Logische Grundlagen — J. W. v. Goethe: Faust, 1. Teil

MEPHISTOPHELES:
Erklärt Euch, eh Ihr weiter geht,
Was wählt Ihr für eine Fakultät?

SCHÜLER:
Ich wünschte recht gelehrt zu werden,
Und möchte gern, was auf der Erden
Und in dem Himmel ist, erfassen,
Die Wissenschaft und die Natur.

MEPHISTOPHELES:
Da seid Ihr auf der rechten Spur;
Doch müßt Ihr Euch nicht zerstreuen lassen.

SCHÜLER:
Ich bin dabei mit Seel und Leib;
Doch freilich würde mir behagen
Ein wenig Freiheit und Zeitvertreib
An schönen Sommerfeiertagen.

MEPHISTOPHELES:
Gebraucht der Zeit, sie geht so schnell von hinnen,
Doch Ordnung lehrt Euch Zeit gewinnen.
Mein teurer Freund, ich rat Euch drum
Zuerst Collegium Logicum.
Da wird der Geist Euch wohl dressiert,
In spanische Stiefeln eingeschnürt,
Daß er bedächtiger so fortan
Hinschleiche die Gedankenbahn,
Und nicht etwa, die Kreuz und Quer,
Irrlichteliere hin und her.

Logische Grundlagen — Spanische Stiefel

Logische Grundlagen

J. W. v. Goethe: Faust, 1. Teil

Dann lehret man Euch manchen Tag,
Daß, was Ihr sonst auf einen Schlag
Getrieben, wie Essen und Trinken frei,
Eins! Zwei! Drei! dazu nötig sei.
Zwar ist's mit der Gedankenfabrik
Wie mit einem Weber-Meisterstück,
Wo ein Tritt tausend Fäden regt,
Die Schifflein herüber hinüber schießen,
Die Fäden ungesehen fließen,
Ein Schlag tausend Verbindungen schlägt.
Der Philosoph, der tritt herein
Und beweist Euch, es müßt so sein:
Das Erst wär so, das Zweite so,
Und drum das Dritt und Vierte so;
Und wenn das Erst und Zweit nicht wär,
Das Dritt und Viert wär nimmermehr.

Das preisen die Schüler allerorten,
Sind aber keine Weber geworden.
Wer will was Lebendigs erkennen und beschreiben,
Sucht erst den Geist heraus zu treiben,
Dann hat er die Teile in seiner Hand,
Fehlt, leider! nur das geistige Band.

Logik

Aristoteles (384 – 322 v. Chr.)

Seit Aristoteles wurde unter der Logik traditionell eine philosophische Disziplin verstanden, die sich zwar formaler Mittel bediente, aber auf die Lösung von Problemen gerichtet war, die als der Philosophie zugehörig betrachtet wurden.

In einem allgemeinen Sinne:
Logik ist die Wissenschaft

- von den Prinzipien richtigen Denkens,
- folgerichtigen Denkens,
- möglichst vor Irrtümern gefeit, die aus der Anwendung fehlerhafter Prinzipien entstehen.

Logik

Aristoteles (384 – 322 v. Chr.)

Besondere Aufmerksamkeit für:

- Analyse wissenschaftlicher Theorien
- Analyse des theoretischen wissenschaftlichen Instrumentariums.

Von der Logik behandelte Fragen:

- Wie muß ein gültiger Schluß aufgebaut sein?
- Was muß von einem Beweis verlangt werden?
- Welche Anforderungen müssen brauchbare Definitionen erfüllen?

- Aufdeckung der Struktur gültiger Argumentations-prinzipien (Logik und Rhetorik).

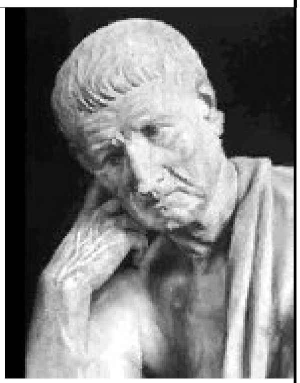
- Enge Verbindung zwischen Logik und Grammatik.

Logik

Aristoteles (384 – 322 v. Chr.)

Am Werk des Aristoteles orientierten sich die Wissenschaftler der nächsten Jahrhunderte hinsichtlich Tiefe, Präzision und Systematik .

