Ue Statistik u. Wahrscheinlichkeitsth. f. Inf.	Di 12:00 – 18:00
107.251 W 2004|5 http://www.statistik.tuwien.ac.at/RISueb/	**9.Blatt**
Werner GURKER Tel.: 58801–10724 Spr.: Di u. Do 11–12 e–mail: W.Gurker@tuwien.ac.at	11. Jän. 2005

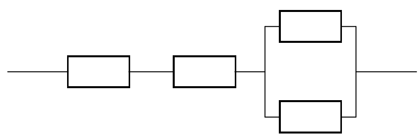
1. Einer der Inputs eines Programms ist eine stochastische Größe Λ; die Dichte von Λ ist gegeben durch:

$$f_\Lambda(\lambda) = \lambda\, e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0$$

   Bedingt durch $\Lambda = \lambda$ ist die Ausführungszeit des Programms eine exponentialverteilte stochastische Größe mit Mittel $1/\lambda$. Ermitteln Sie die Dichte für die Ausführungszeit X des Programms.

   Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die gemeinsame Dichte von (X, Λ).

2. Die logische Struktur eines Systems bestehend aus vier Komponenten sei gegeben wie folgt:



   Die Lebensdauern der Komponenten seien unabhängig und identisch verteilt mit Dichte $f(x) = e^{-x}\, I_{(0,\infty)}(x)$. Bestimmen Sie die Dichte für die Lebensdauer des Systems sowie den Mittelwert der Lebensdauer.

   Hinweis: Ermitteln Sie zuerst die Verteilungsfunktion.

3. Zwei Flugzeuge fliegen in dieselbe Richtung in parallelen angrenzenden Korridoren. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist das 1. Flugzeug um 10 km dem 2. Flugzeug voraus. Angenommen, die Geschwindigkeiten (km/h) der beiden Flugzeuge sind unabhängige normalverteilte sGn mit:

	Mittelwert	Streuung
1. Flugzeug	520	10
2. Flugzeug	500	10

   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß nach 2 Stunden das 2. Flugzeug das 1. Flugzeug (zumindest) eingeholt hat?

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Abstand der Flugzeuge nach 2 Stunden nicht mehr als 10 km beträgt?

   *(c) Wiederholen Sie (a) und (b), wenn die Geschwindigkeiten der Flugzeuge nicht unabhängig sondern gemeinsam normalverteilt mit $\rho = 0.5$ sind.

4. Die Lebensdauer X eines Bauteils sei eine uniform verteilte sG auf dem Intervall $(0, 1)$. Fällt der Bauteil aus, wird er sofort durch einen Reservebauteil mit auf dem Intervall $(0, 2)$ uniform verteilter Lebensdauer Y ersetzt. Bestimmen (und zeichnen) Sie die Dichte der Gesamtlebensdauer, d.h. bestimmen Sie die Dichte von $S = X + Y$. Mittelwert und Streuung von S ?

5. Eine ideale Münze wird 500 Mal geworfen und X sei die Anzahl der Würfe, bei denen Kopf erscheint.

   (a) Bestimmen Sie auf Basis des Zentralen Grenzverteilungssatzes einen näherungsweisen Wert für die Wahrscheinlichkeit, daß X um mehr als 30 von 250 abweicht. (Welche Abschätzung ergibt sich nach der Tschebyscheff'schen Ungleichung?)

   (b) Bestimmen Sie einen approximativen Wert für $W(X = 250)$.

6. Ein Programm bestehe aus $n = 100$ Seiten Code und X_i sei die Anzahl der Fehler auf der i–ten Seite. Angenommen, die X_i's sind unabhängig und identisch Poisson–verteilt mit Mittel 1. Wenn $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ die Gesamtzahl der Fehler ist, bestimmen Sie auf Basis des Zentralen Grenzverteilungssatzes einen approximativen Wert für $W(Y < 90)$. (Rechnen Sie mit Stetigkeitskorrektur.)

