<table>
<tr><td>Ue Statistik u. Wahrscheinlichkeitsth. f. Inf.
107.251 W 2004|5
http://www.statistik.tuwien.ac.at/RISueb/</td><td>Di 12:00 – 18:00
3.Blatt</td></tr>
<tr><td>Werner GURKER Tel.: 58801–10724
Spr.: Di u. Do 11–12 e–mail: W.Gurker@tuwien.ac.at</td><td>9. Nov. 2004</td></tr>
</table>

1. Um die Dauer einer Meisterschaft abzukürzen, werden die $4n$ daran teilnehmenden Mannschaften durch Los in 4 gleich große Gruppen aufgeteilt.

   (a) Wieviele Möglichkeiten der Aufteilung gibt es?

   (b) Wieviele Aufteilungen gibt es, sodaß sich die zwei stärksten Mannschaften der Meisterschaft in verschiedenen Gruppen befinden?

   (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich die zwei stärksten Mannschaften in verschiedenen Gruppen befinden? Ermitteln Sie einen möglichst einfachen Ausdruck.

2. (a) Formulieren Sie das Additionstheorem für n Ereignisse, $E_1, E_2, \ldots, E_n$, und geben Sie einen exakten Beweis.

   Hinweis: Vollständige Induktion nach n.

   (b) Zeigen Sie die *Boole'sche Ungleichung*:

$$W\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} W(E_i)$$

   (c) Zeigen Sie *Bonferroni's Ungleichung*:

$$W\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} W(\overline{E}_i)$$

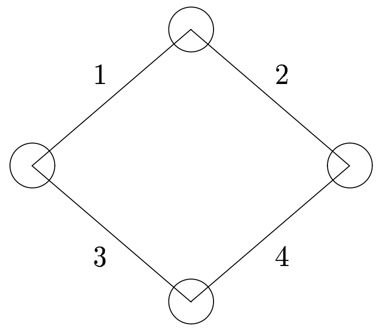
3. E und F seien zwei disjunkte Ereignisse (d.h. $E \cap F = \emptyset$) aus dem Merkmalraum eines Experiments. Angenommen, das Experiment wird nun so oft wiederholt, bis entweder E oder F eintritt.

   (a) Wie lautet der Merkmalraum des neuen Experiments?

   (b) Zeigen Sie, daß die Wahrscheinlichkeit mit der E vor F eintritt, gegeben ist durch:

$$\frac{W(E)}{W(E) + W(F)}$$

4. Im folgenden Netzwerk sind die Verbindungen – unabhängig voneinander – mit Wahrscheinlichkeit p_i ($0 \leq p_i \leq 1$, $i = 1, 2, 3, 4$) intakt. Das Netzwerk ist intakt, falls alle Punkte miteinander kommunizieren können (direkt oder über Zwischenpunkte).



E sei das Ereignis, daß das Netzwerk intakt ist, und V_i das Ereignis, daß Verbindung i intakt ist ($i = 1, 2, 3, 4$).

(a) Wie lautet ein passender Merkmalraum? Wie läßt sich V_i auf Basis dieses Merkmalraums ausdrücken?

(b) Zeigen Sie, daß sich E als Vereinigung von Ereignissen der Form $V_i \cap V_j \cap V_k$ darstellen läßt.

(c) Benützen Sie die Darstellung (b) um $W(E)$ mit Hilfe des Additionstheorems zu berechnen. Was ergibt sich speziell für $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p$?

(d) Berechnen Sie $W(E)$ mit Hilfe des *Satzes von der vollständigen Wahrscheinlichkeit*, indem Sie durch den Status (intakt/defekt) einer bestimmten Verbindung bedingen.

5. Jemand fliegt von Los Angeles nach Wien mit Zwischenlandungen in New York, London und Frankfurt. Bei jeder Zwischenlandung wird die Maschine gewechselt, wobei an jedem Flughafen (einschließlich LA) das Gepäck mit gleichbleibender Wahrscheinlichkeit q $(0 < q < 1)$ in ein falsches Flugzeug verladen wird. In Wien fehlt das Gepäck; mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Fehler in LA, NY, L, F passiert? Wo ist die Wahrscheinlichkeit am größten? Rechnen Sie allgemein und für $q = 0.05$.

6. Eine typische Anwendung der *Bayes'schen Formel* liegt in der Beurteilung von Tests: Angenommen, von 100 VLSI–Chips sind im Durchschnitt 2 defekt. Ein automatischer Labortest erkennt einen guten Chip in 95% der Fälle, und einen defekten Chip in 94% der Fälle als solchen.

   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein als gut ausgewiesener Chip tatsächlich gut ist?

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein als defekt ausgewiesener Chip tatsächlich defekt ist? Geben Sie eine Erklärung für die (überraschend?) kleine Wahrscheinlichkeit.

