Ue Statistik u. Wahrscheinlichkeitsth. f. Inf.	Di 12:00 – 18:00
107.251 W 2004|5 http://www.statistik.tuwien.ac.at/RISueb/	**1.Blatt**
Werner GURKER Tel.: 58801–10724 Spr.: Di u. Do 11–12 e–mail: W.Gurker@tuwien.ac.at	12. Okt. 2004

1. Zeigen Sie die Gültigkeit der DeMorgan'schen Regeln:

$$\overline{(C_1 \cap C_2)} = \overline{C}_1 \cup \overline{C_2} \qquad \overline{(C_1 \cup C_2)} = \overline{C}_1 \cap \overline{C_2}$$

   Benützen Sie zur Veranschaulichung Venn–Diagramme, geben Sie aber auch exakte Beweise. Verallgemeinern Sie die Regeln für beliebig viele Mengen.

2. (a) Gilt für eine Folge C_1, C_2, ... von Mengen, daß $C_k \subset C_{k+1}$ für $k = 1, 2, \ldots$, so wird $\lim_{k\to\infty} C_k$ als Vereinigung der Mengen, $C_1 \cup C_2 \cup \cdots$, definiert. Ermitteln Sie den Limes für:
   (1) $C_k = \big\{x \,:\, 1/k \le x \le 3 - 1/k\big\},\ k = 1, 2, \ldots$
   (2) $C_k = \big\{(x, y) \,:\, 1/k \le x^2 + y^2 \le 4 - 1/k\big\},\ k = 1, 2, \ldots$

   (b) Gilt für eine Folge C_1, C_2, ... von Mengen, daß $C_k \supset C_{k+1}$ für $k = 1, 2, \ldots$, so wird $\lim_{k\to\infty} C_k$ als Durchschnitt der Mengen, $C_1 \cap C_2 \cap \cdots$, definiert. Ermitteln Sie den Limes für:
   (1) $C_k = \big\{x \,:\, 2 - 1/k < x \le 2\big\},\ k = 1, 2, \ldots$
   (2) $C_k = \big\{x \,:\, 2 < x \le 2 + 1/k\big\},\ k = 1, 2, \ldots$
   (3) $C_k = \big\{(x, y) \,:\, 0 \le x^2 + y^2 \le 1/k\big\},\ k = 1, 2, \ldots$

3. Für jede (eindimensionale) Menge C, für die das Integral existiert, sei $Q(C)$ definiert durch $Q(C) = \int_C e^{-x}\,dx$. Berechnen Sie für $C_1 = \big\{x \,:\, 0 \le x \le 2\big\}$ und $C_2 = \big\{x \,:\, 1 \le x \le 3\big\}$: $Q(C_1)$, $Q(C_2)$, $Q(C_1 \cup C_2)$.

4. Nach einem Fußballmatch wird bekannt gegeben, daß von den 11 Spielern der unterlegenen Mannschaft, sich 8 an der Hüfte, 6 am Arm, 5 am Knie, 3 an der Hüfte und am Arm, 2 an der Hüfte und am Knie, 1 am Arm und am Knie verletzt haben. Kein Spieler hat sich überall verletzt. Wie beurteilen Sie diese Angaben?

5. Zwei Wanderer erreichen aus unterschiedlichen Richtungen einen Aussichtspunkt und halten sich dort 10 Minuten (Wanderer 1) bzw. 20 Minuten (Wanderer 2) auf. Ihre Ankunftszeitpunkte liegen – unabhängig voneinander – zufällig zwischen 11 und 12 Uhr.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit treffen sie sich am Aussichtspunkt?

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich um 11:30 (1) keiner, (2) genau einer, (3) beide am Aussichtspunkt befinden?

   Hinweis: Argumentieren Sie geometrisch.

6. Die Koeffizienten p und q der quadratischen Gleichung $x^2 + 2\,p\,x + q = 0$ werden zufällig aus $[-1, 1] \times [-1, 1]$ ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat die Gleichung (1) zwei reelle, (2) zwei konjugiert komplexe, (3) zwei identische Lösungen?

   Hinweis: Argumentieren Sie geometrisch.