Das erste vollständig ausgearbeitete System eines Teilbereiches der Logik, nämlich seine Theorie der Syllogismen. (Schlüsse, in denen aus zwei Voraussetzungen (Prämissen) eine Schlußfolgerung (Konklusion) gezogen wird.



Erstes Axiomensystem der Logik überhaupt: Aristoteles‘ Syllogistik.
(Darin sind genau die logisch gültigen syllogistischen Schlüsse beweisbar.)

Logik

Aristoteles (384 – 322 v. Chr.)

Syllogistik:

Sowohl die Prämissen als auch die Konklusion sind so genannte kategorische Urteile der Form

- Alle *S* sind *P*,
- Kein *S* ist *P*,
- Einige *S* sind *P*
- Einige *S* sind keine *P*.

Logik

Stoa

Aussagenlogik

Aussagen,
Verbindungen von Aussagen,

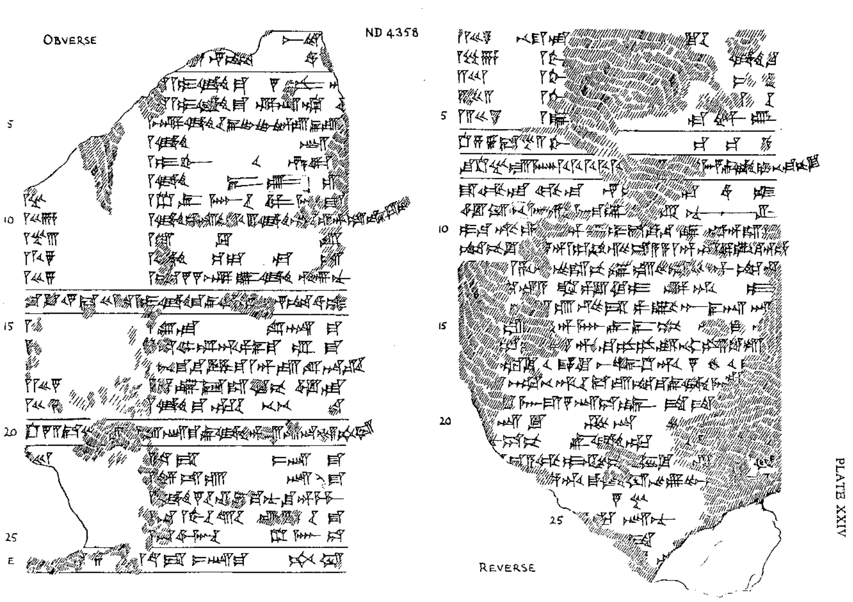
z.B.:

Disjunktion:	$a \vee b$
Konjunktion:	$a \wedge b$
Implikation:	$a \Rightarrow b$

Regellogik

z. B.:

	„Wenn die Sonne aufgeht, wird es hell“
und	„Die Sonne geht auf“,
also:	„Es wird hell.“



Gefundene Tafeln aus neubabylonischer Zeit (ca.650 v.Chr.)

Anweisungen für medizinische Untersuchungen, Diagnosen und Prognosen von Krankheiten:

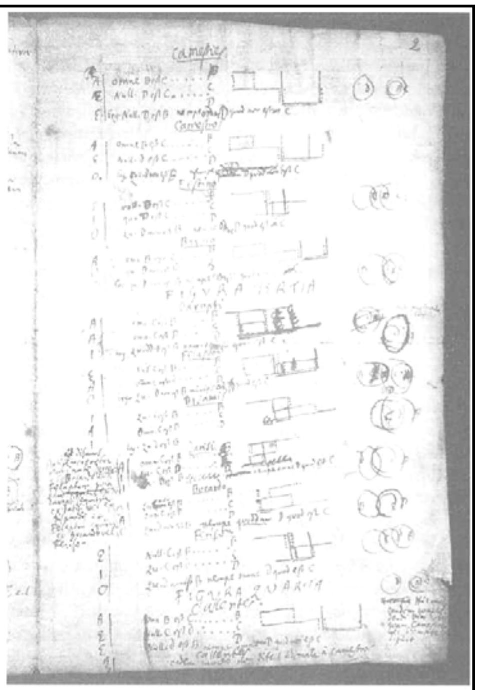
- “When you are about to examine a sick man ... ”
- “IF, after a day’s illness,
  he begins to suffer from headache, ... ”
- “IF a mother conceives again, her scalp and forehead becoming yellowish in colour, ... ”
- “IF ... head ... , he will die suddenly.”