Lösungen zum 9. Blatt

1. Laut Angabe gilt:

$$f_\Lambda(\lambda) = \lambda e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0; \qquad f(x \mid \Lambda = \lambda) = f(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

Gemeinsame Dichte von (X, Λ):

$$f(x, \lambda) = f(x|\lambda)\, f_\Lambda(\lambda) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+1)}, \quad x > 0,\ \lambda > 0$$

Randdichte von X:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \lambda)\, d\lambda = \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(x+1)}\, d\lambda$$

Zurückführen des Integrals auf die Gammafunktion:

$$\lambda(x+1) = u \quad \longrightarrow \quad d\lambda = \frac{du}{x+1}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{(x+1)^3} \int_0^{\infty} u^2\, e^{-u}\, du = \frac{\Gamma(3)}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^3}, \quad x > 0$$

Anm.: Die Verteilung von X ergibt sich als (kontinuierliche) Mischung von Exponentialverteilungen (bedingte Ausführungszeiten) nach einer Gamma–Verteilung (Input).

2. X_i = Lebensdauer der i–ten Komponente, $i = 1, 2, 3, 4$ (unabhängig)

X = Lebensdauer des Systems

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= W(X \le x) = 1 - W(X > x) \\
&= 1 - W\big(\min\big\{X_1, X_2, \max\{X_3, X_4\}\big\} > x\big) \\
&= 1 - W\big(X_1 > x, X_2 > x, \max\{X_3, X_4\} > x\big) \\
&= 1 - W(X_1 > x)\, W(X_2 > x)\, W\big(\max\{X_3, X_4\} > x\big) \\
&= 1 - W(X_1 > x)\, W(X_2 > x)\, \big[1 - W\big(\max\{X_3, X_4\} \le x\big)\big] \\
&= 1 - W(X_1 > x)\, W(X_2 > x)\, \big[1 - W(X_3 \le x, X_4 \le x)\big] \\
&= 1 - W(X_1 > x)\, W(X_2 > x)\, \big[1 - W(X_3 \le x)\, W(X_4 \le x)\big]
\end{aligned}$$

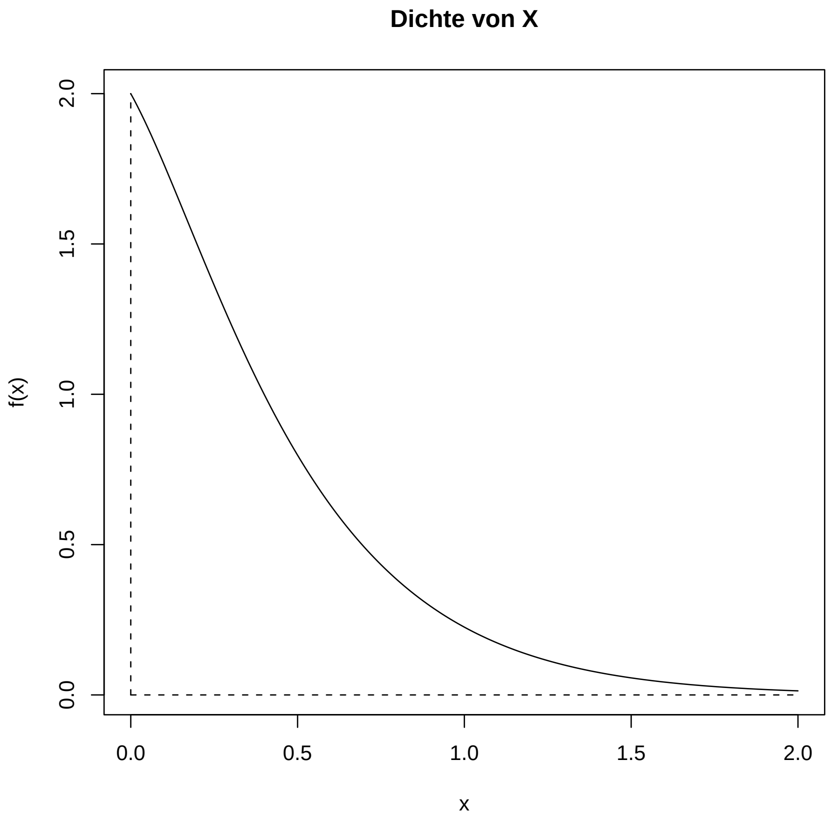
Einsetzen von $F_{X_i}(x) = W(X_i \le x) = 1 - e^{-x}$, $x > 0$:

$$F_X(x) = 1 - e^{-2x}\big[1 - (1 - e^{-x})^2\big] = 1 - 2e^{-3x} + e^{-4x}, \quad x > 0$$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = 6e^{-3x} - 4e^{-4x}, \quad x > 0$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x\big[6e^{-3x} - 4e^{-4x}\big]\,dx = 2\int_0^\infty 3xe^{-3x}\,dx - \int_0^\infty 4xe^{-4x}\,dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

$$\textit{Anm.:} \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x}\,dx = \text{Mittelwert von } Ex_{1/\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$



3. X_i = Geschwindigkeit des i–ten Flugzeugs, $i = 1, 2$

   (a) Gesucht: $W(2X_2 \geq 10 + 2X_1) = W(X_2 - X_1 \geq 5)$

   $X_2 - X_1 \sim N(500 - 520, 10^2 + 10^2) = N(-20, 200)$

   $$W(X_2 - X_1 \geq 5) = 1 - \Phi\left(\frac{5 + 20}{\sqrt{200}}\right) = 1 - \Phi(1.7678) = 0.0385$$

   (b) Gesucht: $W\big(|2X_2 - (10 + 2X_1)| \leq 10\big) = W(0 \leq X_2 - X_1 \leq 10)$

   $$W(0 \leq X_2 - X_1 \leq 10) = \Phi\left(\frac{30}{\sqrt{200}}\right) - \Phi\left(\frac{20}{\sqrt{200}}\right) = 0.0617$$

   *(c) $X_2 - X_1 \sim N(500 - 520, 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 0.5) = N(-20, 100)$

   $$W(X_2 - X_1 \geq 5) = 1 - \Phi\left(\frac{5 + 20}{10}\right) = 1 - \Phi(2.5) = 0.0062$$

   $$W(0 \leq X_2 - X_1 \leq 10) = \Phi(3) - \Phi(2) = 0.0214$$

4. Die Dichte von $S = X + Y$ ergibt sich durch Faltung von f_X und f_Y: $f_S = f_X * f_Y$

$$f_X(x) = I_{(0,1)}(x), \quad f_Y(y) = \frac{1}{2}\, I_{(0,2)}(y)$$

$$f_S(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(z-t)\, f_Y(t)\, dt = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} I_{(0,1)}(z-t)\, I_{(0,2)}(t)\, dt$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 < z-t < 1 \\ \\ 0 < t < 2 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{c} z-1 < t < z \\ \\ 0 < t < 2 \end{array} \right\} \iff \max\{0, z{-}1\} < t < \min\{2, z\}$$

Fallunterscheidung:

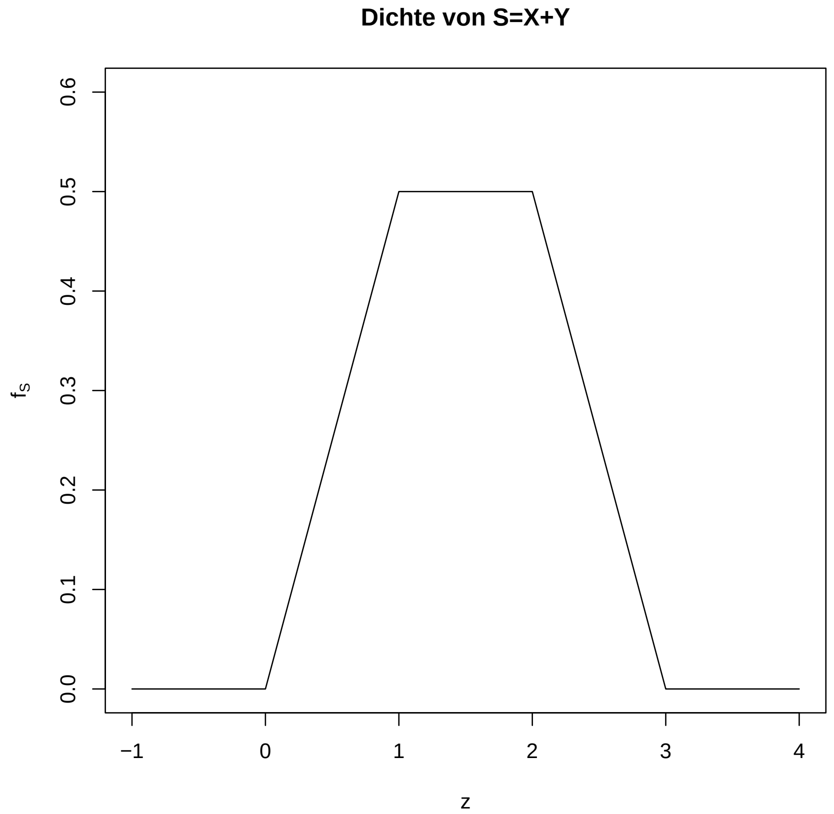
(1) $\underline{z \leq 0:}$ $\quad f_S(z) = 0$

(2) $\underline{0 < z \leq 1:}$ $\max\{0, z-1\} = 0,\ \min\{2, z\} = z$: $\quad f_S(z) = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{z} dt = \frac{z}{2}$

(3) $\underline{1 < z \leq 2:}$ $\max\{0, z-1\} = z-1,\ \min\{2, z\} = z$: $\quad f_S(z) = \frac{1}{2} \int\limits_{z-1}^{z} dt = \frac{1}{2}$

(4) $\underline{2 < z \leq 3:}$ $\max\{0, z-1\} = z-1,\ \min\{2, z\} = 2$: $\quad f_S(z) = \frac{1}{2} \int\limits_{z-1}^{2} dt = \frac{3-z}{2}$

(5) $\underline{z > 3:}$ $\quad f_S(z) = 0$



$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\operatorname{Var}(S) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) = \frac{1}{12} + \frac{4}{12} = \frac{5}{12}, \quad \text{Streuung} = \sqrt{\frac{5}{12}} = 0.6455$$

5. Normalapproximation von $X \sim B_{500,1/2}$ (mit Stetigkeitskorrektur):

   (a)

$$\begin{aligned} W\big(|X-250| > 30\big) &= 1 - W(220 \le X \le 280) \\ &\approx 1 - \left[\Phi\left(\frac{280.5-250}{\sqrt{500/4}}\right) - \Phi\left(\frac{219.5-250}{\sqrt{500/4}}\right)\right] \\ &= 1 - \big[\Phi(2.7280) - \Phi(-2.7280)\big] \\ &= 2\,\big[1 - \Phi(2.7280)\big] \\ &= 0.0064 \qquad \text{(exakt: 0.0063)} \end{aligned}$$

   Tschebyscheff'sche Ungleichung:

$$W\big(|X-250| > 30\big) = W\big(|X-250| \ge 31\big) \le \frac{\operatorname{Var}(X)}{31^2} = \frac{125}{961} = 0.1301$$

   (b)

$$\begin{aligned} W(X=250) &\approx \Phi\left(\frac{250.5-250}{\sqrt{125}}\right) - \Phi\left(\frac{249.5-250}{\sqrt{125}}\right) \\ &= 2\Phi(0.0447) - 1 \\ &= 0.0357 \qquad \text{(exakt: 0.0357)} \end{aligned}$$

6. Normalapproximation von $Y \sim P_{100}$ (mit Stetigkeitskorrektur):

$$W(Y < 90) = W(Y \le 89) \approx \Phi\left(\frac{89.5-100}{\sqrt{100}}\right) = 1 - \Phi(1.05) = 0.1469$$

   (exakt: 0.1463)