Theoretische Informatik 2 – Übungsblatt 9 mit Musterlösungen

(LV-Nr.: 185.183, 185.231, WS 2004/2005)

Thema: Berechenbarkeit 2, Maschinenmodelle

Übung 9.1 *Geben Sie ein Programm zur Turingmaschine* TM_1^1 *an welches die Funktion* f *berechnet, wobei* $f(n) = 2 * n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: Idee:
Wenn Eingabeblock leer dann Ende $f(0) = 0$.
Wenn Eingabeblock nicht leer ist dann erstes I löschen, 2. (mit B getrennten) Block mit II erzeugen.
Sodann iterieren: solange 1. Block nicht leer ist erstes I löschen und am Ende des 2. Blocks II dazufügen.
Wenn 1. Block schließlich leer ist auf das Feld links vom 2. Block gehen.

Pseudocode:

```
begin
E ← f;
while ¬E do
    begin
        R;
        if t then E ← t
        else begin
            d_B; R;
            while ¬t do R;
            R;
            while ¬t do R;
            d_I; R; d_I;
            while ¬t do L;
            L;
            if t then begin R; E ← t end
                 else while ¬t do L
        end{else}
    end{while}
end{program}
```

Programm P: $(1, A)$ zur Turingmaschine mit $A =$

{
1: R <u>then</u> 2,
2: <u>if</u> t <u>then</u> 0 <u>else</u> 3,
3: d_B <u>then</u> 4,
4: R <u>then</u> 5,
5: <u>if</u> t <u>then</u> 7 <u>else</u> 6,
6: R <u>then</u> 5,
7: R <u>then</u> 8,
8: <u>if</u> t <u>then</u> 10 <u>else</u> 9,
9: R <u>then</u> 8,
10: d_I <u>then</u> 11,
11: R <u>then</u> 12,
12: d_I <u>then</u> 13,
13: <u>if</u> t <u>then</u> 15 <u>else</u> 14,
14: L <u>then</u> 13,
15: L <u>then</u> 16,
16: <u>if</u> t <u>then</u> 17 <u>else</u> 18,
17: R <u>then</u> 0,
18: <u>if</u> t <u>then</u> 1 <u>else</u> 19,
19: L <u>then</u> 18
}

Übung 9.2 *Sei f definiert als $f(n, m) = 2^{n+m}$. Geben Sie ein Programm P zur Registermaschine* RM_1^2 *an mit $ReS_P = f$.*

Lösung:
Idee:
(1) 2. Register in 1. laden.
(2) 2^x berechnen mit $x = n + m$.

Berechnung von 2^x durch iterierte Verdopplung.

Pseudocode:

```
begin
while ¬t2 do
        begin
            A1; S2
        end;
if t1 then A1 und Ende.
else  begin
        while ¬t1 do
                begin  A4; S1  end;
      A1; A2;
        while ¬t4 do
                begin
                        while ¬t1 do
                                begin  A3; S1  end;
                        while ¬t2 do
                                begin  A3; S2  end;
                        while ¬t3 do
                                begin
                                    S3; A1; A2
                                end
                      S4
                end{while}
end{program}.
```

Programm $(1, A)$ zur Registermaschine mit $A =$

$\{$
1: $\underline{\text{if}}$ t_2 $\underline{\text{then}}$ 4 $\underline{\text{else}}$ 2,
2: A_1 $\underline{\text{then}}$ 3,
3: S_2 $\underline{\text{then}}$ 1,
4: $\underline{\text{if}}$ t_1 $\underline{\text{then}}$ 5 $\underline{\text{else}}$ 6, $\{n + m = 0 \Rightarrow 2^{n+m} = 1\}$
5: A_1 $\underline{\text{then}}$ 0,
6: $\underline{\text{if}}$ t_1 $\underline{\text{then}}$ 9 $\underline{\text{else}}$ 7, {sichere $n + m$ in Register 4}
7: A_4 $\underline{\text{then}}$ 8,
8: S_1 $\underline{\text{then}}$ 6,
9: A_1 $\underline{\text{then}}$ 10, { initialisiere für Exponentiation}
10: A_2 $\underline{\text{then}}$ 11,
11: $\underline{\text{if}}$ t_4 $\underline{\text{then}}$ 0 $\underline{\text{else}}$ 12, {Berechnung von 2^{n+m}}
12: $\underline{\text{if}}$ t_1 $\underline{\text{then}}$ 15 $\underline{\text{else}}$ 13, {Reg. 1 in Reg. 3}
13: A_3 $\underline{\text{then}}$ 14,
14: S_1 $\underline{\text{then}}$ 12,
15: $\underline{\text{if}}$ t_2 $\underline{\text{then}}$ 18 $\underline{\text{else}}$ 16, {Reg. 2 in Reg. 3}
16: A_3 $\underline{\text{then}}$ 17,
17: S_2 $\underline{\text{then}}$ 15,
18: $\underline{\text{if}}$ t_3 $\underline{\text{then}}$ 22 $\underline{\text{else}}$ 19, {lade 3. in 1. und 2. Register}
19: S_3 $\underline{\text{then}}$ 20,
20: A_1 $\underline{\text{then}}$ 21,
21: A_2 $\underline{\text{then}}$ 18,
22: S_4 $\underline{\text{then}}$ 11 {Zähler erniedrigen}
$\}$

