1. (a) X sei eine sG mit $W(X < 0) = 0$ und $\mu = \mathbb{E}(X)$. Zeigen Sie:

$$W(X > 2\mu) \leq \frac{1}{2}$$

   Hinweis: Gehen Sie analog zum Beweis der Tschebyscheff'schen Ungleichung in der VO vor.

   *(b) Überprüfen Sie die obige Beziehung empirisch an Hand der Poissonverteilung. (Verwenden Sie dazu R.)

2. Ermitteln Sie eine sG X mit $\mu = \mathbb{E}(X)$ und $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$, sodaß:

$$\text{(a) } W(|X - \mu| \geq 3\sigma) = \frac{1}{9} \qquad \text{(b) } W(|X - \mu| \geq 5\sigma) = 0.04$$

   Was bedeuten derartige sGn für die Tschebyscheff'sche Ungleichung?

   Hinweis: Betrachten Sie 3–punktige diskrete sGn mit $M_X = \{-1, 0, 1\}$.

3. Die gemeinsame Dichte von X und Y sei gegeben wie folgt:

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   (a) Bestimmen Sie die Randdichten von X und Y.
   (b) Sind X und Y (stochastisch) unabhängig?
   (c) Berechnen Sie $W(X + Y \leq 1)$.

4. Fortsetzung von **Bsp 3**:

   (a) Berechnen Sie $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
   (b) Wie groß ist die Korrelation ρ_{XY} ?
   *(c) Ermitteln Sie die Regressionsfunktionen von Y bezüglich X und von X bezüglich Y und stellen Sie beide graphisch dar.

5. X und Y seien bivariat normalverteilt mit den Parametern $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 1$, $\sigma_1^2 = 16$, $\sigma_2^2 = 25$ und $\rho = \frac{3}{5}$. Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

   (a) $W(3 < Y < 8)$
   (b) $W(3 < Y < 8 | X = 7)$
   (c) $W(-3 < X < 3)$
   (d) $W(-3 < X < 3 | Y = -4)$

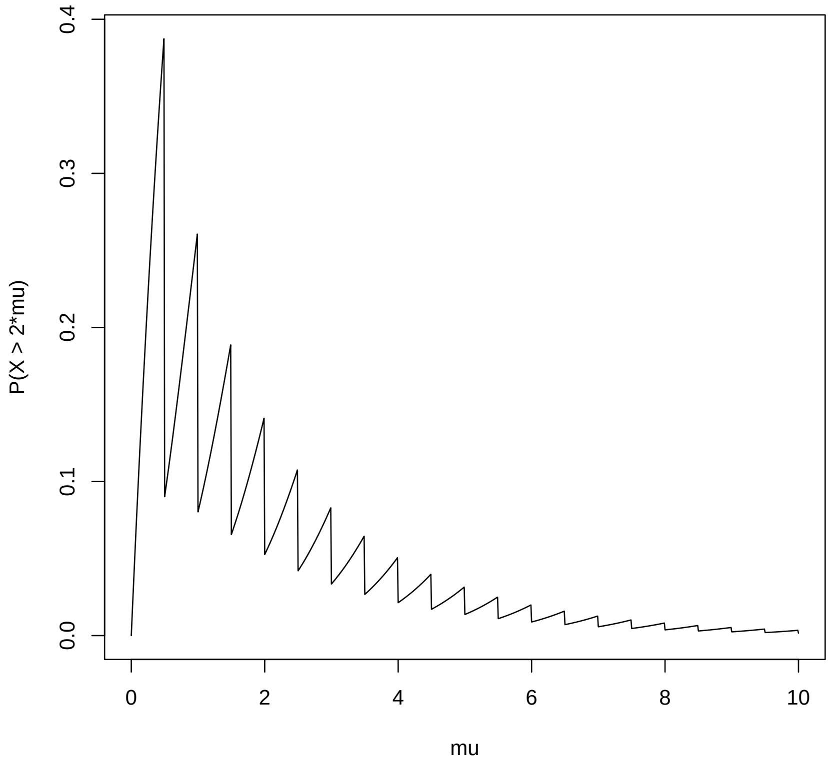
6. X und Y seien bivariat normalverteilt mit den Parametern $\mu_1 = 5$, $\mu_2 = 10$, $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 25$ und $\rho > 0$. Wenn $W(4 < Y < 16 | X = 5) = 0.954$, wie groß ist dann ρ ?

