Theoretische Informatik 2 – Übungsblatt 5
mit Musterlösungen

(LV-Nr.: 185.183, 185.231, WS 2004/2005)

Thema: Formale Aspekte von Progr.sprachen 1 – Operationale Semantik

Übung 5.1 *Gegeben sei der boole'sche Ausdruck $b = (x * (y - 1)) + x \leq x$ in der Programmiersprache **WHILE** sowie ein Zustand s mit $sx = 3$ und $sy = 5$. Werten Sie a semantisch aus, d.h. berechnen Sie $\mathcal{B}[\![b]\!]s$ schrittweise gemäß der Semantik-Definition für arithmetische Ausdrücke.*

Lösung: Es gilt:

$$\mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{t} \iff \mathcal{A}[\![(x * (y - 1)) + x]\!]s \leq \mathcal{A}[\![x]\!]s$$

Ferner:

$$\mathcal{A}[\![x]\!]s = s\ x = 3$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}[\![(x * (y - 1)) + x]\!]s &= \mathcal{A}[\![(x * (y - 1))]\!]s + \mathcal{A}[\![x]\!]s \\
&= (\mathcal{A}[\![x]\!]s * \mathcal{A}[\![y - 1]\!]s) + s\ x \\
&= (s\ x * (\mathcal{A}[\![y]\!]s - \mathcal{A}[\![1]\!]s)) + 3 \\
&= (3 * (s\ y - 1)) + 3 \\
&= (3 * (5 - 1)) + 3 = 15\ ,
\end{aligned}$$

folglich

$$\mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{f}$$

da $15 \leq 3$ nicht gilt.

Übung 5.2 *Gegeben sei das **WHILE**-Programm*

$$P\colon y := 1\ ;\ \mathsf{while}\ \underbrace{\neg(x = 1)}_{b}\ \mathsf{do}\ \underbrace{(\overbrace{y := y * x}^{S_1};\ \overbrace{x := x - 1}^{S_2})}_{S}$$

und der Anfangszustand s mit $s\ x = 3$. Gesucht ist der Endzustand s', d.h. ein Zustand s', sodass $\langle P, s\rangle \to s'$ in I_{ns} ableitbar ist. [Hinweis: Verwenden Sie – aus Gründen der Übersichtlichkeit – die angegebenen Abkürzungen für Programmteile.]

Lösung: Zur Vereinfachung der Darstellung verwenden wir ferner folgende Schreibweise für Zustände. $s_{m,n}$ ist der Zustand, der sich von s nur bei x und y unterscheidet: $s_{m,n}x = m$, $s_{m,n}y = n$, $s_{m,n}z = sz$ für $z \notin \{x, y\}$. Der vollständige Ableitungsbaum für $\langle P, s\rangle \to s'$ mit den dazugehörigen Regelanwendungen ist nachfolgend dargestellt. Eckig umrahmte Formeln deuten an, daß der Baum an dieser Stelle (aus darstellungstechnischen Gründen) zerlegt ist.

$$\dfrac{\dfrac{\overset{[\mathsf{ass_{ns}}]}{\langle S_1, s_{2,3}\rangle \to s_{2,6}} \quad \overset{[\mathsf{ass_{ns}}]}{\langle S_2, s_{2,6}\rangle \to s_{1,6}}}{\langle S, s_{2,3}\rangle \to s_{1,6}}\,[\mathsf{comp_{ns}}] \quad \overset{[\mathsf{while^{f}_{ns}}]}{\langle \mathsf{while}\ b\ \mathsf{do}\ S, s_{1,6}\rangle \to s_{1,6}}}{\boxed{\langle \mathsf{while}\ b\ \mathsf{do}\ S, s_{2,3}\rangle \to s_{1,6}}}\,[\mathsf{while^{t}_{ns}}]$$

$$\dfrac{\overset{[\mathsf{ass_{ns}}]}{\langle y :=\ 1, s\rangle \to s_{3,1}} \quad \dfrac{\dfrac{\overset{[\mathsf{ass_{ns}}]}{\langle S_1, s_{3,1}\rangle \to s_{3,3}} \quad \overset{[\mathsf{ass_{ns}}]}{\langle S_2, s_{3,3}\rangle \to s_{2,3}}}{\langle S, s_{3,1}\rangle \to s_{2,3}}\,[\mathsf{comp_{ns}}] \quad \boxed{\langle \mathsf{while}\ b\ \mathsf{do}\ S, s_{2,3}\rangle \to s_{1,6}}}{\langle \mathsf{while}\ b\ \mathsf{do}\ S, s_{3,1}\rangle \to s_{1,6}}\,[\mathsf{while^{t}_{ns}}]}{\langle P, s\rangle \to s_{1,6}}\,[\mathsf{comp_{ns}}]$$

