Theoretische Informatik 2 – Übungsblatt 1 mit Musterlösungen

(LV-Nr.: 185.183, 185.231, WS 2004/2005)

Thema: Deduktion 1 – Prädikatenlogik und LK

Übung 1.1 *Sei F die prädikatenlogische Formel $(\forall x)(P(x) \vee \neg P(f(x)))$. Berechnen Sie $v_{\mathcal{M}}(F)$ für $\mathcal{M} = (D, \Phi, I)$ mit $\Phi(f)\colon D \to D$, $\Phi(P)\colon D \to \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$, wobei gilt:*

$$
\begin{aligned}
&D = \{0, 1, 2\},\\
&\Phi(f)(0) = 1,\ \Phi(f)(1) = 2,\ \Phi(f)(2) = 0,\\
&\Phi(P)(0) = \mathbf{t},\ \Phi(P)(1) = \mathbf{f},\ \Phi(P)(2) = \mathbf{f},\\
&I(v) = 0 \textit{ für alle } v \in V.
\end{aligned}
$$

(Empfehlung: verwenden Sie Abkürzungen, z.B. φ für $\Phi(f)$ und π für $\Phi(P)$).

Lösung:

$$
\begin{aligned}
v_{\mathcal{M}}(F) = \mathbf{t} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{für alle } \mathcal{N} \in \mathcal{M}_x^\star\colon\ v_{\mathcal{N}}(P(x) \vee \neg P(f(x))) = \mathbf{t}\\
&\Leftrightarrow \quad \text{für alle } \mathcal{N} \in \mathcal{M}_x^\star\colon\ \mathit{or}(v_{\mathcal{N}}(P(x)), v_{\mathcal{N}}(\neg P(f(x)))) = \mathbf{t}\\
&\Leftrightarrow \quad \text{für alle } \mathcal{N} \in \mathcal{M}_x^\star\colon\ \mathit{or}(v_{\mathcal{N}}(P(x)), \mathit{not}(v_{\mathcal{N}}(P(f(x))))) = \mathbf{t}.
\end{aligned}
$$

Sei nun $\mathcal{N} = (D, \Phi, J)$ mit $J(v) = I(v)$ für $v \neq x$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&v_{\mathcal{N}}(P(x)) = \pi(t_{\mathcal{N}}(x)) = \pi(J(x)),\\
&v_{\mathcal{N}}(P(f(x))) = \pi(t_{\mathcal{N}}(f(x))) = \pi(\varphi(t_{\mathcal{N}}(x))) = \pi(\varphi(J(x))).
\end{aligned}
$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
&v_{\mathcal{M}}(F) = \mathbf{t} \ \Leftrightarrow\\
&\text{Für alle } J \text{ mit } J(v) = I(v) \text{ für } v \neq x : \mathit{or}(\pi(J(x)), \mathit{not}(\pi(\varphi(J(x))))) = \mathbf{t}.
\end{aligned}
$$

und damit auch

$$
\begin{aligned}
&v_{\mathcal{M}}(F) = \mathbf{t} \ \Leftrightarrow\\
&\text{Für alle } i \in \{0, 1, 2\} :\ \mathit{or}(\pi(i), \mathit{not}(\pi(\varphi(i)))) = \mathbf{t}.
\end{aligned}
$$

Es gilt aber

$$\mathit{or}(\pi(2), \mathit{not}(\pi(\varphi(2)))) = \mathit{or}(\mathbf{f}, \mathit{not}(\pi(0))) = \mathit{or}(\mathbf{f}, \mathit{not}(\mathbf{t})) = \mathit{or}(\mathbf{f}, \mathbf{f}) = \mathbf{f}.$$

Daraus folgt schließlich $v_{\mathcal{M}}(F) = \mathbf{f}$. $\Diamond$

Übung 1.2 *Geben Sie ein Modell $\mathcal{M}\colon (D, \Phi, I)$ (mit $D = \mathbb{N}$) für die Formel*

$$(\forall x)(\neg P(x, x) \wedge (\exists y)(\exists z)(P(x, y) \wedge \neg P(x, z)))$$

an (begründen Sie Ihre Wahl).

Lösung: Sei $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, \Phi, I)$ für beliebiges I und für $\Phi(P) = <$. Dann ist ist $\mathcal{M}$ Modell der Formel

$$(\forall x)(\neg P(x, x) \wedge (\exists y)(\exists z)(P(x, y) \wedge \neg P(x, z))).$$

In der Tat gilt für alle natürlichen Zahlen n: $n \not< n$, es existiert m mit $n < m$ (z.B. $m = n + 1$) und es existiert ein k mit $n \not< k$ (in der Tat für $k = n$). $\Diamond$

Übung 1.3 *Beweisen Sie die Formel*

$$(\exists y)((\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \supset (P(a) \wedge Q(y)))$$

im LK.

