Theoretische Informatik 2 – Übungsblatt 8 mit Musterlösungen

(LV-Nr.: 185.183, 185.231, WS 2004/2005)

Thema: Berechenbarkeit 1 – Rekursive Funktionen

Übung 8.1 *Sei* $\exp_2$ *folgende Funktion* $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$*:* $\exp_2(n) = 2^n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*. Geben Sie eine Darstellung der Funktion* $\exp_2$ *mittels* $BO \cup \{Pr\}$ *und* $BF \cup \{S\}$ *an.*

Lösung: $\exp_2$ kann durch folgende Rekursion definiert werden:

$$\begin{aligned} \exp_2(0) &= 1, \\ \exp_2(n+1) &= \exp_2(n) + \exp_2(n). \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\exp_2(n) + \exp_2(n) = E(plus; I_2^2, I_2^2)(n, \exp_2(n)).$$

Daraus folgt $\exp_2 = Pr(1, E(plus; I_2^2, I_2^2))$.
Wegen $plus = Pr(I^1, S \circ I_3^3)$
erhalten wir schließlich

$$\exp_2 = Pr(1, E(Pr(I^1, S \circ I_3^3); I_2^2, I_2^2)).$$

Übung 8.2 *Sei* Φ *der folgende Operator vom Typ* $\mathrm{PREK}_1^3 \times \mathrm{PREK}_1^3 \to \mathrm{PREK}_1^3$*:*

$$\Phi(f, g)(x_1, x_2, x_3) = f(g(x_1, x_1, x_1), g(x_2, x_2, x_2), g(x_3, x_3, x_3)).$$

Drücken Sie Φ *mittels BO und BF aus.*

Lösung:

$$\begin{aligned} &f(g(x_1, x_1, x_1), g(x_2, x_2, x_2), g(x_3, x_3, x_3)) = \\ &f(g \circ \Delta_3^1(x_1), g \circ \Delta_3^1(x_2), g \circ \Delta_3^1(x_3)) = \\ &f(g \circ \Delta_3^1 \circ I_1^3(x_1, x_2, x_3), g \circ \Delta_3^1 \circ I_2^3(x_1, x_2, x_3), g \circ \Delta_3^1 \circ I_3^3(x_1, x_2, x_3)) = \\ &E(f; g \circ \Delta_3^1 \circ I_1^3, g \circ \Delta_3^1 \circ I_2^3, g \circ \Delta_3^1 \circ I_3^3)(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

daraus folgt

$$\Phi(f, g) = E(f; g \circ \Delta_3^1 \circ I_1^3, g \circ \Delta_3^1 \circ I_2^3, g \circ \Delta_3^1 \circ I_3^3).$$

Übung 8.3 *Sei*

$$g = \mu Pr(C_1^1, E(Pr(C_0^1, E(plus; I_1^3, I_3^3)); I_1^3, I_3^3)).$$

Bestimmen Sie den Definitionsbereich von g*.*

Lösung: Wegen

$$mal = Pr(C_0^1, E(plus; I_1^3, I_3^3))$$

und

$$\exp = Pr(C_1^1, E(mal; I_1^3, I_3^3))$$

gilt $g = \mu \exp$. Nach Definition des μ-Operators gilt

$$\begin{aligned} \mu \exp(m,n) &= \min\{k \mid \exp(m,k) = n\} \\ &= \min\{k \mid m^k = n\} \text{ und daher} \\ D(\mu \exp) &= \{(m,n) \mid (\exists k) m^k = n\} \\ &= \{(m, m^k) \mid m, k \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Übung 8.4 *Beweisen Sie unter Verwendung des Abschlusssatzes 4.2.1, dass das Prädikat P:*

$$P(n,m) = \mathbf{t} \Longleftrightarrow (\exists k) n + m = 2^k$$

primitiv rekursiv ist.

Lösung: In der Definition von P kann der $\exists$-Quantor durch einen beschränkten $\exists$-Quantor ersetzt werden:

$$P(n,m) = \mathbf{t} \Longleftrightarrow (\exists k \leq n + m) n + m = 2^k$$

Sei nun Q definiert als

$$Q(n,m,k) \Longleftrightarrow n + m = 2^k.$$

Dann ist P mittels beschränkter Quantifikation aus Q definiert. Genauer

$$\begin{aligned} Q^e(n,m,r) &\Longleftrightarrow (\exists k \leq r) Q(n,m,k) \text{ und daher} \\ Q^e(n,m,n+m) &\Longleftrightarrow (\exists k \leq n + m) Q(n,m,k). \end{aligned}$$

Ist nun $Q \in \mathit{Praed}(\mathrm{PR})$ so auch P, da PR unter beschränkter Quantifikation abgeschlossen ist und $+$ in PR ist.
$Q \in \mathit{Praed}(\mathrm{PR})$ da $= \in \mathit{Praed}(\mathrm{PR})$ sowie $+, \exp \in \mathrm{PR}$ (wie auch $\exp_2 \colon n \to 2^n \in \mathrm{PR}$).
Wir haben daher gezeigt, dass $P \in \mathit{Praed}(\mathrm{PR})$ gilt.