Übung 9.3 *Sei* $P\colon (1, A)$ *das folgende Programm zur Turingmaschine* TM_1^2 *mit*

$$
\begin{aligned}
A = \{1:\ & R\ \underline{\text{then}}\ 2,\\
2:\ & \underline{\text{if}}\ t\ \underline{\text{then}}\ 4\ \underline{\text{else}}\ 3,\\
3:\ & R\ \underline{\text{then}}\ 2,\\
4:\ & d_I\ \underline{\text{then}}\ 5,\\
5:\ & \underline{\text{if}}\ t\ \underline{\text{then}}\ 0\ \underline{\text{else}}\ 6,\\
6:\ & L\ \underline{\text{then}}\ 5\\
\}.&
\end{aligned}
$$

Bestimmen Sie $t_P(2, 2)$ *(welche Funktion berechnet* P*?).*

Lösung:
Wir geben Die Konfigurationsfolge von P auf der Eingabe $(2, 2)$ an. Dabei kennzeichnet $\hat{x}$ die Stellung des Kopfes.

$$
\begin{aligned}
&(1, \hat{B}IIBII) \Rightarrow (2, B\hat{I}IBII) \Rightarrow (3, B\hat{I}IBII) \Rightarrow (2, BI\hat{I}BII) \Rightarrow\\
&(3, BI\hat{I}BII) \Rightarrow (2, BII\hat{B}II) \Rightarrow (4, BII\hat{B}II) \Rightarrow (5, BII\hat{I}II) \Rightarrow\\
&(6, BII\hat{I}II) \Rightarrow (5, BI\hat{I}III) \Rightarrow (6, BI\hat{I}III) \Rightarrow (5, B\hat{I}IIII) \Rightarrow\\
&(6, B\hat{I}IIII) \Rightarrow (5, \hat{B}IIIII) \Rightarrow (0, \hat{B}IIIII).
\end{aligned}
$$

Insgesamt besteht die Folge aus 15 Konfigurationen, die Rechenzeit ist daher 14, i.e. $t_P(2, 2) = 14$.
$\mathcal{R}es_P = S \circ plus$.

Übung 9.4 *Sei* RM_n *die n-Registermaschine (siehe Skriptum Def. 4.4.1). Beweisen Sie, dass für jedes Programm* P *zu* RM_n *eine Konstante* K *existiert, sodass für alle Konfigurationen* (m,x) *für welche* m *eine Marke aus* P *ist, die Ungleichung*

$$||RS_P(m,x)|| \leq ||(K,x)||$$

gilt. Dabei ist $||y||$ *die Summennorm von* y*, i.e. für* $y=(y_1,\dots,y_k)$*:*

$$||(y_1,\dots,y_k)|| = \sum_{i=1}^{k} y_i.$$

Lösung:
Sei M die maximale Marke (Kennmarke oder Sprungmarke) welche im Programm P vorkommt. Dann gilt

$$||(m,x)|| \leq ||(M,x)||$$

für alle Marken m in P und $x \in \mathbb{N}^n$.
Ist f ein Funktionsbefehl in P so ist $f \in \{A_i, S_i \mid i=1,\dots,n\}$ und damit

$$||f(x)|| \leq ||x|| + 1.$$

Ist nun p: f <u>then</u> q eine Funktionsanweisung aus P dann gilt:

$$||RS_P(p,x)|| = ||(q,f(x))|| \leq ||(M,f(x))|| \leq ||(M,x)|| + 1 = ||(M+1,x)||.$$

Ist p: <u>if</u> t_i <u>then</u> q <u>else</u> r eine Test anweisung in P dann gilt

$$\begin{aligned} RS_P(p,x) &= (q,x) \text{ wenn } t_i(x) = \mathbf{t}, \\ RS_P(p,x) &= (r,x) \text{ wenn } t_i(x) = \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Jedenfalls gilt dann

$$||RS_P(p,x)|| \leq ||(M,x)||.$$

Insgesamt folgt für alle Marken m in P

$$||RS_P(m,x)|| \leq ||(M+1,x)||.$$

Die Konstante K kann also als $M+1$ gewählt werden. ◊

Übung 9.5 *Sei* P: $(A,1)$ *ein Programm zur 3-Registermaschine* RM_3 *mit*

$$\begin{aligned} A = \{1:&\ \underline{\text{if}}\ t_2\ \underline{\text{then}}\ 0\ \underline{\text{else}}\ 2, \\ 2:&\ A_1\ \underline{\text{then}}\ 3, \\ 3:&\ S_2\ \underline{\text{then}}\ 1\}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Funktion RS_P*.*

Lösung:

$$\begin{aligned} RS_P(n,x) &= (n,x) \text{ für } n \notin \{1,2,3\}, \\ RS_P(1,x) &= (0,x) \text{ für } I_2^3(x) = 0, \\ &= (2,x) \text{ für } I_2^3(x) \neq 0, \\ RS_P(2,x) &= (3,(S \times I^2)(x)) \text{ für alle } x \in \mathbb{N}^3, \\ RS_P(3,x) &= (1,(I^1 \times \min 1 \times I^1)(x)) \text{ für alle } x \in \mathbb{N}^3. \end{aligned}$$