Zusatzübung 10.11.2004 – 12.11.2004

1 Variablenbedingungen

Beispiel 1:
Die Regel $\forall r$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A(x/y)}{\Gamma \vdash \Delta, (\forall x)A}\ \forall r$$

Mit der Bedingung (VB1), d.h. y kommt weder in A noch in Γ, Δ vor. Ohne diese Bedingung ist die Inferenz inkorrekt.

1.a. y kommt in Γ vor:

$$\frac{S\colon\ P(y) \vdash P(y)}{S'\colon\ P(y) \vdash (\forall x)P(x)}$$

mit $\Gamma = P(y)$, Δ leer, und $A = P(x)$.
Diese Inferenz ist inkorrekt, da S gültig, dagegen S' nicht gültig ist. Eine Interpretation die S' falsifiziert ist z.b.

$$\begin{array}{l} \mathcal{M} = (\{0,1\}, \Phi, I) \text{ mit} \\ \Phi(P)(0) = \mathbf{t},\ \Phi(P)(1) = \mathbf{f},\ I(v) = 0 \text{ für alle } v \in V. \end{array}$$

In der Tat ist $P(y)$ wahr in $\mathcal{M}$, $(\forall x)P(x)$ aber falsch in $\mathcal{M}$.

1.b. y kommt in A vor:

$$\frac{S\colon\ (\forall x)P(x,x) \vdash P(y,y)}{S'\colon\ (\forall x)P(x,x) \vdash (\forall x)P(x,y)}$$

Mit $A = P(x,y)$ und $\Gamma = (\forall x)P(x,x)$, Δ leer.
Auch diese Inferenz ist inkorrekt, da S gültig ist, S' dagegen nicht. Eine Interpretation die S' falsifiziert ist z.b.

$$\begin{array}{l} \mathcal{M} = (\{0,1\}, \Phi, I) \text{ mit} \\ \Phi(P)(0,0) = \Phi(P)(1,1) = \mathbf{t},\ \Phi(P)(0,1) = \Phi(P)(1,0) = \mathbf{f}, \\ I(v) = 0 \text{ für alle } v \in V. \end{array}$$

Beispiel 2:
Die Regel $\forall l$.

$$\frac{A(x/t), (\forall x)A, \Gamma \vdash \Delta}{(\forall x)A, \Gamma \vdash \Delta}\ \forall l$$

Mit der Variablenbedingung (VB2), i.e. t enthält keine Variable welche in A gebunden ist. Ohne (VB2) können sich inkorrekte Inferenzen ergeben. Z.B.

$$\frac{S\colon (\exists y)P(y,y), (\forall x)(\exists y)P(x,y) \vdash (\exists y)P(y,y)}{S'\colon (\forall x)(\exists y)P(x,y) \vdash (\exists y)P(y,y)}$$

Hier mit Γ leer, $\Delta = (\exists y)P(y,y)$, $A = (\exists y)P(x,y)$ und $t = y$. Klarerweise kommt y in A gebunden vor. Wiederum ist die Inferenz inkorrekt, da S gültig ist, nicht dagegen S'. Eine falsifizierende Interpretation für S' ist z.B. $\mathcal{M}$: $(\mathbb{N}, \Phi, I)$ mit $\Phi(P) =<$ und I beliebig.

2 Quantorenregeln: Reihenfolge

Bei Rückwärtsableitung ist eine bestimmete Reihenfolge von Quantorenregeln einzuhalten, und zwar: so früh wie möglich $\forall r$ und $\exists l$ abarbeiten, dann erst $\forall l$ und $\exists r$. Dies ist für die Beweisfindung nötig, da sonst keine *Gleichsetzung* von Termen erfolgen kann. In der Tat müssen $\forall r$ und $\exists l$ immer *neue* Variable generieren, während $\forall l$ und $\exists r$ von *alten Termen* Gebrauch machen können und auch müssen!