Blätter im Ableitungsbaum sind jeweils Instanzen der angegebenen Axiomenschemata. Beispielsweise ist

$$\overset{[\mathsf{ass_{ns}}]}{\langle S_1, s_{2,3}\rangle \to s_{2,6}}$$

eine Instanz von $[\mathsf{ass_{ns}}]$, da

$$s_{2,3}[y \mapsto (s_{2,3}\ y) * (s_{2,3}\ x)] = s_{2,3}[y \mapsto 3 * 2] = s_{2,3}[y \mapsto 6] = s_{2,6}$$

Der gesuchte Endzustand s' ist daher $s' = s_{,6}$.

Alternative Lösung:

Hier nehmen wir für die Zwischenzustände jeweils Zustandvariablen, deren Werte wir erst rückwärts bestimmen, ausgehend von den Blättern. Der entsprechende Ableitungsbaum sieht wie folgt aus:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{[\mathsf{ass_{ns}}]}{\langle S_1, s^2\rangle \to s^5} \quad \overset{[\mathsf{ass_{ns}}]}{\langle S_2, s^5\rangle \to s^4}}{\langle S, s^2\rangle \to s_4}\,[\mathsf{comp_{ns}}] \quad \overset{[\mathsf{while^{f}_{ns}}]}{\langle \mathsf{while}\ b\ \mathsf{do}\ S, s^4\rangle \to s'}}{\boxed{\langle \mathsf{while}\ b\ \mathsf{do}\ S, s^2\rangle \to s'}}\,[\mathsf{while^{t}_{ns}}]$$

$$\dfrac{\overset{[\mathsf{ass_{ns}}]}{\langle y :=\ 1, s\rangle \to s^1} \quad \dfrac{\dfrac{\overset{[\mathsf{ass_{ns}}]}{\langle S_1, s^1\rangle \to s^3} \quad \overset{[\mathsf{ass_{ns}}]}{\langle S_2, s^3\rangle \to s^2}}{\langle S, s^1\rangle \to s^2}\,[\mathsf{comp_{ns}}] \quad \boxed{\langle \mathsf{while}\ b\ \mathsf{do}\ S, s^2\rangle \to s'}}{\langle \mathsf{while}\ b\ \mathsf{do}\ S, s^1\rangle \to s'}\,[\mathsf{while^{t}_{ns}}]}{\langle P, s\rangle \to s'}\,[\mathsf{comp_{ns}}]$$

Wir haben hier, außer dem gegebenen Anfangszustand s, die Zustandsvariablen $s^1, \ldots, s^5$ sowie s', die geeignet zu belegen sind, sodaß der Ableitungsbaum insgesamt korrekt (und vollständig) ist. Aus $\langle y :=\ 1, s\rangle \to s^1$ via $[\mathsf{ass_{ns}}]$ erhalten wir zunächst

$$s^1 = s[y \mapsto 1 = s_{3,1}\ .$$

[$\mathsf{ass_{ns}}$]

Sodann bekommen wir aus $\langle S_1, s^1\rangle \to s^3$, wiederum mittels [$\mathsf{ass_{ns}}$], die Einsetzung

$$s^3 = s^1[y \mapsto (s^1\ y) * (s^1\ x)] = s^1[y \mapsto 1 * 3] = s^1[y \mapsto 3] = s_{3,1}[y \mapsto 3] = s_{3,3}\ .$$

Und mit $\langle S_2, s^3\rangle \to s^2$ wegen [$\mathsf{ass_{ns}}$] erhalten wir

$$s^2 = s^3[x \mapsto (s^3\ x) - 1] = s^3[x \mapsto (s^3\ x) - 1] = s^3[x \mapsto 3 - 1] = s_{2,3}\ .$$

Weiter folgt aus $\langle S_1, s^2\rangle \to s^5$ mittels [$\mathsf{ass_{ns}}$] offensichtlich

$$s^5 = s^2[y \mapsto (s^2\ y) * (s^2\ x)] = s^2[y \mapsto 3 * 2] = s^2[y \mapsto 6] = s_{2,6}\ .$$

Dies ergibt mit $\langle S_2, s^5\rangle \to s^4$ via [$\mathsf{ass_{ns}}$] dann wiederum

$$s^4 = s^5[x \mapsto (s^5\ x) - 1] = s^5[x \mapsto 2 - 1] = s^5[x \mapsto 1] = s_{1,6}\ .$$

