<table>
<tr><td colspan="2">Ue Statistik u. Wahrscheinlichkeitsth. f. Inf.
107.251 W 2004|5
http://www.statistik.tuwien.ac.at/RISueb/</td><td>Di 12:00 – 18:00
6.Blatt</td></tr>
<tr><td>Werner GURKER
Spr.: Di u. Do 11–12</td><td>Tel.: 58801–10724
e–mail: W.Gurker@tuwien.ac.at</td><td>30. Nov. 2004</td></tr>
</table>

1. Berechnen Sie (a) den Erwartungswert und (b) die Varianz für die sG X von **Bsp 4-1**. Verwenden Sie für (b) den Verschiebungssatz.

2. *(a) Zeigen Sie: Ist X eine auf den nichtnegativen ganzen Zahlen diskret verteilte sG mit Verteilungsfunktion $F(x)$, so gilt:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{\infty} [1 - F(x)]$$

   (b) Berechnen Sie mit Hilfe von (a) den Erwartungswert einer geometrisch verteilten sG, $X \sim G_p$, mit Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$p_X(x) = p\,(1-p)^{x-1}, \; x = 1, 2, 3, \ldots$$

   (a) Wie lautet der Erwatungswert für die sG X von **Bsp 5-1**, unbedingt und bedingt durch $X \geq 3$?

3. Die sG X habe die Dichte $f(x) = 3x^2$, $0 < x < 1$ ($f(x) = 0$ sonst). Berechnen Sie (a) den Erwartungswert und (b) die Streuung der Fläche des aus X und $1 - X$ gebildeten Rechtecks. Verwenden Sie dabei den „Satz vom unbewußten Statistiker“.

4. Eine Telefongesellschaft berechnet die Gebühren nach folgendem Schema: 20 c für die ersten 3 Minuten (oder weniger); 8 c pro Minute für jede zusätzliche Gesprächszeit. Ist X die Gesprächsdauer, so gilt also für die Kosten Y (in EUR):

$$Y = \begin{cases} 0.20 & 0 \leq X \leq 3 \\ 0.20 + 0.08\,(X - 3) & X > 3 \end{cases}$$

   Berechnen Sie die mittleren Kosten eines Gesprächs, wenn man davon ausgeht, daß die Dauer eines Gesprächs eine auf dem Intervall $(0, c)$ stetig uniform verteilte sG ist. Welcher Geraden nähert sich $\mathbb{E}(Y)$ für $c \to \infty$? (*Was ergibt sich für den Median der Kosten?)

5. X sei eine standardnormalverteilte sG, $X \sim N(0, 1)$. Berechnen Sie den Erwartungswert von $|X|$.

6. Berechnen Sie (a) den Erwartungswert und (b) die Streuung (= positive Wurzel aus der Varianz) für die Wartezeit von **Bsp 5-6**. Verwenden Sie für (b) den Verschiebungssatz.

*) Beispiel(teil) auf freiwilliger Basis (wird bevorzugt im Konversatorium behandelt).

Lösungen zum 6. Blatt

1. (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=1}^{100} \frac{x^2}{5050} = \frac{100 \times 101 \times 201}{6 \times 5050} = \frac{402}{6} = 67$$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x=1}^{100} \frac{x^3}{5050} = \frac{1}{5050}\left[\frac{100 \times 101}{2}\right]^2 = 5050$$

$$\mathrm{Var}(X) = 5050 - 67^2 = 561$$

2. *(a) Reihe umordnen:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{k=x+1}^{\infty} p(k) = \sum_{x=0}^{\infty} W\{X > x\} = \sum_{x=0}^{\infty} \big[1 - F(x)\big]$$

(b) $F(x) = 1 - (1-p)^x, \ x = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{\infty} \big[1 - F(x)\big] = \sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x = \frac{1}{p}$$

(c) Unbedingt: Um 1 nach links verschobene $G_{1/3}$–Verteilung.