Logische Grundlagen — Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Mathesis universalis:

Synthese mathematischer und logischer Verfahren als allgemeine wissenschaftliche Methode

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ



Skizzen Leibnizens für diagrammatische Darstellungen der Syllogistik

Binärzahlensystem Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Rechenmaschine von Wilhelm Schickard (1592-1635)

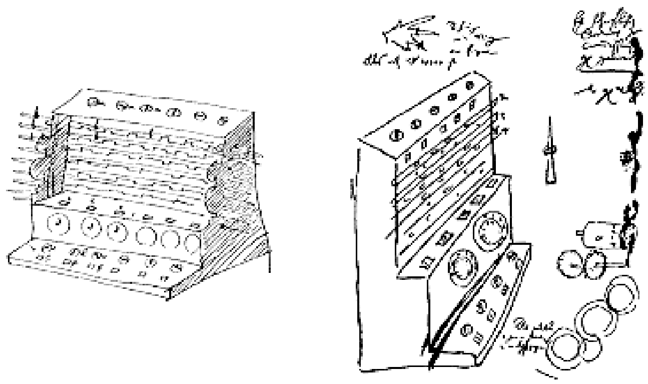
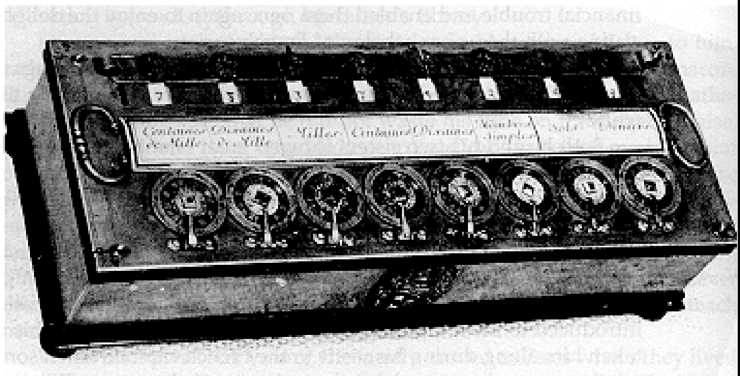


Figure 3-2
Schickard's drawings of his machine sent to Kepler in a letter. (Courtesy of Baron von Freytag Loringhoff.)

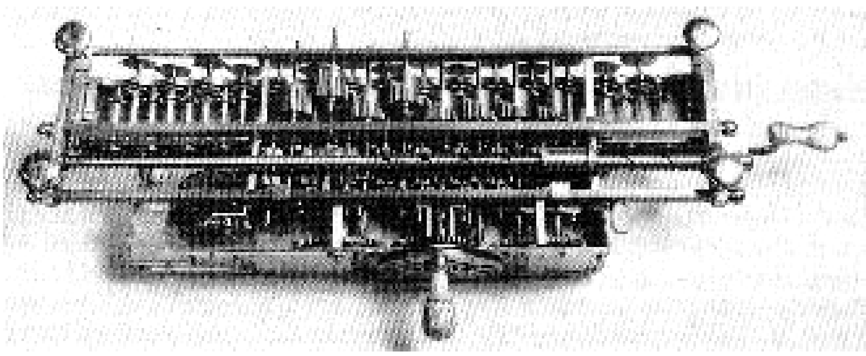
Rechenmaschine von Blaise Pascal (1623-1662)



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

1673: erste Rechenmaschine für alle vier Grundrechenarten

1700: Duales Zahlensystem und Entwicklung der Arithmetik binärer Zahlen



Logische Grundlagen — George Boole (1815-1864)

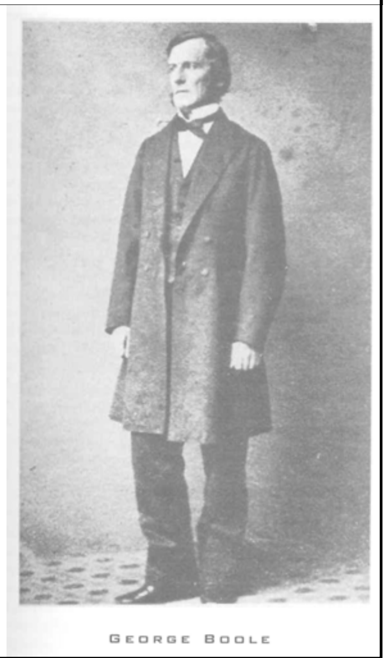
1847: Neue Qualität der Logikentwicklung, Beginn der *mathematischen* Logik.

