Theoretische Informatik 2 – Übungsblatt 10 mit Musterlösungen

(LV-Nr.: 185.183, 185.231, WS 2004/2005)

Thema: Berechenbarkeit 3 – (Un-)Entscheidbarkeit

Übung 10.1 *Beweisen Sie, dass die Menge* $A\colon\{2^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ *rekursiv aufzählbar ist. Geben Sie insbesondere eine partiell rekursive Funktion* f *an mit* $D(f) = A$.

Lösung: Suche ein $f \in \mathrm{PREK}_1^1$ mit $D(f) = A$.
Definiere

$$f(k) \quad = \quad \min\{i \mid 2^i = k\}.$$

Dann gilt offensichtlich

$$k \in D(f) \Longleftrightarrow k \in A.$$

Es bleibt zu zeigen, dass f partiell rekursiv ist:

$$\begin{aligned} f(k) &= \min\{i \mid 2^i = k\} \\ &= \min\{i \mid (2^i \dot{-} k) + (k \dot{-} 2^i) = 0\} \\ &= \min\{i \mid g(k,i) = 0\} \end{aligned}$$

für $g(k,i) = (2^i \dot{-} k) + (k \dot{-} 2^i)$. g ist rekursiv (sogar primitiv rekursiv) und $f = \mu_0 g$; damit ist f partiell rekursiv.
Genauer gilt

$$g = E(\mathit{plus}; E(\mathit{minus}; \exp_2 \circ I_2^2, I_1^2), E(\mathit{minus}; I_1^2, \exp_2 \circ I_2^2)).$$

Mit $\exp_2(n) = 2^n$ für alle n. $\exp_2$ ist mittels $\{\mathrm{Pr}\} \cup BO$ aus $\{+\} \cup BF$ definierbar und damit in PR.

Übung 10.2 *Sei* RSI' *die universelle iterierte Rechenschrittfunktion wie im Beweis von Satz 4.7.1 definiert und sei das Prädikat* T *definiert als*

$$T(m,x,k) = \mathbf{t} \Longleftrightarrow RSI'(m,1,\delta(x),k) \in EK(P_m).$$

T ist rekursiv und heißt Kleene-Prädikat. *$T(m,x,k)$ bedeutet, dass Programm nr. m auf Eingabe x in $\leq k$ Schritten hält.*
Beweisen Sie mit Hilfe von T den folgenden Satz:
Sei $A \subseteq \mathbb{N}$. Wenn A und A^c beide rekursiv aufzählbar sind dann ist A entscheidbar ($A^c = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \notin A\}$).

Lösung: Da A und A^c r.a. sind gibt es $f, g \in \text{PREK}_1^1$ mit

$$A = D(f),\ A^c = D(g).$$

Sei nun ϕ die zu T gehörige universelle Funktion. Dann gibt es $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\phi_m = f,\ \phi_n = g$. Es gilt dann insbsondere

$$\begin{array}{l} x \in A \Longleftrightarrow x \in D(\phi_m) \Longleftrightarrow (\exists k)T(m,x,k), \\ x \in A^c \Longleftrightarrow x \in D(\phi_n) \Longleftrightarrow (\exists k)T(n,x,k). \end{array}$$

Da $A \cup A^c = \mathbb{N}$ gilt

$$(*)\ \mathbb{N} = \{x \mid (\exists k)T(m,x,k) \vee (\exists k)T(n,x,k)\}.$$

Definiere nun

$$g(x) = \min\{k \mid T(m,x,k) \vee T(n,x,k)\}.$$

Dann ist $g \in \text{PREK}$ wegen $g = \mu P$ für ein rekursives Prädikat P. Dass P rekursiv ist folgt aus Satz 4.2.1 weil T rekursiv ist. Wegen $(*)$ ist g auch total und somit rekursiv. Für g gilt

$$(+)\ \mathbb{N} = \{x \mid T(m,x,g(x)) \vee T(n,x,g(x))\}.$$

Sei nun h definiert als

$$\begin{array}{rcl} h(x) & = & 1 \text{ wenn } T(m,x,g(x)) \\ & = & 0 \text{ wenn } T(n,x,g(x)) \end{array}$$

Dann ist $h \in \text{REK}$ wegen Satz 4.2.1 und $h = 1_A$. Damit ist A entscheidbar.

