Ue Statistik u. Wahrscheinlichkeitsth. f. Inf.	Di 12:00 – 18:00
107.251 W 2004|5 http://www.statistik.tuwien.ac.at/RISueb/	**4.Blatt**
Werner GURKER Tel.: 58801–10724 Spr.: Di u. Do 11–12 e–mail: W.Gurker@tuwien.ac.at	16. Nov. 2004

1. Betrachten Sie einen Behälter, der Karten mit jeweils einer aufgedruckten Nummer von $1, 2, \ldots, 100$ enthält. Es gebe i Karten mit der Nummer i für $i = 1, 2, \ldots, 100$. Abgesehen von der aufgedruckten Nummer sind die Karten identisch. Nach guter Durchmischung des Behälters wird eine Karte zufällig entnommen und X sei die Nummer auf dieser Karte.

   (a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X, d.h. ermitteln Sie $W\{X = i\}$ für $i = 1, 2, \ldots, 100$.

   (b) Berechnen Sie $W\{X \leq 50\}$.

   (c) Ermitteln Sie einen Ausdruck für die Verteilungsfunktion von X. (Erstellen Sie eine Skizze/Zeichnung.)

2. Betrachten Sie die folgende Funktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \dfrac{x+2}{4} & -1 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

   (a) Zeichnen Sie die Funktion und überprüfen Sie an Hand der Zeichung, daß $F(x)$ eine Verteilungsfunktion ist. (Welche Eigenschaften müssen erfüllt sein?)

   (b) Ermitteln Sie: $W\{X = 0\}$; $W\{X = 1\}$; $W\{-1 < X < 1\}$; $W\{2 < X \leq 3\}$; $W\{-1/2 < X \leq 1/2\}$.

3. Die Zahl der Erkältungen, die man sich pro Jahr zuzieht, sei eine nach Poisson verteilte stochastische Größe mit Parameter $\mu = 3$. Ein neues Mittel wird beworben, das den Poisson–Parameter bei 75% der Bevölkerung auf $\mu = 2$ reduziert; auf die restlichen 25% der Bevölkerung hat das Mittel keine Auswirkungen.

   (a) Wenn jemand das Mittel ein Jahr lang ausprobiert, und in dieser Zeit eine Erkältung hat, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Mittel einen positiven Effekt hat?

   (b) Ab wievielen Erkältungen pro Jahr ist die Wahrscheinlichkeit einer positiven Auswirkung kleiner als 1/2 ?

4. Ermitteln Sie für eine binomialverteilte stochastische Größe, $X \sim B_{n,p}$, die Stelle(n) größter Wahrscheinlichkeit (die *Modalwerte*).

   Hinweis: Betrachten Sie die Quotienten von aufeinander folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$\frac{W\{X = k+1\}}{W\{X = k\}}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

5. Ein Problem aus den Anfängen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (S. Pepys (1633–1703) in einem Brief an I. Newton (1643–1727)): Welches der folgenden Ereignisse ist am wahrscheinlichsten?

   Mindestens 1 Sechser beim Werfen von 6 Würfeln.

   Mindestens 2 Sechser beim Werfen von 12 Würfeln.

   Mindestens 3 Sechser beim Werfen von 18 Würfeln.

   Ermitteln Sie auch einen allgemeinen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses der obigen Art.

6. Eine Packung enthält 10 Chips derselben Größe und Form. Genau zwei der Chips sind defekt. Jemand zieht ohne Zurücklegen in zufälliger Reihenfolge einen Chip nach dem anderen bis der zweite defekte Chip gezogen wird. X sei die Nummer dieser Ziehung.

   (a) Ermitteln Sie $W\{X = k\}$, $k = 2, 3, \ldots, 10$.

   (b) Berechnen Sie $W\{X \leq 4\}$.

   (c) Zeichnen Sie die Verteilungsfunktion von X.