The Mathematical Analysis of Logic.

- Logik wird mit mathematischen Mitteln aufgebaut.
- Logik wird als Algebra der Logik dargestellt.

Boole hatte erkannt:

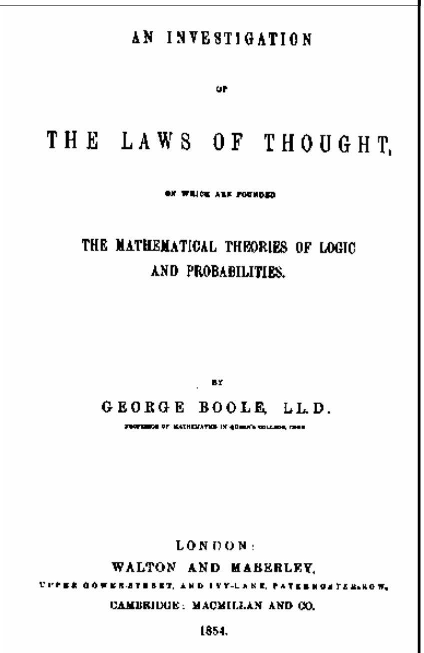
- Aristoteles‘ Syllogistik behandelt nur einen kleinen Teilbereich logischer Schlüsse;
- für die Darstellung der logischen Verhältnisse in der Mathematik ist sie ungenügend.



Logische Grundlagen — George Boole (1815-1864)

Logik einer „Klassenalgebra“

- leistungsfähiger als die aristotelische Syllogistik.
- Vollständiges System der einstelligen Prädikatenlogik geliefert.
- Beweisbarkeit der logischen Gesetze, die sich auf die logischen Beziehungen zwischen Eigenschaften richten.
- Syllogistik ist darin vollständig enthalten.



AN INVESTIGATION

OF

THE LAWS OF THOUGHT,

ON WHICH ARE FOUNDED

THE MATHEMATICAL THEORIES OF LOGIC
AND PROBABILITIES.

BY

GEORGE BOOLE, LL.D.

LONDON:
WALTON AND MABERLEY,
UPPER GOWER-STREET, AND IVY-LANE, PATERNOSTER-ROW.
CAMBRIDGE: MACMILLAN AND CO.
1854.

Logische Grundlagen — George Boole (1815-1864)

A, B, C seien Elementaraussagen mit Wahrheitswerten W oder F. Außerdem existieren die Elementaraussagen 0 und 1 mit den Wahrheitswerten F und W.

Dann sollen mit Negation, UND bzw. ODER drei Funktoren existieren, die folgende Eigenschaften haben:

Kommutativität:	$A \wedge B = B \wedge A$;	$A \vee B = B \vee A$.
Assoziativität:	$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$;	
	$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$	
Distributivität:	$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;	
	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	
Zweiwertigkeitsbedingungen:	$A \wedge 1 = A$;	$A \vee 0 = A$;
	$A \wedge \neg A = 0$;	$A \vee \neg A = 0$;
	$A \wedge A = A$;	$A \vee A = A$.

Logische Grundlagen

Modus ponendo tollens:	"A ist entweder B oder C" "A ist B" "A ist nicht C"
Modus (ponendo) ponens:	"Wenn A dann B" "A" "B" $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$
Modus tollendo ponens:	$((A \vee B) \wedge \neg B) \rightarrow A$
Modus tollens:	"Wenn A ein B ist, so ist C ein D" "C ist kein D" "A ist kein B"

Logische Grundlagen — Georg Cantor (1845-1918)

