Ue Statistik u. Wahrscheinlichkeitsth. f. Inf.	Di 12:00 – 18:00
107.251 W 2004|5 http://www.statistik.tuwien.ac.at/RISueb/	**5.Blatt**
Werner GURKER Tel.: 58801–10724 Spr.: Di u. Do 11–12 e–mail: W.Gurker@tuwien.ac.at	23. Nov. 2004

1. X habe die folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$p(x) = W\{X = x\} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^x, \ x = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (p(x) = 0 \text{ sonst})$$

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X bedingt durch $X \geq 3$. Kommentieren Sie das Ergebnis.

2. Ein Liniensegment wird durch einen zufällig gewählten Punkt in zwei Teile zerlegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der größere Teil mindestens dreimal so lang wie der kleinere Teil ist? Gehen Sie von einer uniformen Verteilung aus.

3. Ermitteln Sie die Dichte $f(x)$, das 25%– und das 60%–Quantil der folgenden Verteilungsfunktionen:

   (a) $F(x) = \exp\big(-e^{-x}\big), \ -\infty < x < \infty$

   (b) $F(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\tan^{-1}(x), \ -\infty < x < \infty$

   Skizzieren/Zeichnen Sie $F(x)$ und $f(x)$.

4. X sei eine normalverteilte stochastische Größe $X \sim N(70, 9)$:

   (a) Berechnen Sie $W\{67 < X < 75\}$.

   (b) Bestimmen Sie die Quartile von X (d.h. das 25%, 50% und 75%–Quantil).

   (c) Ermitteln Sie c so, daß $W\{70 - c < X < 70 + c\} = 0.95$.

5. Ermitteln Sie für die logarithmische Normalverteilung $X \sim LN(0, 1)$:

   (a) die Wahrscheinlichkeit von $X > 1$;

   (b) die Dichte (+ Skizze/Zeichnung);

   (c) die Quartile von X (d.h. das 25%, 50% und 75%–Quantil).

6. Bei einer Serviceeinrichtung wird man entweder sofort bedient – mit Wahrscheinlichkeit 1/3 – oder man hat eine nach Ex_{10} verteilte Wartezeit (Einheit: Minuten). Bestimmen Sie:

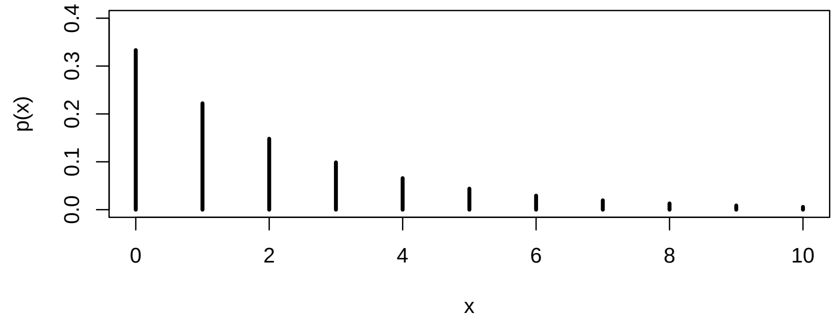
   (a) die Verteilungsfunktion der Wartezeit (+ Skizze/Zeichnung);

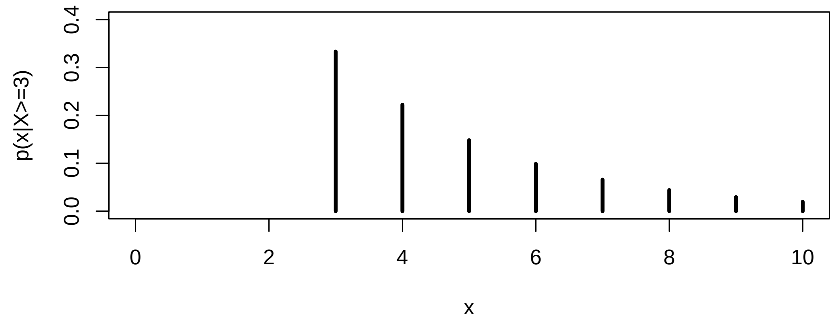
   (b) den Median der Wartezeit;

   (c) die Wahrscheinlichkeit noch mindestens weitere 10 Minuten warten zu müssen, wenn man bereits 10 Minuten gewartet hat.

