Theoretische Informatik 2 – Übungsblatt 4 mit Musterlösungen

(LV-Nr.: 185.183, 185.231, WS 2004/2005)

Thema: Deduktion 4 – Resolution

Übung 4.1 *Widerlegen Sie die Klauselmenge*

$$\{\vdash P(x), Q(x); \quad P(x) \vdash Q(x); \quad Q(x) \vdash P(x); \quad P(x), Q(x) \vdash\}$$

mit Resolution.

Lösung:

$$\dfrac{\dfrac{\vdash P(x), Q(x) \quad P(y) \vdash Q(y)}{\vdash Q(x)}\,R^1 \qquad \dfrac{Q(u) \vdash P(u) \quad P(v), Q(v) \vdash}{Q(u) \vdash}\,R^2}{\vdash}\,R^3$$

mit den A.U.s: 1: $\{y \leftarrow x\}$, 2: $\{v \leftarrow u\}$, 3: $\{x \leftarrow u\}$.

Übung 4.2 *Widerlegen Sie die Klauselmenge*

$$\{\vdash P(x), P(f(x)); \quad P(x) \vdash Q(x); \quad Q(f(x)) \vdash\}$$

mit Resolution.

Lösung:

$$\dfrac{\dfrac{\vdash P(z), P(f(z)) \qquad \dfrac{P(x) \vdash Q(x) \quad Q(f(y)) \vdash}{P(f(y)) \vdash}\,R^1}{\vdash P(y)}\,R^2 \qquad \dfrac{P(u) \vdash Q(u) \quad Q(f(v)) \vdash}{P(f(v)) \vdash}\,R^3}{\vdash}\,R^4$$

mit den A.U.s: 1: $\{x \leftarrow f(y)\}$, 2: $\{z \leftarrow y\}$, 3: $\{u \leftarrow f(v)\}$, 4: $\{y \leftarrow f(v)\}$.

Übung 4.3 *Widerlegen Sie die Klauselmenge*

$$\{\vdash P(a, b, c); \quad P(x, y, z) \vdash P(y, z, x); \quad P(c, a, b) \vdash\}$$

mit Resolution.

Lösung:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash P(a,b,c) \quad P(x,y,z) \vdash P(y,z,x)}{\vdash P(b,c,a)}\,R^1 \qquad P(u,v,w) \vdash P(v,w,u)}{\vdash P(c,a,b)}\,R^2 \qquad P(c,a,b) \vdash}{\vdash}\,R^3$$

Mit den A.U.s:
1: $\{x \leftarrow a, y \leftarrow b, z \leftarrow c\}$,
2: $\{u \leftarrow b, v \leftarrow c, w \leftarrow a\}$,
3: ϵ.

Übung 4.4 *Beweisen Sie mit Hilfe des Resolutionskalküls, dass die Formel*

$$(\exists x)[(\forall y)(P(x,y) \wedge Q(x,y)) \supset ((\forall y)P(x,y) \wedge (\forall y)Q(x,y))]$$

gültig ist.

Lösung:
Sei $A = (\exists x)[(\forall y)(P(x,y) \wedge Q(x,y)) \supset ((\forall y)P(x,y) \wedge (\forall y)Q(x,y))]$.
Dann gilt A gültig $\Longleftrightarrow \neg A$ unerfüllbar.
Statt der Gültigkeit von A kann die Unerfüllbarkeit von $\neg A$ gezeigt werden. Wir transformieren also $\neg A$ in Klauselform $\mathcal{C}$ und widerlegen $\mathcal{C}$ mit Resolution.

1. Schritt: Variablenumbenennung.

$$\neg A \Rightarrow \neg(\exists x)[(\forall y)(P(x,y) \wedge Q(x,y)) \supset ((\forall u)P(x,u) \wedge (\forall v)Q(x,v))].$$

Transformation in Normalform 1:

$$\begin{aligned}
&\neg(\exists x)[(\forall y)(P(x,y) \wedge Q(x,y)) \supset ((\forall u)P(x,u) \wedge (\forall v)Q(x,v))] \text{ (T6)} \Rightarrow \\
&(\forall x)\neg[(\forall y)(P(x,y) \wedge Q(x,y)) \supset ((\forall u)P(x,u) \wedge (\forall v)Q(x,v))] \text{ (T7)} \Rightarrow \\
&(\forall x)[(\forall y)(P(x,y) \wedge Q(x,y)) \wedge \neg((\forall u)P(x,u) \wedge (\forall v)Q(x,v))] \text{ (T2)} + 2 * \text{(T5)} \Rightarrow \\
&(\forall x)[(\forall y)(P(x,y) \wedge Q(x,y)) \wedge ((\exists u)\neg P(x,u) \vee (\exists v)\neg Q(x,v))].
\end{aligned}$$