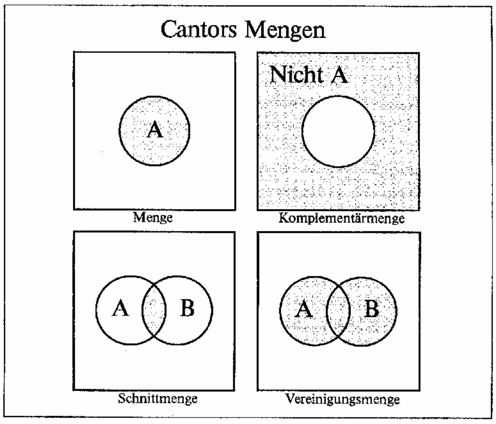


Abbildung 1

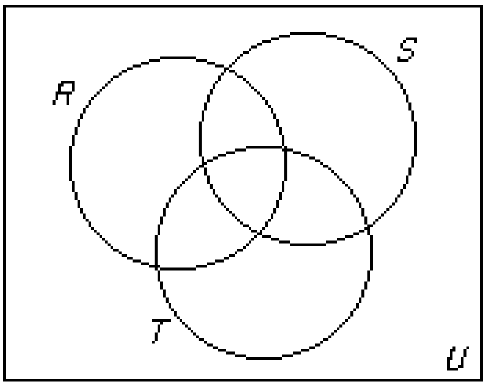
GEORG CANTOR, WITH HIS WIFE, VALLY

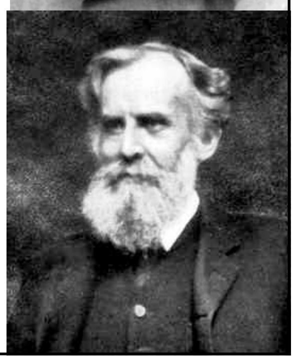
Logische Grundlagen — John Venn (1834-1923)