Lösungen zum 3. Blatt

1. (a) $m = \binom{4n}{n}\binom{3n}{n}\binom{2n}{n}\binom{n}{n} = \dfrac{(4n)!}{(n!)^4}$

   (b) $g = 2!\binom{4}{2}\binom{4n-2}{n-1}\binom{3n-1}{n-1}\binom{2n}{n}\binom{n}{n} = \dfrac{12\,(4n-2)!}{((n-1)!)^2\,(n!)^2}$

   (c) $\dfrac{g}{m} = \dfrac{12\,(4n-2)!(n!)^2}{(4n)!\,((n-1)!)^2} = \dfrac{3n}{4n-1}$

2. (a) $W\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right) = W\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \cup E_{n+1}\right) =$

   $= W\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) + W(E_{n+1}) - W\left(\bigcup_{i=1}^{n}(E_i \cap E_{n+1})\right) = \cdots$

   (b) $W\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = W\left(\bigcup_{i=1}^{n}\left(E_i \cap \bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{E}_j\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} W\left(E_i \cap \bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{E}_j\right) \leq \sum_{i=1}^{n} W(E_i)$

   (c) DeMorgan'sche Regel und (b).

3. (a) Alle Tupel der Form $\left(\overline{E \cup F}, \ldots, \overline{E \cup F}, E\right)$ oder $\left(\overline{E \cup F}, \ldots, \overline{E \cup F}, F\right)$.

   (b) $W(E \text{ vor } F) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - W(E) - W(F)\right]^{k-1} W(E) = \dfrac{W(E)}{W(E) + W(F)}$

4. (a) $M = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,|\, x_i = 0, 1;\ i = 1, 2, 3, 4\right\}$

   $V_i = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,|\, x_i = 1,\ x_j = 0, 1,\ j \neq i\right\}$

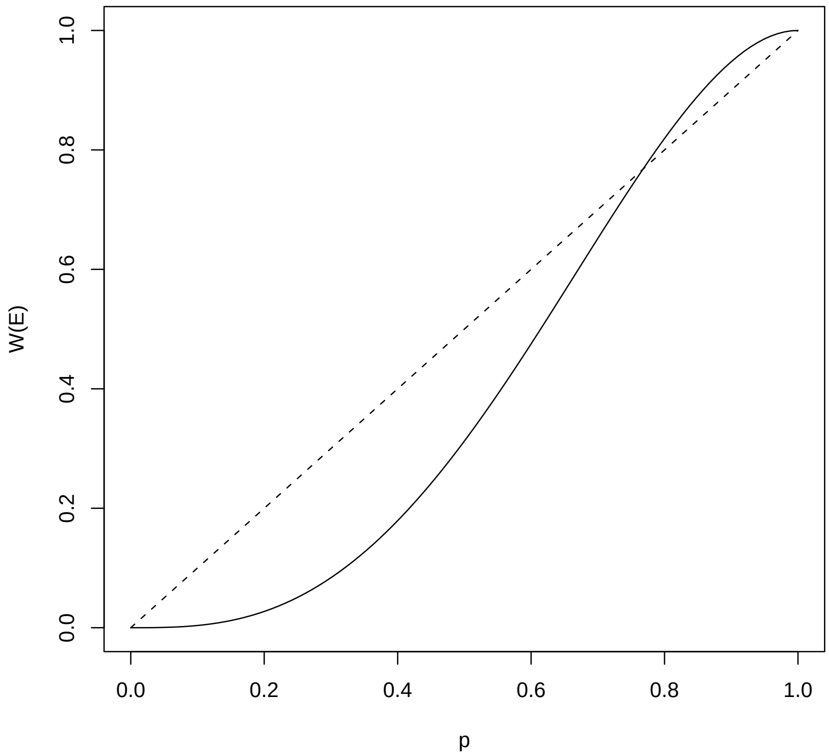
   (b) $E = \left(V_1 \cap V_2 \cap V_3\right) \cup \left(V_1 \cap V_2 \cap V_4\right) \cup \left(V_1 \cap V_3 \cap V_4\right) \cup \left(V_2 \cap V_3 \cap V_4\right)$

   (c) $W(E) = p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_3p_4 + p_2p_3p_4 - 6\,p_1p_2p_3p_4 + 4\,p_1p_2p_3p_4 -$
   $- p_1p_2p_3p_4 = p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_3p_4 + p_2p_3p_4 - 3\,p_1p_2p_3p_4$

   Alle p_i identisch: $W(E) = 4\,p^3 - \binom{4}{2}p^4 + \binom{4}{3}p^4 - p^4 = 4\,p^3 - 3\,p^4$

   (d) Bedingen durch den Status von (z.B.) Verbindung 1:

   $W(E) = p_2p_3p_4\,(1 - p_1) + (p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4 - 3p_2p_3p_4 + p_2p_3p_4)\,p_1$



5. E = Gepäck fehlt in Wien

   E_{LA}, E_{NY}, E_L, E_F = Fehler in LA, NY, L, F

   $W(E) = 1 - (1-q)^4$

	E_{LA}	E_{NY}	E_L	E_F
$W(\cdot\|E)$	$\frac{q}{1-(1-q)^4}$	$\frac{(1-q)q}{1-(1-q)^4}$	$\frac{(1-q)^2 q}{1-(1-q)^4}$	$\frac{(1-q)^3 q}{1-(1-q)^4}$
$q = 0.05$	0.2696	0.2561	0.2433	0.2311

6. (a) $W\big(\text{Chip gut}\big|\text{Test sagt gut}\big) = \dfrac{0.95 \times 0.98}{0.95 \times 0.98 + 0.06 \times 0.02} = 0.9987$

   (b) $W\big(\text{Chip defekt}\big|\text{Test sagt defekt}\big) = \dfrac{0.94 \times 0.02}{0.94 \times 0.02 + 0.05 \times 0.98} = 0.2773$