Übung 10.3 *Beweisen Sie dass H_ϕ^c nicht rekursiv aufzählbar ist. Verwenden Sie dabei den Satz aus Übung nr. 2 (H_ϕ wie in Definition 4.7.2).*

Lösung: Es gilt $H_\phi = \{x \mid (x,x) \in D(\phi)\}$. Sei nun $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $\psi(x) = \phi(x,x)$. Dann folgt offensichtlich $H_\phi = D(\psi)$. Ferner ist ψ partiell rekursiv, da ϕ partiell rekursiv ist und wegen $\psi = \phi \circ \Delta_2^1$. Folglich ist H_ϕ rekursiv aufzählbar. Angenommen, H_ϕ^c ist auch rekursiv aufzählbar. Dann ist nach dem Satz in Übung 2 H_ϕ entscheidbar, im Widerspruch zu Satz 4.7.2.

Übung 10.4 *Sei ϕ eine universelle Funktion. Beweisen Sie, dass die Menge $\{x \mid \phi(x,x) = x\}$ unentscheidbar ist.*

Lösung: Angenommen A: $\{x \mid \phi(x,x) = x\}$ ist entscheidbar. Dann ist die Funktion f, definiert als

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \phi(x,x) \text{ wenn } x \in A, \\ &= x \text{ wenn } x \notin A \end{aligned}$$

rekursiv. Dies gilt da ϕ partiell rekursiv ist und damit (wegen Satz 4.2.1) f partiell rekursiv. f ist aber auch total da für $x \in A$ $\phi(x,x) = x$ und damit $(x,x) \in D(\phi)$.
Da ϕ universell ist existiert ein i mit $\phi_i = f$ und daher

$$\begin{aligned} \phi(i,x) &= 1 + \phi(x,x) \text{ wenn } x \in A, \\ &= x \text{ wenn } x \notin A \end{aligned}$$

Angenommen $i \in A$:
Per Def. von ϕ_i gilt dann $\phi(i,i) = 1 + \phi(i,i)$.
Per Def. von A gilt aber $\phi(i,i) = i$ und somit $i = 1 + i$, Widerspruch!

Angenommen $i \notin A$:
Per Def. von ϕ_i gilt $\phi(i,i) = i$.
Per Def. von A gilt aber $\phi(i,i) \neq i$, Widerspruch!

Daraus folgt, dass A unentscheidbar ist.

Übung 10.5 *Eine universelle Funktion ϕ heißt* Gödelnumerierung *wenn die folgende Eigenschaft gilt:*
Für alle $f \in \mathrm{PREK}_1^2$ existiert ein $h \in \mathrm{REK}_1^1$ mit

$$\phi(h(x), y) = f(x,y) \quad \textit{für alle } x, y \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Kleene Prädikates T (siehe Übung nr. 2), dass für Gödelnumerierungen ϕ die Menge

$$C_0\colon \ \{x \mid (\forall y)\phi(x,y) = 0\}$$

unentscheidbar ist (führen Sie die Unentscheidbarkeit von C_0 auf jene von H_ϕ zurück).

Lösung: Sei g die Funktion

$$\begin{aligned} g(x,y) &= 1 \text{ wenn } T(x,x,y), \\ &= 0 \text{ wenn } \neg T(x,x,y). \end{aligned}$$

Da T ein rekursives Prädikat ist, so ist wegen Satz 4.2.1 $g \in \mathrm{REK}_1^2$.
Da ϕ eine Gödelnumerierung ist existiert ein $h \in \mathrm{REK}_1^1$ mit

$$\begin{aligned} \phi(h(x),y) &= 1 \text{ wenn } T(x,x,y), \\ &= 0 \text{ wenn } \neg T(x,x,y). \end{aligned}$$

Es gilt dann

$$x \in H_\phi^c \iff (\forall y)\neg T(x,x,y) \iff (\forall y)\phi(h(x),y) = 0,$$

und damit

$$(*)\ x \in H_\phi^c \iff h(x) \in C_0.$$

Angenommen nun C_0 ist e.b. Da h rekursiv ist dann auch die Menge $\{x \mid h(x) \in C_0\}$ entscheidbar. In der Tat gilt

$$h(x) \in C_0 \iff (1_{C_0} \circ h)(x) = 1.$$

Wegen $(*)$ folgt dann $H_\phi^c = \{x \mid h(x) \in C_0\}$ und H_ϕ^c ist entscheidbar, im Widerspruch zu Satz 4.7.2.

Daraus folgt, dass C_0 unentscheidbar ist.