$$\mathbb{E}(X) = 3 - 1 = 2$$

Bedingt durch $X \geq 3$: Um 2 nach rechts verschobene $G_{1/3}$–Verteilung.

$$\mathbb{E}(X | X \geq 3) = 3 + 2 = 5$$

3. Fläche: $Y = X(1-X)$

(a) $\displaystyle\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 x(1-x)\, 3x^2 \, dx = \int_0^1 (3x^3 - 3x^4)\, dx = \frac{3}{4} - \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$

(b) $\displaystyle\mathbb{E}(Y^2) = \int_0^1 x^2(1-x)^2\, 3x^2 \, dx = \int_0^1 (3x^4 - 6x^5 + 3x^6)\, dx = \frac{3}{5} - 1 + \frac{3}{7} = \frac{1}{35}$

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{35} - \frac{9}{400} = \frac{17}{2800}$$

4. Satz vom unbewußten Statistiker:

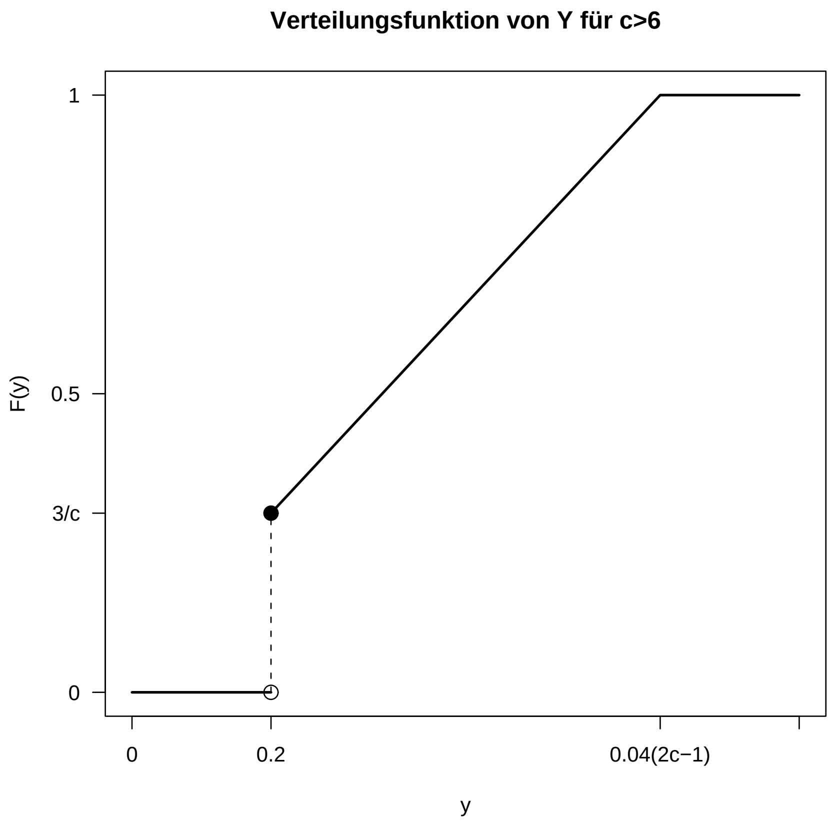
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \int_0^3 0.20\, f_X(x)\, dx + \int_3^\infty \big[0.20 + 0.08\,(x-3)\big]\, f_X(x)\, dx \\
&= 0.2 \int_0^\infty f_X(x)\, dx + 0.08 \int_3^\infty (x-3)\, f_X(x)\, dx \\
&= 0.2 + 0.08 \int_3^\infty (x-3)\, f_X(x)\, dx
\end{aligned}$$

Speziell für $f_X(x) = \dfrac{1}{c}\, I_{(0,c)}(x)$ ergibt sich:

$$\mathbb{E}(Y) = \begin{cases} 0.2 & c \leq 3 \\ 0.2 + 0.08 \displaystyle\int_3^c \frac{x-3}{c}\, dx = 0.2 + 0.04 \left(c - 6 + \frac{9}{c}\right) & c > 3 \end{cases}$$

