auch für $n+1$ und wir haben gezeigt, dass σ_n tatsächlich ein A.U. von $\{s_n, t_n\}$ ist.