Mit $\langle \mathsf{while}\ b\ \mathsf{do}\ S, s^4\rangle \to s'$ aufgrund von [$\mathsf{while}^{\mathbf{f}}_{\mathsf{ns}}$] bekommen wir jetzt auch den Endzustand s', indem wir gemäß [$\mathsf{while}^{\mathbf{f}}_{\mathsf{ns}}$]

$$s' = s^4 = s_{1,6}$$

wählen. Man beachte, daß hier auch die Bedingung zu $\mathbf{f}$ auswerten muß, was in der Tat der Fall ist:

$$\mathcal{B}[\![\neg(x = 1)]\!]s^4 = \mathbf{f}, \quad \text{da } s^4\ x = 1.$$

Insgesamt haben wir also mit diesen Einsetzungen einen (korrekten und) vollständigen Ableitungsbaum für $\langle P, s\rangle \to s'$ erzeugt.

Übung 5.3 *Gegeben sei das* ***WHILE****-Programm*

$$P\colon y :=\ 1\ ;\ \mathsf{while}\ \underbrace{\neg(x = 1)}_{b}\ \mathsf{do}\ \underbrace{(\overbrace{y :=\ y * x}^{S_1};\ \overbrace{x :=\ x - 1}^{S_2})}_{S}$$

und der Anfangszustand s mit $s\ x = -4$. Gesucht sind alle Ergebnisse s', d.h. Endzustände s', sodaß $\langle P, s\rangle \to s'$ in I_{ns} ableitbar ist. Versuchen Sie, alle solche s' zu berechnen, indem Sie einen (korrekten und vollständigen) Ableitungsbaum für $\langle P, s\rangle \to s'$ konstruieren. [Hinweis: Verwenden Sie – aus Gründen der Übersichtlichkeit – die angegebenen Abkürzungen für Programmteile.]

Lösung: Zur Vereinfachung der Darstellung verwenden wir wiederum folgende Schreibweise für Zustände. $s_{m,n}$ ist der Zustand, der sich von s nur bei x und y unterscheidet: $s_{m,n}x = m$, $s_{m,n}y = n$, $s_{m,n}z = sz$ für $z \notin \{x, y\}$.

Der Ableitungsbaum $\langle P, s\rangle \to s'$ müsste klarerweise folgende Form haben:

$$\dfrac{\dfrac{[\mathsf{ass}_{\mathsf{ns}}]}{\langle y := \ 1, s\rangle \to s_{-4,1}} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \langle S, s_{-4,1}\rangle \to s_{-5,-4}\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \langle S, s_{-5,-4}\rangle \to s_{-6,20}\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \langle \mathsf{while}\ b\ \mathsf{do}\ S, s_{-6,-20}\rangle \to s'\end{array}}{\langle \mathsf{while}\ b\ \mathsf{do}\ S, s_{-5,-4}\rangle \to s'}\,[\mathsf{while}^{\mathbf{t}}_{\mathsf{ns}}]}{\langle \mathsf{while}\ b\ \mathsf{do}\ S, s_{-4,1}\rangle \to s'}\,[\mathsf{while}^{\mathbf{t}}_{\mathsf{ns}}]}{\langle P, s\rangle \to s'}\,[\mathsf{comp}_{\mathsf{ns}}]$$

Da diese Konstruktion aber offensichtlich nicht terminiert, d.h. der Baum nicht vollständig (endlich) abgeschlossen werden kann, gibt es kein s' mit $\langle P, s\rangle \to s'$. Das bedeutet, daß P für den Anfangszustand s nicht terminiert.

Allgemeiner gilt hier folgendes: Das Programm P berechnet offensichtlich die Fakultätsfunktion. Genauer: Falls $s\ x \geq 1$, so gilt nach Programmausführung im Endzustand s': $s'\ y = (s\ x)!$. Falls $s\ x < 1$, so gerät das Programm in eine Endlosschleife, d.h. es gibt in diesem Fall kein s' mit $\langle P, s\rangle \to s'$.

Übung 5.4 *Gegeben sei das **WHILE**-Programm*

$$P\colon y := \ 1\ ;\ \mathsf{while}\ \underbrace{\neg(x = 1)}_{b}\ \mathsf{do}\ \underbrace{(\overbrace{y := \ y * x}^{S_1};\ \overbrace{x := \ x - 1}^{S_2})}_{S}$$

Berechnen Sie die strukturelle operationale Semantik von P für den Anfangszustand s mit $s\ x = 2$, d.h. konstruieren Sie

$$\langle P, s\rangle \Rightarrow^{*} s'$$

(sofern möglich). [Hinweis: Verwenden Sie – aus Gründen der Übersichtlichkeit – die angegebenen Abkürzungen für Programmteile.]