1. $W\{X \geq 3\} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

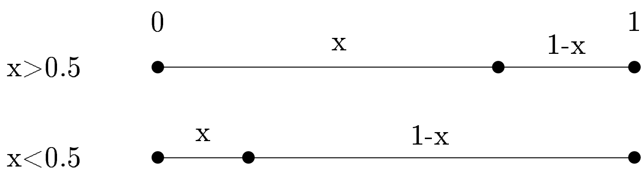
   $$p(x|X \geq 3) = \frac{p(x)}{W\{X \geq 3\}} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3}, \; x = 3, 4, \ldots$$





   $W\{X = x|X \geq 3\} = W\{X = x - 3\}, \; x = 3, 4, \ldots$

2. O.B.d.A. sei die Länge des Segments gleich 1.



   Satz von der vollständigen Wahrscheinlichkeit:

   $$p = W\left\{X > \frac{3}{4}\middle| X > \frac{1}{2}\right\} W\left\{X > \frac{1}{2}\right\} + W\left\{X < \frac{1}{4}\middle| X < \frac{1}{2}\right\} W\left\{X < \frac{1}{2}\right\}$$

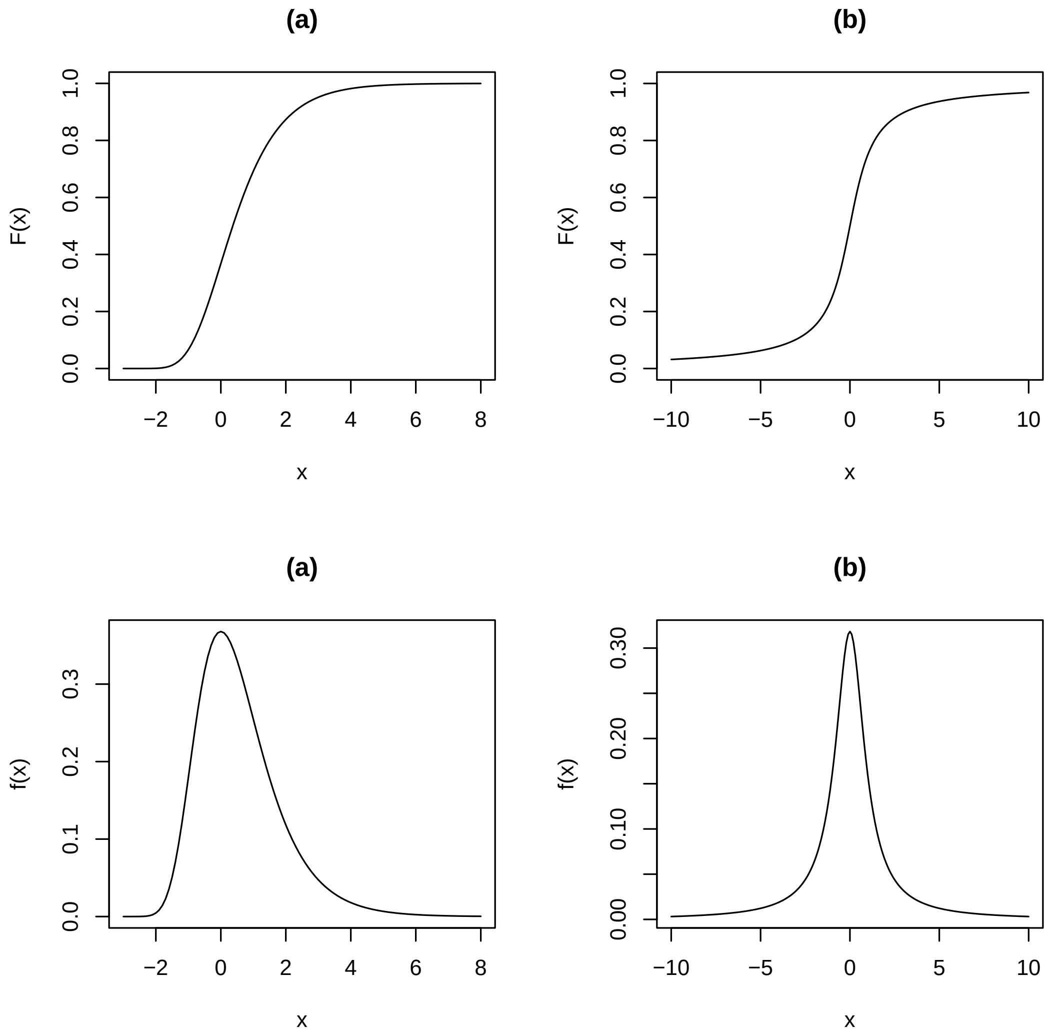
   $$= \frac{W\{X > 3/4\}}{W\{X > 1/2\}} \times \frac{1}{2} + \frac{W\{X < 1/4\}}{W\{X < 1/2\}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