Übung 8.5 *Beweisen Sie (unter Verwendung des Abschlusssatzes 4.2.1) dass die Klasse der rekursiven Funktionen unter der beschränkten μ-Rekursion μ_b abgeschlossen ist. Dabei gilt:*

$$\begin{aligned} \mu_b f(x,m) &= \min\{k \mid f(x,k) = 0\} \textit{ falls } (\exists k \leq m) f(x,k) = 0 \\ &= 0 \textit{ sonst.} \end{aligned}$$

Lösung: Wir nehmen an, dass f rekursiv ist und zeigen, dass auch $\mu_b f$ rekursiv ist. Da $f \in$ REK und $= \in \mathit{Praed}(\text{REK})$ so ist das Prädikat P mit

$$P(x,k) \Longleftrightarrow f(x,k) = 0$$

rekursiv. Nun gilt aber

$$P^e(n,m) \Longleftrightarrow (\exists k \leq m) P(x,k) \Longleftrightarrow (\exists k \leq m) f(x,k) = 0.$$

Da REK unter beschränkter Quantifikation abgeschlossen ist so ist auch $P^e \in \mathit{Praed}(\text{REK})$. Das bedeutet $\mu_b f$ ist mittels Fallunterscheidung aus rekursiven Prädikaten definiert. Wir haben nun

$$\begin{aligned} \mu_b f(x,m) &= \min\{k \mid f(x,k) = 0\} \text{ falls } P^e(n,m) \\ &= 0 \text{ sonst.} \end{aligned}$$

Wenn wir ein $g \in$ REK finden sodass

$$\begin{aligned} \mu_b f(x,m) &= g(x,m) \text{ falls } P^e(n,m) \\ &= 0 \text{ sonst.} \end{aligned}$$

so ist $\mu_b f$ rekursiv da die rekursiven Funktionen unter Fallunterscheidung abgeschlossen sind. Es bleibt, die Funktion g zu definieren. Wir definieren

$$g(x,m) = \sum_{i=0}^{m} \prod_{j=0}^{i} (sg \circ f)(x,j).$$

mit $sg(n) = 1 \dot{-} (1 \dot{-} n)$.
Wenn es ein $k \leq m$ gibt mit $f(x,k) = 0$ dann gilt gerade

$$g(x,m) = \min\{k \mid f(x,k) = 0\}.$$

In der Tat: ist $r \leq m$ und $r = \min\{k \mid f(x,k) = 0\}$ also

$$f(x,0) \neq 0, \ldots, f(x,r-1) \neq 0, f(x,r) = 0$$

dann gilt

$$(sg \circ f)(x,0) = 1, \ldots, (sg \circ f)(x,r-1) = 1, (sg \circ f)(x,r) = 0$$

und daher

$$\sum_{i=0}^{m} \prod_{j=0}^{i} (sg \circ f)(x,j) = r.$$

Wir zeigen nun, dass g rekursiv ist. Nun gilt

$$g = \sum (\prod sg \circ f)$$

für die Operatoren $\sum$ und $\prod$ definiert als

$$\begin{aligned} (\sum h)(x,m) &= \sum_{i=0}^{m} h(x,i), \\ (\prod h)(x,m) &= \prod_{i=0}^{m} h(x,i). \end{aligned}$$

Da sg und f rekursiv sind genügt es also zu zeigen, dass REK unter den Operatoren $\sum$ und $\prod$ abgeschlossen ist. Dies folgt aber daraus, dass $\sum$ und $\prod$ durch den Pr-Operator ausgedrückt werden können und REK Pr-abgeschlossen ist. Die Darstellung mittels Pr ist einfach:

$$\begin{aligned}
(\sum h)(x,0) &= h(x,0), \\
(\sum h)(x,n+1) &= h(x,n+1) + (\sum h)(x,n), \\
(\prod h)(x,0) &= h(x,0), \\
(\prod h)(x,n+1) &= h(x,n+1) * (\prod h)(x,n).
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass g und damit auch $\mu_b f$ rekursiv sind.