Lösung: Zur Vereinfachung der Darstellung verwenden wir die gleiche Schreibweise für Zustände wie früher: $s_{m,n}$ ist der Zustand, der sich von s nur bei x und y unterscheidet: $s_{m,n}x = m$, $s_{m,n}y = n$, $s_{m,n}z = sz$ für $z \notin \{x, y\}$. Der gesuchte Endzustand s' und die Gesamtableitung (in SOS) ergeben sich dabei wie folgt:

$$
\begin{array}{ll}
& \langle y := \ 1 \ ; \ \mathsf{while}\ b\ \mathsf{do}\ S, s\rangle \\
\overset{[\mathsf{comp}^2_{\mathsf{sos}}]\ \boxed{1}}{\Longrightarrow} & \langle \mathsf{while}\ b\ \mathsf{do}\ S, s_{2,1}\rangle \\
\overset{[\mathsf{while}_{\mathsf{sos}}]}{\Longrightarrow} & \langle \mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ (S; \mathsf{while}\ b\ \mathsf{do}\ S)\ \mathsf{else\ skip}, s_{2,1}\rangle \\
\overset{[\mathsf{if}^{\mathbf{t}}_{\mathsf{sos}}]\ \boxed{2}}{\Longrightarrow} & \langle S; \mathsf{while}\ b\ \mathsf{do}\ S, s_{2,1}\rangle \\
\overset{[\mathsf{comp}^1_{\mathsf{sos}}]\ \boxed{3}}{\Longrightarrow} & \langle x := x - 1; \mathsf{while}\ b\ \mathsf{do}\ S, s_{2,2}\rangle \\
\overset{[\mathsf{comp}^2_{\mathsf{sos}}]\ \boxed{4}}{\Longrightarrow} & \langle \mathsf{while}\ b\ \mathsf{do}\ S, s_{1,2}\rangle \\
\overset{[\mathsf{while}_{\mathsf{sos}}]}{\Longrightarrow} & \langle \mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ (S; \mathsf{while}\ b\ \mathsf{do}\ S)\ \mathsf{else\ skip}, s_{1,2}\rangle \\
\overset{[\mathsf{if}^{\mathbf{f}}_{\mathsf{sos}}]\ \boxed{5}}{\Longrightarrow} & \langle \mathsf{skip}, s_{1,2}\rangle \\
\overset{[\mathsf{skip}_{\mathsf{sos}}]}{\Longrightarrow} & s_{1,2}\ .
\end{array}
$$

Die jeweils verwendeten Axiome bzw. Regeln sind hier mit angegeben, und die Rechtfertigung der einzelnen Schritte lautet wie folgt:

$$\boxed{\mathbf{1}} \quad \frac{\langle y := \ 1, s\rangle \overset{[\mathsf{ass}_{\mathsf{sos}}]}{\Longrightarrow} s_{2,1}}{\langle y := \ 1 \ ; \ \mathsf{while}\ b\ \mathsf{do}\ S, s\rangle \Longrightarrow \langle \mathsf{while}\ b\ \mathsf{do}\ S, s_{2,1}\rangle}\ [\mathsf{comp}^2_{\mathsf{sos}}]$$

$$\boxed{\mathbf{2}} \quad \mathcal{B}[\![\neg(x = 1)]\!]s_{2,1} = \mathbf{t}$$

$$\boxed{\mathbf{3}} \quad \cfrac{\cfrac{\langle y := \ y * x, s_{2,1}\rangle \overset{[\mathsf{ass}_{\mathsf{sos}}]}{\Longrightarrow} s_{2,2}}{\langle y := \ y * x;\ x := \ x - 1, s_{2,1}\rangle \Longrightarrow \langle x := \ x - 1, s_{2,2}\rangle}\ [\mathsf{comp}^2_{\mathsf{sos}}]}{\langle S; \mathsf{while}\ b\ \mathsf{do}\ S, s_{2,1}\rangle \Rightarrow \langle x := x - 1; \mathsf{while}\ b\ \mathsf{do}\ S, s_{2,2}\rangle}\ [\mathsf{comp}^1_{\mathsf{sos}}]$$

$$\boxed{\mathbf{4}} \quad \frac{\langle x := x - 1, s_{2,2}\rangle \overset{[\mathsf{ass}_{\mathsf{sos}}]}{\Longrightarrow} s_{1,2}}{\langle x := x - 1; \mathsf{while}\ b\ \mathsf{do}\ S, s_{2,2}\rangle \Longrightarrow \langle \mathsf{while}\ b\ \mathsf{do}\ S, s_{1,2}\rangle}\ [\mathsf{comp}^2_{\mathsf{sos}}]$$

$$\boxed{\mathbf{5}} \quad \mathcal{B}[\![\neg(x = 1)]\!]s_{1,2} = \mathbf{f}\ .$$

Zusammenfassend erhalten wir also für den Endzustand $s' = s_{1,2}$: $\langle P, s\rangle \Rightarrow^* s'$.