3. (a) $f(x) = F^{'}(x) = e^{-x} \exp\big(-e^{-x}\big), \; -\infty < x < \infty$

$x_p = F^{-1}(p) = -\ln(-\ln p); \quad x_{0.25} = -0.3266, \quad x_{0.60} = 0.6717$

(b) $f(x) = F^{'}(x) = \dfrac{1}{\pi\,(1 + x^2)}, \; -\infty < x < \infty$

$x_p = F^{-1}(p) = \tan\left(\pi\,(p - 0.5)\right); \quad x_{0.25} = -1, \quad x_{0.60} = 0.3249$



4. (a) $W\{67 < X < 75\} = \Phi\left(\dfrac{5}{3}\right) - \Phi\left(-\dfrac{3}{3}\right) = \Phi(1.67) - \big[1 - \Phi(1)\big] =$

$= 0.9525 - [1 - 0.8413] = 0.7938$

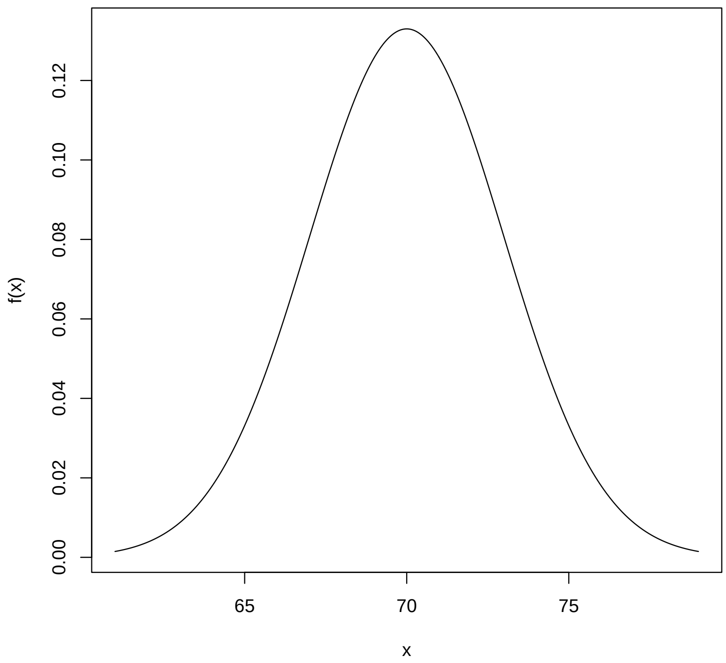
(b) $x_p = 70 + 3u_p; \quad -u_{0.25} = u_{0.75} = 0.6745; \quad u_{0.50} = 0$

25%	50%	75%
67.98	70	72.02

(c) $W\{70 - c < X < 70 + c\} = \Phi\left(\dfrac{c}{3}\right) - \Phi\left(-\dfrac{c}{3}\right) = 2\Phi\left(\dfrac{c}{3}\right) - 1 = 0.95$

$\Phi\left(\dfrac{c}{3}\right) = 0.975; \quad c = 3\,u_{0.975} = 3 \times 1.96 = 5.88$