Skolemform:

$$(\forall x)[(\forall y)(P(x,y) \wedge Q(x,y)) \wedge (\neg P(x,f(x)) \vee \neg Q(x,g(x)))].$$

KNF:

$$(P(x,y) \wedge Q(x,y) \wedge (\neg P(x,f(x)) \vee \neg Q(x,g(x))).$$

Klauselform:

$$\mathcal{C}\colon \{\vdash P(x,y);\quad \vdash Q(x,y);\quad P(x,f(x)), Q(x,g(x)) \vdash\}.$$

Resolutionswiderlegung:

$$\dfrac{\vdash Q(u,v) \qquad \dfrac{\vdash P(x,y) \quad P(x_1,f(x_1)), Q(x_1,g(x_1)) \vdash}{Q(x_1,g(x_1)) \vdash}\, R^1}{\vdash}\, R^2$$

A.U.s:
1: $\{x \leftarrow x_1, y \leftarrow f(x_1)\}$,
2: $\{u \leftarrow x_1, v \leftarrow g(x_1)\}$.

Übung 4.5 (*) *Beweisen Sie mit Hilfe der Resolution dass die Klauselmenge*

$$\begin{aligned}
&\{\vdash P(f(x,f(y,x)));\\
&\vdash P(f(f(x,f(y,z)),f(f(x,y),f(x,z))));\\
&P(x), P(f(x,y)) \vdash P(y);\\
&P(f(a,a)) \vdash\}
\end{aligned}$$

unerfüllbar ist.

Lösung:
Wir definieren

$$\begin{aligned} C_1 &= \vdash P(f(x, f(y,x))); \\ C_2 &= \vdash P(f[f(x, f(y,z)), f(f(x,y), f(x,z))]); \\ C_3 &= P(x), P(f(x,y)) \vdash P(y); \\ C_4 &= P(f(a,a)) \vdash . \end{aligned}$$

Wir bilden die Variante C_3': $P(u), P(f(u,v)) \vdash P(v)$ und resolvieren C_3' mit C_1:

$$\frac{\vdash P(f(x, f(y,x))) \quad P(u), P(f(u,v)) \vdash P(v)}{C_5\colon\ P(f[f(x, f(y,x)), v]) \vdash P(v)}$$

mit A.U. $\{u \leftarrow f(x, f(y,x))\}$.
Bilde sodann die Variante

$$C_2'\colon \vdash P(f[f(x_1, f(y_1,z_1)), f(f(x_1,y_1), f(x_1,z_1))])$$

von C_2 und resolviere mit C_5:

$$\frac{\vdash P(f[f(x_1, f(y_1,z_1)), f(f(x_1,y_1), f(x_1,z_1))]) \quad P(f[f(x, f(y,x)), v]) \vdash P(v)}{C_6\colon\ \vdash P(f[f(x,y), f(x,x)])}$$

mit A.U. $\{x_1 \leftarrow x,\ y_1 \leftarrow y,\ z_1 \leftarrow x,\ v \leftarrow f(f(x,y), f(x,x))\}$.
Den Rest der Widerlegung stellen wir als Resolutionsbaum mit Varianten von C_5 und C_6 als Axiomklausel dar. Es ist klar, dass mit den Ableitungen von C_5 und C_6 selbst sich eine gesamte Resolutionswiderlegung ergibt.

$$\frac{\dfrac{\vdash P(f[f(x_1,y_1), f(x_1,x_1)]) \quad P(f[f(x, f(y,x)), v]) \vdash P(v)}{\vdash P(f(x,x))}\, R^1 \qquad P(f(a,a)) \vdash}{\vdash}\, R^2$$

A.U.s:
1: $\{x_1 \leftarrow x,\ y_1 \leftarrow f(y,x),\ v \leftarrow f(x,x)\}$,
2: $\{x \leftarrow a\}$.