Lösungen zum 8. Blatt

1. (a) Beweis für stetiges X:

$$\begin{aligned}\mu = \int_0^\infty x f(x)\,dx &= \int_0^{2\mu} x f(x)\,dx + \int_{2\mu}^\infty x f(x)\,dx \\ &\geq \int_0^{2\mu} x f(x)\,dx + 2\mu \int_{2\mu}^\infty f(x)\,dx \\ &\geq 2\mu \int_{2\mu}^\infty f(x)\,dx = 2\mu\, W(X > 2\mu)\end{aligned}$$

*(b)
```
mu <- seq(0,10,by=0.01)
P <- 1-ppois(2*mu,mu)
plot(mu,P,type="l",xlab="mu",ylab="P(X > 2*mu)")
```

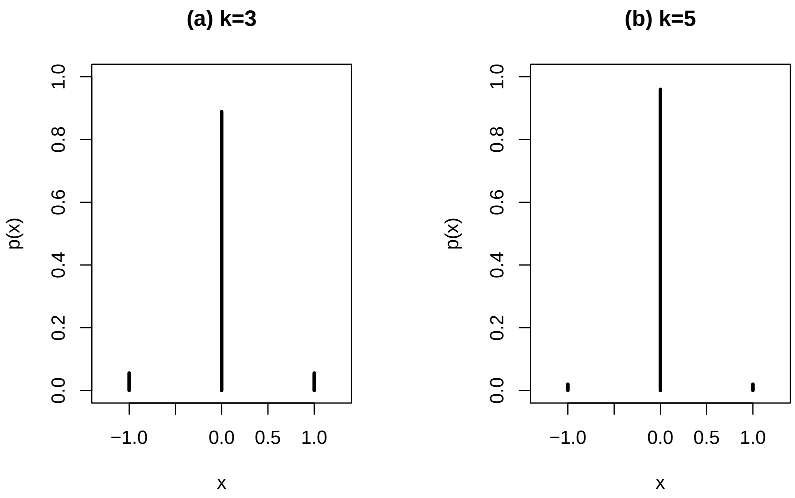


2. Allgemein: $p_X(-1) = p_X(1) = \dfrac{1}{2k^2}, \quad p_X(0) = 1 - \dfrac{1}{k^2}, \quad k > 0$

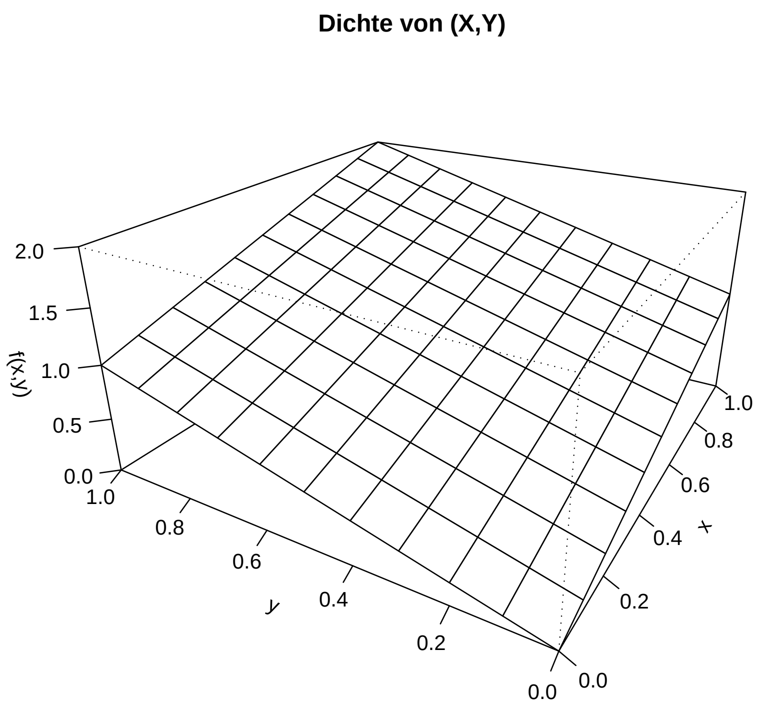
$\implies \mathbb{E}(X) = 0, \quad \operatorname{Var}(X) = \dfrac{1}{k^2}$

$W(|X-\mu| \geq k\sigma) = W(|X| \geq 1) = \dfrac{1}{k^2}$

Gleichheit in der Tschebyscheff'schen Ungleichung bedeutet, daß unter den gegebenen Voraussetzungen die Ungleichung nicht verschärft werden kann.



3.