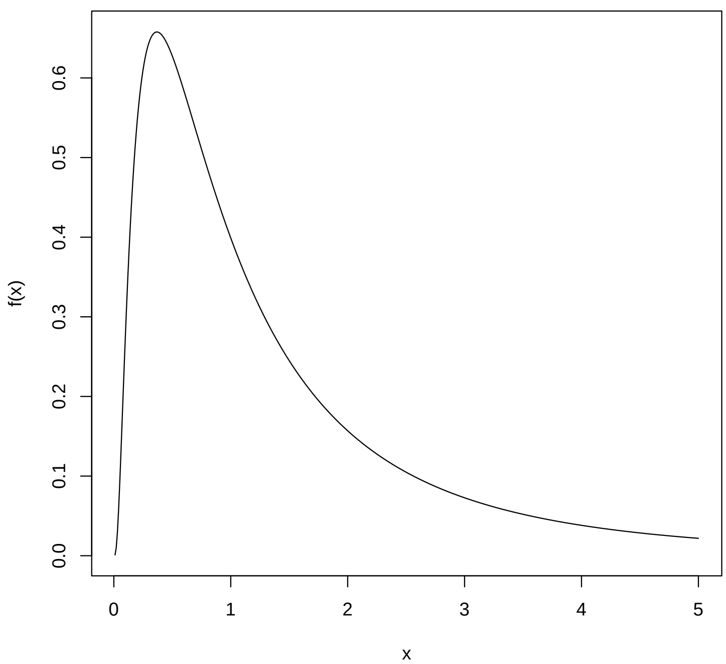
Dichte von Bsp 4



5. (a) $W\{X > 1\} = 1 - \Phi\left(\dfrac{\ln 1 - 0}{1}\right) = 1 - \Phi(0) = \dfrac{1}{2}$

(b) $f(x) = \dfrac{d}{dx}\,\Phi\big(\ln x\big) = \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}}\,e^{-(\ln x)^2/2},\ x > 0$

Dichte von Bsp 5

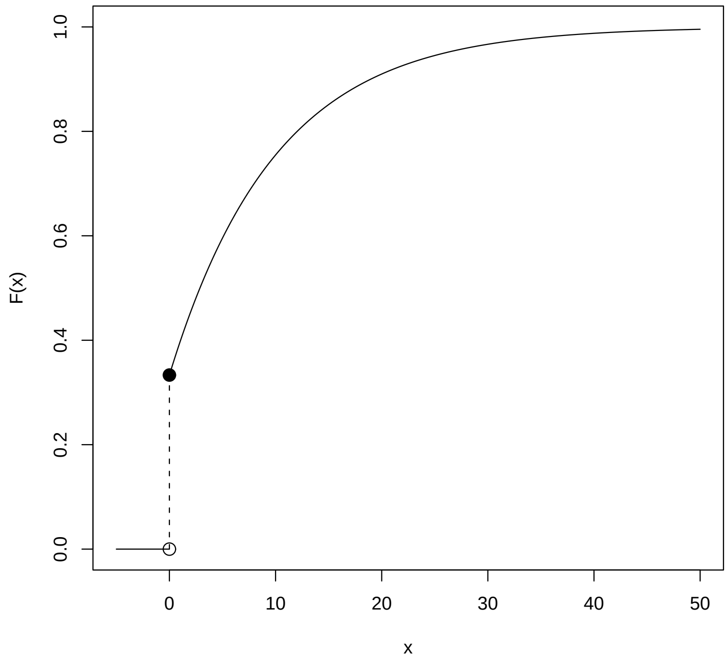


(c) $x_p = F^{-1}(p) = e^{\,u_p}$ (Allg.: $x_p = e^{\,\mu+\sigma\,u_p}$)

$x_{0.25} = e^{-0.6745} = 0.5094, \quad x_{0.5} = 1, \quad x_{0.75} = e^{0.6745} = 1.9630$

6. (a)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \dfrac{2}{3}\, e^{-x/10} & x \geq 0 \end{cases}$$



(b) $F(x_{0.5}) = \dfrac{1}{2}; \quad x_{0.5} = -10 \ln\left(\dfrac{3}{4}\right) = 2.88$

(c) $W\{X > 20 | X > 10\} = \dfrac{W\{X > 20\}}{W\{X > 10\}} = \dfrac{e^{-2}}{e^{-1}} = e^{-1} = 0.368$

$W\{X > 10\} = \dfrac{2}{3}\, e^{-1}$