Lösung:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{Y, P(a) \wedge Q(a) \vdash X, P(a) \wedge Q(a)}{(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \vdash X, P(a) \wedge Q(a)}\ \forall l}{\vdash X, (\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \supset (P(a) \wedge Q(a))}\ \supset r}{\vdash (\exists y)((\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \supset (P(a) \wedge Q(y)))}\ \exists r$$

Mit

$$\begin{array}{rcl} X & = & (\exists y)((\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \supset (P(a) \wedge Q(y))) \ \text{ und} \\ Y & = & (\forall x)(P(x) \wedge Q(x)). \end{array}$$

$\Diamond$

Übung 1.4 *Beweisen Sie die Formel*

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(P(x, y) \wedge Q(x, z)) \supset ((\exists y)P(a, y) \wedge (\forall z)Q(a, z))$$

im LK.

Lösung:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{X, Z, P(a, x_1), Q(a, v) \vdash P(a, x_1), Y}{X, Z, P(a, x_1) \wedge Q(a, v) \vdash P(a, x_1), Y}\ \wedge l}{X, (\forall z)(P(a, x_1) \wedge Q(a, z)) \vdash P(a, x_1), Y}\ \forall l}{X, (\forall z)(P(a, x_1) \wedge Q(a, z)) \vdash (\exists y)P(a, y)}\ \exists r}{X, (\exists y)(\forall z)(P(a, y) \wedge Q(a, z)) \vdash (\exists y)P(a, y)}\ \exists l}{(\forall x)(\exists y)(\forall z)(P(x, y) \wedge Q(x, z)) \vdash (\exists y)P(a, y)}\ \forall l \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{X, Z', P(a, x_2), Q(a, x_1) \vdash Q(a, x_1)}{X, Z', P(a, x_2) \wedge Q(a, x_1) \vdash Q(a, x_1)}\ \wedge l}{X, (\forall z)(P(a, x_2) \wedge Q(a, z)) \vdash Q(a, x_1)}\ \forall l}{X, (\exists y)(\forall z)(P(a, y) \wedge Q(a, z)) \vdash Q(a, x_1)}\ \exists l}{(\forall x)(\exists y)(\forall z)(P(x, y) \wedge Q(x, z)), \vdash Q(a, x_1)}\ \forall l}{(\forall x)(\exists y)(\forall z)(P(x, y) \wedge Q(x, z)) \vdash (\forall z)Q(a, z)}\ \forall r}{(\forall x)(\exists y)(\forall z)(P(x, y) \wedge Q(x, z)) \vdash (\exists y)P(a, y) \wedge (\forall z)Q(a, z}\ \wedge r}{\vdash (\forall x)(\exists y)(\forall z)(P(x, y) \wedge Q(x, z)) \supset ((\exists y)P(a, y) \wedge (\forall z)Q(a, z))}\ \supset r$$

Mit

$$\begin{array}{rcl} X & = & (\forall x)(\exists y)(\forall z)(P(x, y) \wedge Q(x, z)), \\ Y & = & (\exists y)P(a, y), \\ Z & = & (\forall z)(P(a, x_1) \wedge Q(a, z)), \\ Z' & = & (\forall z)(P(a, x_2) \wedge Q(a, z)). \end{array}$$

Übung 1.5 *Geben Sie einen Beweis des Sequentes*

$$((\forall x)P(x) \supset (\forall y)Q(y)) \wedge ((\forall u)P(u) \wedge (\exists v)\neg Q(v)) \vdash$$

im LK.

Lösung:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$P(x_1), Y, X \vdash P(x_1)$}
\RightLabel{$\forall l$}
\UnaryInfC{$(\forall u)P(u), X \vdash P(x_1)$}
\RightLabel{$\forall r$}
\UnaryInfC{$(\forall u)P(u), (\exists v)\neg Q(v) \vdash (\forall x)P(x)$}
\AxiomC{$Q(x_1), Z, Y \vdash Q(x_1)$}
\RightLabel{$\neg l$}
\UnaryInfC{$Q(x_1), Z, Y, \neg Q(x_1) \vdash$}
\RightLabel{$\forall l$}
\UnaryInfC{$(\forall y)Q(y), Y, \neg Q(x_1) \vdash$}
\RightLabel{$\exists l$}
\UnaryInfC{$(\forall y)Q(y), (\forall u)P(u), (\exists v)\neg Q(v) \vdash$}
\RightLabel{$\supset l$}
\BinaryInfC{$(\forall x)P(x) \supset (\forall y)Q(y), (\forall u)P(u), (\exists v)\neg Q(v) \vdash$}
\RightLabel{$\wedge l$}
\UnaryInfC{$(\forall x)P(x) \supset (\forall y)Q(y), (\forall u)P(u) \wedge (\exists v)\neg Q(v) \vdash$}
\RightLabel{$\wedge l$}
\UnaryInfC{$((\forall x)P(x) \supset (\forall y)Q(y)) \wedge ((\forall u)P(u) \wedge (\exists v)\neg Q(v)) \vdash$}
\end{prooftree}
$$

Mit

$$
\begin{aligned}
X &= (\exists v)\neg Q(v),\\
Y &= (\forall u)P(u),\\
Z &= (\forall y)Q(y).
\end{aligned}
$$