(a) $f_1(x) = \int_0^1 (x+y)\,dy = x + \frac{1}{2}, \quad 0 < x < 1$

$$f_2(y) = \int_0^1 (x+y)\,dx = y + \frac{1}{2}, \quad 0 < y < 1$$

(b) Nein: $f(x,y) \neq f_1(x)\, f_2(y)$

(c)

$$W(X+Y \leq 1) = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y)\, dy\, dx = \int_0^1 \left[x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2}\right] dx$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right] dx = \frac{1}{3}$$

4. (a) $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{7}{12}$; Symmetrie: $\mathbb{E}(Y) = \frac{7}{12}$

$$\mathbb{E}(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 \left[x^2 y + xy^2\right] dx\, dy$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2}\right] dy = \frac{1}{3}$$

Verschiebungssatz: $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3} - \frac{49}{144} = -\frac{1}{144}$

(b) $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{5}{12}$; $\mathrm{Var}(X) = \frac{5}{12} - \frac{49}{144} = \frac{11}{144}$

Symmetrie: $\mathrm{Var}(Y) = \frac{11}{144}$

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\frac{11}{144}\frac{11}{144}}} = -\frac{1}{11}$$

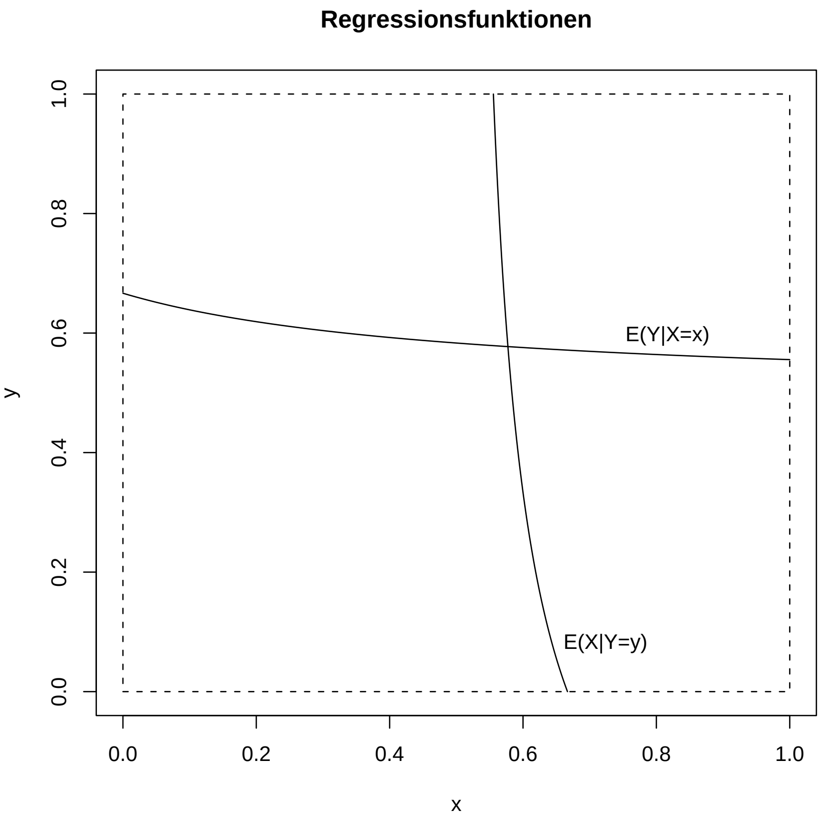
*(c) $f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{x+y}{x+1/2}, \quad 0 < y < 1$

Regressionsfunktion von Y bezüglich X:

$$\mathbb{E}(Y|X=x) = \int_0^1 y f(y|x)\, dy = \int_0^1 \frac{y(x+y)}{x+1/2}\, dy = \frac{3x+2}{6x+3}, \quad 0 < x < 1$$

Regressionsfunktion von X bezüglich Y:

$$\mathbb{E}(X|Y=y) = \frac{3y+2}{6y+3}, \quad 0 < y < 1$$



5. (a) $W(3 < Y < 8) = \Phi\left(\frac{8-1}{5}\right) - \Phi\left(\frac{3-1}{5}\right) = 0.2638$

(b) $\mathbb{E}(Y|X = 7) = 1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} \cdot (7 - 3) = 4$

$\text{Var}(Y|X = 7) = \left(1 - \frac{9}{25}\right) \cdot 25 = 16$

$W(3 < Y < 8|X = 7) = \Phi\left(\frac{8-4}{4}\right) - \Phi\left(\frac{3-4}{4}\right) = 0.4401$