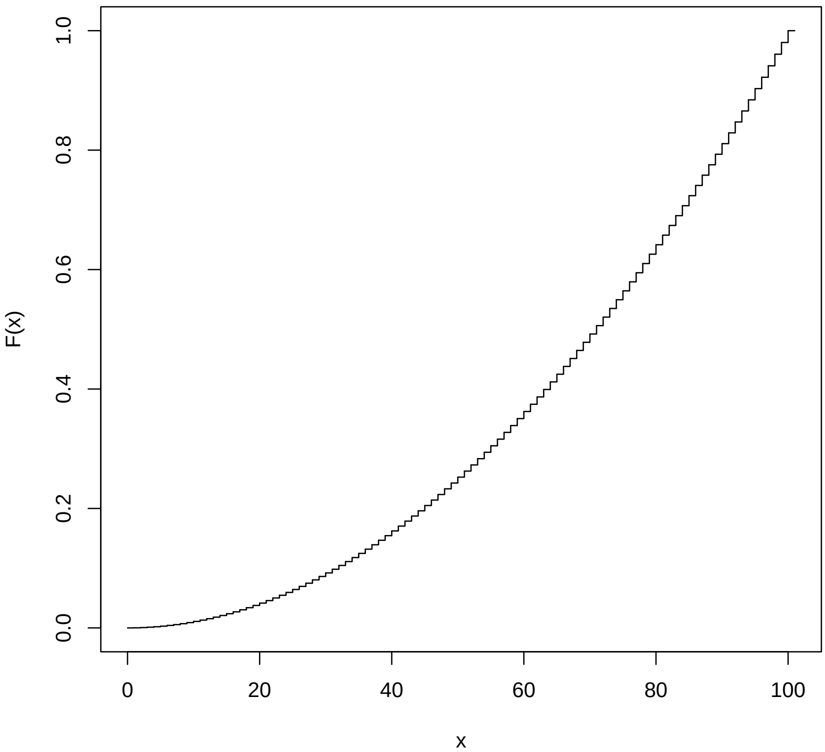
Lösungen zum 4. Blatt

1. (a) $\sum_{i=1}^{100} i = \dfrac{101 \times 100}{2} = 5050$

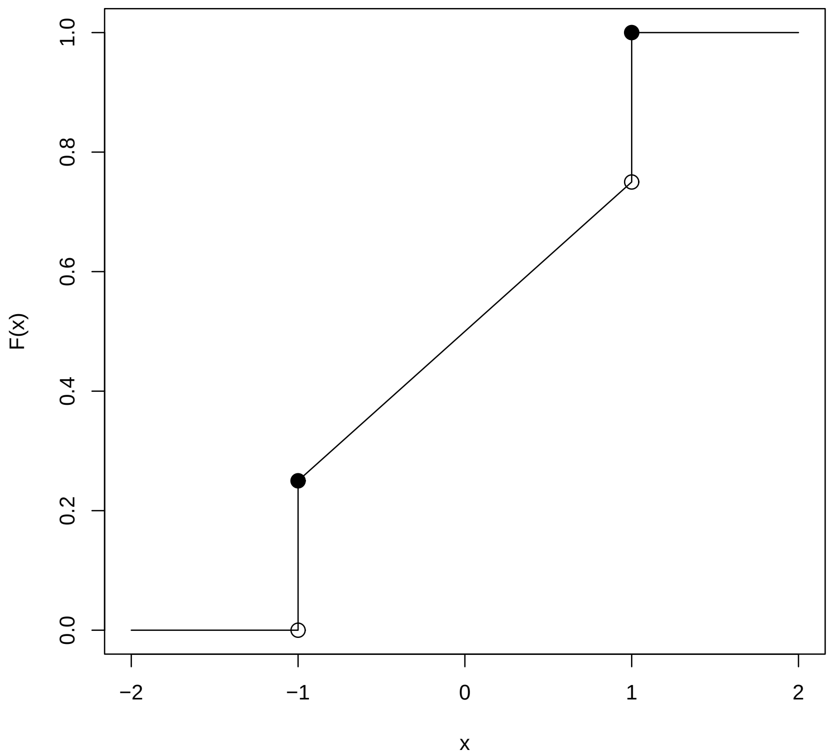
$$p(x) = W\{X = x\} = \frac{x}{5050}, \; x = 1, 2, \ldots, 100$$

(b) $\dfrac{1}{5050} \sum_{i=1}^{50} i = \dfrac{(51 \times 50)/2}{5050} = \dfrac{1275}{5050} = \dfrac{51}{202} = 0.2525$

(c) $F(x) = \dfrac{1}{5050} \sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor} i = \dfrac{\lfloor x \rfloor(\lfloor x \rfloor + 1)}{10100}, \; 0 \leq x \leq 100$



2. (a)



(b) $W\{X=0\}=0$; $W\{X=1\}=\dfrac{1}{4}$; $W\{-1<X<1\}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$

$W\{2<X\le 3\}=0$; $W\left\{-\dfrac{1}{2}<X\le\dfrac{1}{2}\right\}=\dfrac{1}{4}$

3. E = Mittel hat eine positive Wirkung

X = Zahl der Erkältungen pro Jahr (und Person)

(a) Bayes'sche Formel:

$$W\{E|X=1\}=\frac{W\{X=1|E\}\,W(E)}{W\{X=1|E\}\,W(E)+W\{X=1|\overline{E}\}\,W(\overline{E})}$$

$$=\frac{2\,e^{-2}\times 0.75}{2\,e^{-2}\times 0.75+3\,e^{-3}\times 0.25}=0.8446$$

(b)

x	Prob
0	0.8908
1	0.8446
2	0.7838
3	0.7073
4	0.6170
5	0.5178

x	Prob
6	0.4172
7	0.3231
8	0.2414
9	0.1750
10	0.1239

4.
$$\frac{\binom{n}{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}} = \frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{1-p} \geq 1 \iff (n+1)p \geq k+1$$

$$k_{\text{mod}} = \begin{cases} \lfloor (n+1)p \rfloor & (n+1)p \notin \mathbb{N} \\ (n+1)p-1,\ (n+1)p & (n+1)p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

5. Mindestens n Sechser bei $6n$ Würfeln:

$$\sum_{k=n}^{6n} \binom{6n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{6n-k} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{6n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{6n-k}$$

6n	n	Prob
6	1	0.6651
12	2	0.6187
18	3	0.5973
24	4	0.5845
30	5	0.5757
96	16	0.5424
600	100	0.5170
900	150	0.5139

6. Berechnung über die hypergeometrische Verteilung:

(a) $W\{X=k\} = \dfrac{\binom{8}{k-2}\binom{2}{1}}{\binom{10}{k-1}} \cdot \dfrac{1}{11-k} = \dfrac{k-1}{45},\ k = 2, 3, \ldots, 10$

(b) $\displaystyle\sum_{i=2}^{4} W\{X=k\} = \frac{2}{15}$

Oder: $1 - \dfrac{\binom{8}{4}\binom{2}{0} + \binom{8}{3}\binom{2}{1}}{\binom{10}{4}} = 1 - \dfrac{70+56\times 2}{210} = \dfrac{2}{15}$

(c) $F(x) = \sum_{k=2}^{x} \frac{k-1}{45} = \frac{x(x-1)}{90}, \; x = 2, 3, \ldots, 10$

$$\text{Oder: } F(x) = 1 - \frac{\binom{8}{x} + 2\binom{8}{x-1}}{\binom{10}{x}}, \; x = 2, 3, \ldots, 10$$