Lösungen zum 1. Blatt

2. (a) (1) $\{x : 0 < x < 3\}$; (2) $\{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 4\}$
   (b) (1) $\{x : x = 2\}$; (2) $\emptyset$; (3) $\{(x, y) : x = 0, y = 0\}$

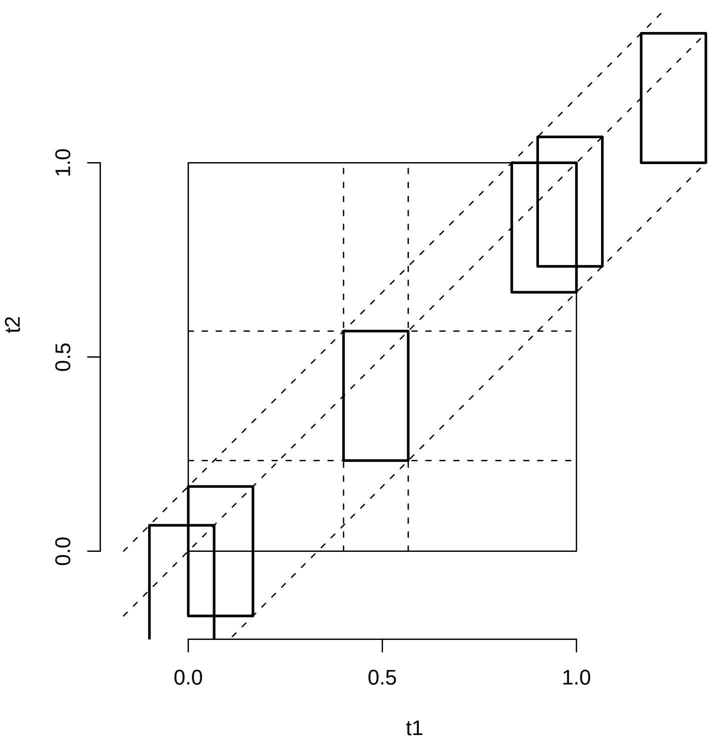
3. $Q(C_1) = \int_0^2 e^{-x}\,dx = 1 - e^{-2}$

   $Q(C_2) = \int_1^3 e^{-x}\,dx = e^{-1} - e^{-3}$

   $Q(C_1 \cup C_2) = 1 - e^{-3}$

4. $11 \neq 8 + 6 + 5 - 3 - 2 - 1 + 0$

5. (a) $W = \frac{31}{72} \approx 0.43$
   (b) (1) $W = \frac{10}{18}$; (2) $W = \frac{7}{18}$; (3) $W = \frac{1}{18}$

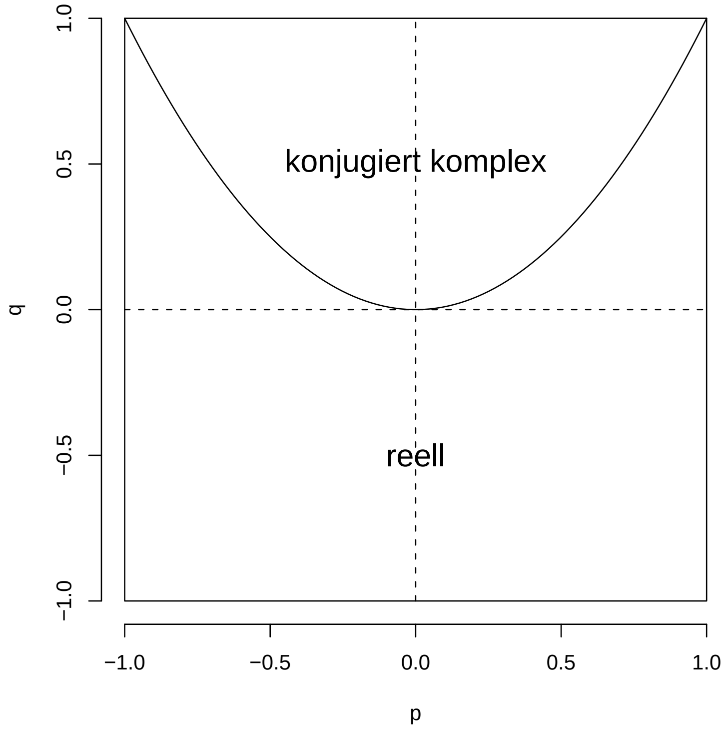


6. $x_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$

   (1) $p^2 \geq q$: $W = \frac{1}{4}\left(2\int_0^1 p^2\,dp + 2\right) = \frac{2}{3}$

   (2) $W = \frac{1}{3}$

   (3) $W = 0$


konjugiert komplex
reell
q
p
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0