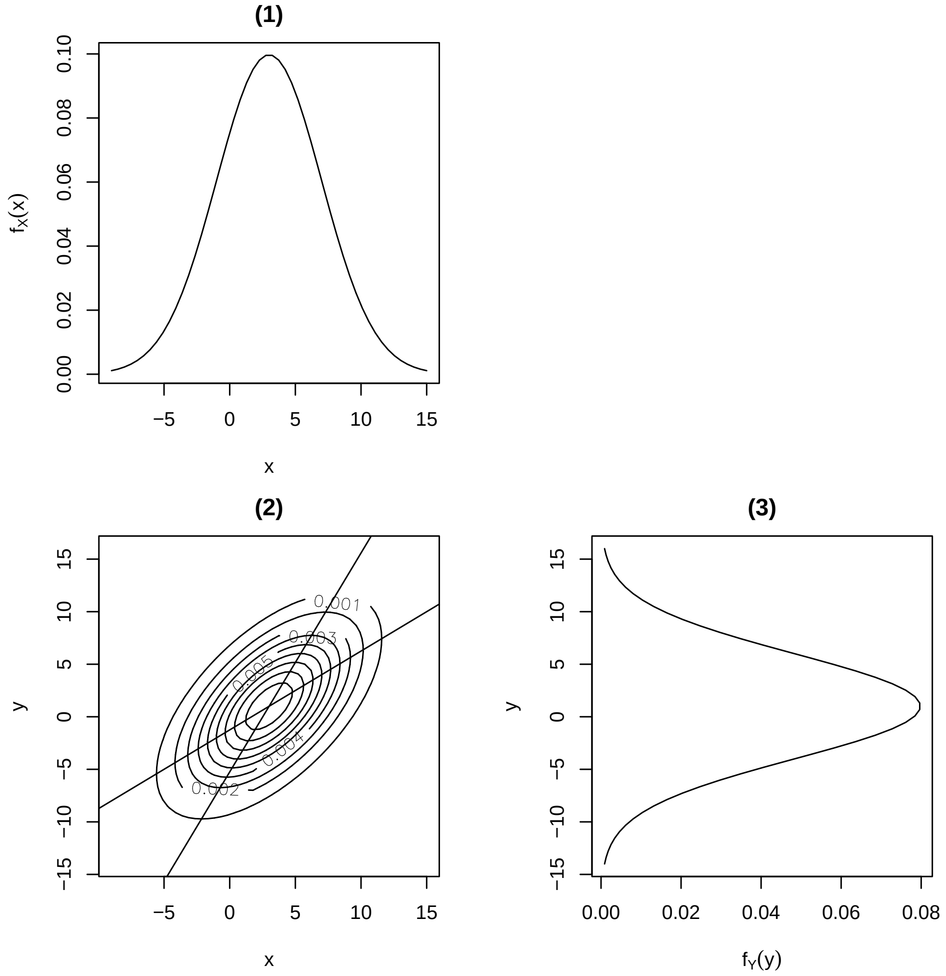
(c) $W(-3 < X < 3) = \Phi\left(\frac{3-3}{4}\right) - \Phi\left(\frac{-3-3}{4}\right) = 0.4332$

(d) $\mathbb{E}(X|Y = -4) = 3 + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot (-4 - 1) = \frac{3}{5}$

$\text{Var}(X|Y = -4) = \left(1 - \frac{9}{25}\right) \cdot 16 = \left(\frac{16}{5}\right)^2$

$W(-3 < X < 3|Y = -4) = \Phi\left(\frac{3 - 3/5}{16/5}\right) - \Phi\left(\frac{-3 - 3/5}{16/5}\right) = 0.6431$

Contourplot von $f(x,y)$ (2) und Randdichten von X (1) und Y (3)



Anm.: Die in (2) eingezeichneten Geraden sind die Regressionsfunktionen.

6. $\mathbb{E}(Y|X=5) = 10 + \rho\,\frac{5}{1}\,(5-5) = 10; \quad \mathrm{Var}(Y|X=5) = (1-\rho^2)\cdot 25$

$$W(4 < Y < 16|X=5) = 2\Phi\left(\frac{6}{5\sqrt{1-\rho^2}}\right) - 1 = 0.954$$

$$\frac{6}{5\sqrt{1-\rho^2}} = u_{(1+0.954)/2} = u_{0.977} \approx 2 \quad \Longrightarrow \quad \rho \approx \frac{4}{5}$$

Anm.: Die exakte Rechnung ergibt $\rho = 0.7990$