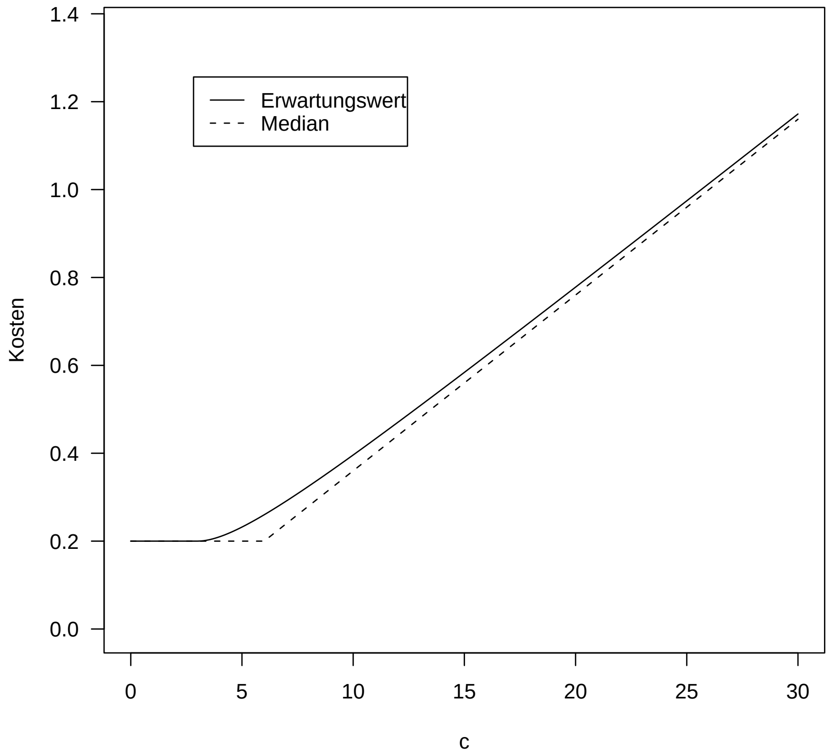
Für großes c gilt: $\mathbb{E}(Y) \doteq 0.2 + 0.04\,(c-6)$

* Zur Berechnung des Medians:



Anm.: Die Kosten liegen zwischen 0.2 und $0.2 + 0.08\,(c-3) = 0.04\,(2c-1)$.

Median: $\quad \widetilde{y} = \begin{cases} 0.2 & c < 6 \\ 0.2 + 0.04\,(c-6) & c > 6 \end{cases}$



5. Satz vom unbewußten Statistiker:

$$\mathbb{E}(|X|) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\, dx = 2\int_{0}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\, dx = \frac{-2}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\Big|_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

6. $p(0) = \dfrac{1}{3}; \quad f^*(x) = \dfrac{2}{30} e^{-x/10},\ x > 0$

(a) $\mathbb{E}(X) = 0 \cdot p(0) + \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{2x}{30}\, e^{-x/10}\, dx = \frac{2}{3} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{x}{10}\, e^{-x/10}\, dx}_{=10} = \frac{20}{3}$

(b) $\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \cdot p(0) + \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{2x^2}{30}\, e^{-x/10}\, dx = \frac{2}{3} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{x^2}{10}\, e^{-x/10}\, dx}_{=200} = \frac{400}{3}$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{400}{3} - \frac{400}{9} = \frac{800}{9}; \quad \text{Streuung} = \sqrt{\frac{800}{9}} = 9.428$$

Anm.: $X \sim Ex_\tau$: $\quad \mathbb{E}(X) = \tau, \quad \mathbb{E}(X^2) = 2\tau^2, \quad \mathrm{Var}(X) = \tau^2$