Übung 5.5 *Gegeben sei das* ***WHILE****-Programm*

$$P\colon y := \ 1 \ ; \ \mathsf{while}\ \underbrace{\neg(x = 1)}_{b}\ \mathsf{do}\ \underbrace{(\overbrace{y := \ y * x}^{S_1};\ \overbrace{x := \ x - 1}^{S_2})}_{S}$$

Berechnen Sie die strukturelle operationale Semantik von P für den Anfangszustand s mit $s\ x = -1$, d.h., versuchen Sie eine Ableitung der Form $\langle P, s\rangle \Rightarrow \ldots$ zu konstruieren. Welches Ergebnis liefert P bei Anfangszustand s? [Hinweis: Verwenden Sie – aus Gründen der Übersichtlichkeit – die angegebenen Abkürzungen für Programmteile.]

Lösung:

$$
\begin{aligned}
&\langle y := \ 1 \ ; \ \textsf{while}\ b\ \textsf{do}\ S, s\rangle \\
&\overset{[\textsf{comp}^2_{\textsf{sos}}]}{\Longrightarrow} \quad \langle \textsf{while}\ b\ \textsf{do}\ S, s_{-1,1}\rangle \\
&\overset{[\textsf{while}_{\textsf{sos}}]}{\Longrightarrow} \quad \langle \textsf{if}\ b\ \textsf{then}\ (S; \textsf{while}\ b\ \textsf{do}\ S)\ \textsf{else skip}, s_{-1,1}\rangle \\
&\overset{[\textsf{if}^{\mathbf{t}}_{\textsf{sos}}]}{\Longrightarrow} \quad \langle S; \textsf{while}\ b\ \textsf{do}\ S, s_{-1,1}\rangle \\
&\overset{[\textsf{comp}^1_{\textsf{sos}}]}{\Longrightarrow} \quad \langle x := x-1; \textsf{while}\ b\ \textsf{do}\ S, s_{-1,-1}\rangle \\
&\overset{[\textsf{comp}^2_{\textsf{sos}}]}{\Longrightarrow} \quad \langle \textsf{while}\ b\ \textsf{do}\ S, s_{-2,-1}\rangle \\
&\overset{[\textsf{while}_{\textsf{sos}}]}{\Longrightarrow} \quad \langle \textsf{if}\ b\ \textsf{then}\ (S; \textsf{while}\ b\ \textsf{do}\ S)\ \textsf{else skip}, s_{-2,-1}\rangle \\
&\overset{[\textsf{if}^{\mathbf{t}}_{\textsf{sos}}]}{\Longrightarrow} \quad \langle S; \textsf{while}\ b\ \textsf{do}\ S, s_{-2,-1}\rangle \\
&\overset{[\textsf{comp}^1_{\textsf{sos}}]}{\Longrightarrow} \quad \langle x := x-1; \textsf{while}\ b\ \textsf{do}\ S, s_{-2,2}\rangle \\
&\overset{[\textsf{comp}^2_{\textsf{sos}}]}{\Longrightarrow} \quad \langle \textsf{while}\ b\ \textsf{do}\ S, s_{-3,2}\rangle \\
&\quad \vdots
\end{aligned}
$$

wobei die Rechtfertigungen der Einzelschritte (Ableitungsbäume für je einen $\Rightarrow$-Schritt) analog sind zum letzten Beispiel.
Wenn wir uns auf die Struktur der Ableitung beschränken, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\langle y := \ 1 \ ; \ \textsf{while}\ b\ \textsf{do}\ S, s\rangle \\
&\Longrightarrow^* \quad \langle \textsf{while}\ b\ \textsf{do}\ S, s_{-1,1}\rangle \\
&\Longrightarrow^* \quad \langle \textsf{while}\ b\ \textsf{do}\ S, s_{-2,-1}\rangle \\
&\Longrightarrow^* \quad \langle \textsf{while}\ b\ \textsf{do}\ S, s_{-3,2}\rangle \\
&\Longrightarrow^* \quad \langle \textsf{while}\ b\ \textsf{do}\ S, s_{-4,-6}\rangle \\
&\quad \vdots
\end{aligned}
$$

Fazit: das **WHILE**-Programm P terminiert bei Anfangszustand s nicht, liefert also auch kein Ergebnis.