Beispiel:
Zu beweisen ist das Sequent

$$\neg(\exists x)(\forall y)P(x,y) \vdash (\forall u)(\exists v)\neg P(u,v).$$

Nach $\neg l$ ergibt sich

$$\vdash (\forall u)(\exists v)\neg P(u,v), (\exists x)(\forall y)P(x,y).$$

Die Reihenfolge der Quantorenabarbeitung muss nun sein:
1. $(\forall u)$, 2. $(\exists x)$, 3. $(\forall y)$, 4. $(\exists v)$. Der zugehörige Beweis ist

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{P(x_1,x_2) \vdash P(x_1,x_2), X, Y}{\vdash \neg P(x_1,x_2), P(x_1,x_2), X, Y}\ \neg r}{\vdash (\exists v)\neg P(x_1,v), P(x_1,x_2), X}\ \exists r}{\vdash (\exists v)\neg P(x_1,v), (\forall y)P(x_1,y), X}\ \forall r}{\vdash (\exists v)\neg P(x_1,v), (\exists x)(\forall y)P(x,y)}\ \exists r}{\vdash (\forall u)(\exists v)\neg P(u,v), (\exists x)(\forall y)P(x,y)}\ \forall r$$

Mit $X = (\exists x)(\forall y)P(x,y)$, $Y = (\exists v)\neg P(x_1,v)$.
Es ist leicht zu überprüfen, dass jede andere Quantorenreihenfolge (z.b. 1. $(\forall u)$, 2. $(\exists v)$, etc.) nicht zielführend ist.

3 Quantorenregeln: Mehrfachverwendung

Der Grund dafür, dass in den Regeln $\forall l$ und $\exists r$ die eingeführten Formeln auch in der Prämisse vorkommen, liegt in der Notwendigkeit der Mehrfachverwendung. Die Mehrfachverwendung von Formeln entspricht dabei der Mehrfachverwendung von Eigenschaften oder Prinzipien in mathematischen Beweisen.

Beispiel:
Mehrfachverwendung von $\forall$-Formeln.
Betrachten wir z.B. die Permutation π: $\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$, d.h. jene Transformation die das erste Element in das zweite, das zweite in das dritte, und das dritte in das erste überführt. Zweimalige Anwendung von π auf (a,b,c) liefert (b,c,a) und zwar wegen

$$(a,b,c) \Longrightarrow (c,a,b) \Longrightarrow (b,c,a).$$

Die Tatsache, dass durch (eventuell mehrfache) Anwendung von π auf (a,b,c) die Konfiguration (b,c,a) erzeugt werden kann, kann durch folgende prädikatenlogische Formel ausgedrückt werden:

$$[P(a,b,c) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x,y,z) \supset P(z,x,y))] \supset P(b,c,a).$$

Sei nun $X = (\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x,y,z) \supset P(z,x,y))$.
Von X werden genau die Instanzen

$$1.\{x \leftarrow a, y \leftarrow b, z \leftarrow c\},\ 2.\{x \leftarrow c, y \leftarrow a, z \leftarrow b\}$$

zur Einführung der Allquantoren benötigt. Mit diesen Variablenersetzungen und den Abkürzungen

$$\begin{array}{rcl} X_1 & = & (\forall y)(\forall z)(P(a,y,z) \supset P(z,a,y)), \\ X_2 & = & (\forall z)(P(a,b,z) \supset P(z,a,b)), \\ X_3 & = & (\forall y)(\forall z)(P(c,y,z) \supset P(z,c,y)), \\ X_4 & = & (\forall z)(P(c,a,z) \supset P(z,c,a)), \end{array}$$

ergibt sich dann durch Rückwärtsableitung das Sequent

$$\begin{array}{l} S\colon P(a,b,c), P(a,b,c) \supset P(c,a,b), P(c,a,b) \supset P(b,c,a), \\ X, X_1, X_2, X_3, X_4 \vdash P(b,c,a). \end{array}$$

S ist aussagenlogisch beweisbar, wovon man sich leicht überzeugen kann.

4 Resolution: Umbenennung

Zwei Gründe für die Umbenennung von Variablen in Klauseln:

(a) zwecks Unfikation,

(b) Vermeidung unnützer Spezialisierung.

ad (a):
Sei $\mathcal{C}$ die Klauselmenge

$$\{\vdash P(x);\ P(f(x)) \vdash\}.$$

$\mathcal{C}$ ist unerfüllbar, aber ohne Umbenennung der Variablen mit Resolution nicht widerlegbar. Der Grund liegt darin, dass die Menge $\{P(x), P(f(x))\}$ nicht unifizierbar ist (das zugehörige System $\{x \doteq f(x)\}$ ist unlösbar). Benennt man jedoch etwa die Variable x der zweiten Klausel auf y um, so ergibt sich die 1-Schritt Resolutionswiderlegung

$$\frac{\vdash P(x) \quad P(f(y)) \vdash}{\vdash}$$

mit A.U. $\{x \leftarrow f(y)\}$.

ad (b):
Sei $\mathcal{C}$ die Klauselmenge

$$\{\vdash P(x), Q(x);\ P(u) \vdash R(x);\ Q(a) \vdash;\ R(b) \vdash\}.$$

Die ersten zwei Klauseln enthalten beide die Variable x. Die Unifikation von $\{P(x), P(u)\}$ stellt kein Problem dar. Resolvieren wir nun die erste und zweite Klausel ohne Umbenennung so ergibt sich

$$\frac{\vdash P(x), Q(x) \quad P(u) \vdash R(x)}{D\colon \vdash Q(x), R(x)}$$

Nimmt man nun D und die letzten 2 Klauseln von $\mathcal{C}$ so ergibt sich

$$\mathcal{C}'\colon\ \{\vdash Q(x), R(x);\ Q(a) \vdash;\ R(b) \vdash\}.$$

$\mathcal{C}'$ ist erfüllbar (warum?), wodurch sich D für eine Widerlegung als nutzlos erweist. Benennt man dagegen die zweite Klausel in $\mathcal{C}$ auf $P(u) \vdash R(y)$ um, so ergibt sich statt D die Klausel $D'\colon \vdash Q(x), R(y)$. Die Klauselmenge

$$\mathcal{C}''\colon\ \{\vdash Q(x), R(y);\ Q(a) \vdash;\ R(b) \vdash\}.$$

ist nun unerfüllbar (und D' "brauchbar"):

$$\dfrac{\dfrac{\vdash Q(x), R(y) \quad Q(a) \vdash}{\vdash R(y)} \qquad R(b) \vdash}{\vdash}$$

5 Resolution: Beweissuche

Wie bei Beweisen im prädikatenlogischen LK ist es zweckmäßig bei der Suche von Resolutionswiderlegungen einen *Beweisplan* zu entwickeln. Das Erkennen des zu Grunde liegenden mathematischen Prinzips eines Satzes erleichert dabei das Finden der richtigen Inferenzen. Wir nehmen das Permutationsbeispiel von vorher, formalisieren es aber in der Klausellogik statt im LK:

$$\mathcal{C} = \{\vdash P(a,b,c);\ P(x,y,z) \vdash P(z,x,y);\ P(b,c,a) \vdash\}.$$

Da die Permutation zwei Mal angewendet werden muss um von (a,b,c) auf (b,c,a) zu kommen, muss die zweite Klausel zwei mal angewendet werden (analog zur Doppelverwendung der prädikatenlogischen Formel vorher). Ein Resolutionsbeweis ist etwa:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash P(a,b,c) \quad P(x,y,z) \vdash P(z,x,y)}{\vdash P(c,a,b)} \qquad P(u,v,w) \vdash P(w,u,v)}{\vdash P(b,c,a)} \qquad P(b,c,a) \vdash}{\vdash}$$

Wir geben noch einen zweiten Beweis an, welchem ein anderer Gedankengang zu Grunde liegt. Anstatt die Permutation π (gegeben durch die zweite Klausel) zwei mal anzuwenden, erzeugen wir die *neue* Permutation $\pi \circ \pi$ durch Anwendung der zweiten Klausel auf sich selbst. Diesem Beweis entspricht kein LK-Beweis ohne Schnitt (mit Schnitt dagegen schon). Wir geben den Resolutionsbeweis an:

$$\dfrac{\dfrac{\vdash P(a,b,c) \qquad \dfrac{P(x,y,z) \vdash P(z,x,y) \quad P(u,v,w) \vdash P(w,u,v)}{P(x,y,z) \vdash P(y,z,x)}}{\vdash P(b,c,a)} \qquad P(b,c,a) \vdash}{\vdash}$$

Die abgeleitete Klausel $P(x,y,z) \vdash P(y,z,x)$ enstpricht dabei der $\forall$-Formel A: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x,y,z) \supset P(y,z,x))$. Diese Formel A kann in keinem schnittfreien LK-Beweis des vorigen prädikatenlogischen Satzes auftreten. In der Tat ist A ein "Lemma", welches nur mittels Schnittregel herleitbar ist.