1866: Logic of Chance

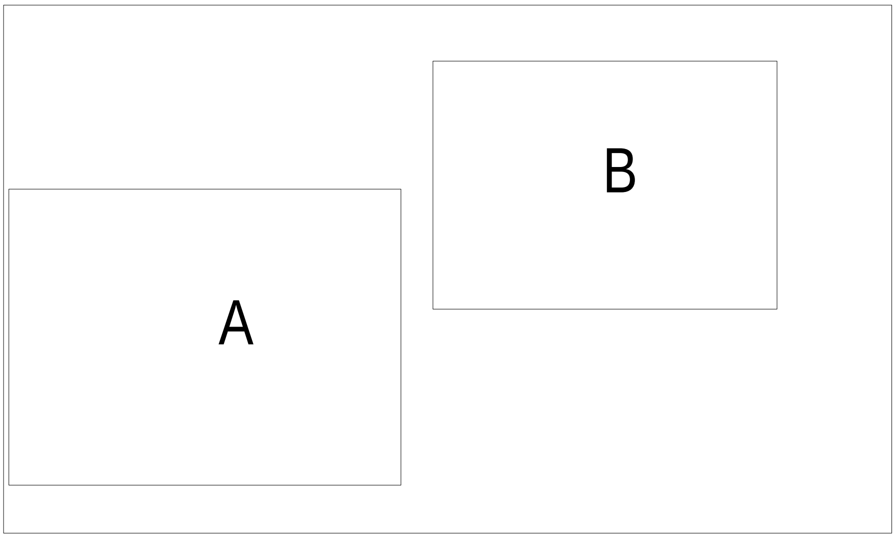
1881: Symbolic Logic

1889: The Principles of Empirical Logic





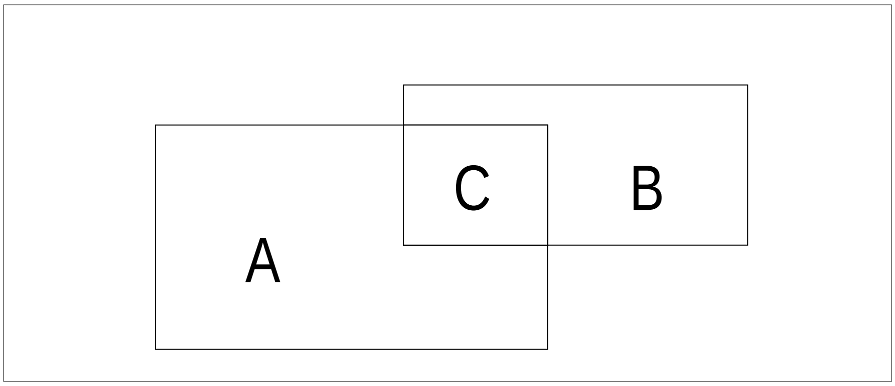
Logische Grundlagen



Logische Grundlagen

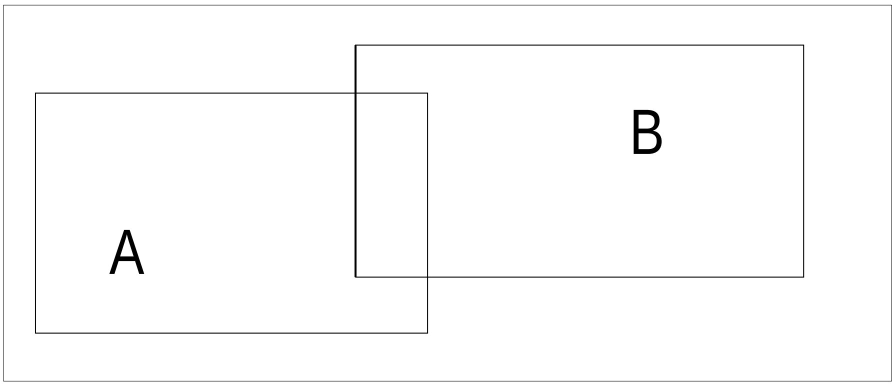
Durchschnitt, logisches UND

$$C = A \cap B \qquad C = A \wedge B$$



Logische Grundlagen — Vereinigung, logisches ODER

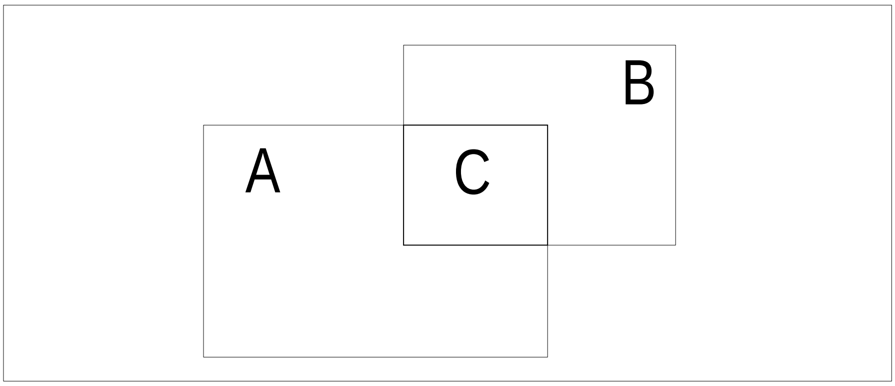
$$C = A \cup B \qquad C = A \vee B$$



Logische Grundlagen — Negation, „nicht“

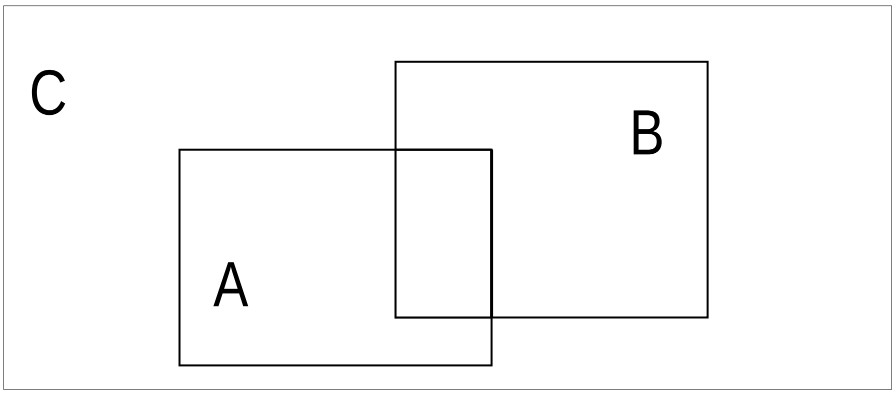
$$B = \neg A$$

$C = \neg A + B$ $\qquad$ $C = \neg A \vee B$



Logische Grundlagen

$C = \neg A \cdot B$ $\qquad$ $C = \neg A \wedge B$



Logische Grundlagen Äquivalenz

$$A = B \qquad A \Leftrightarrow B$$

Logische Grundlagen

Nachfolger von Boole arbeiteten daran, dessen System zu präzisieren und hinsichtlich der logischen Analyse von Relationen zu erweitern.

- Augustus De Morgan (1806-1878),

- Ernst Schröder (1841-1902)

und

- Charles Sanders Peirce (1839-1914)


De Morgan


Peirce

Logische Grundlagen — Prädikatenlogik

Aussagenlogik:

P: Alle Menschen sind sterblich.

Q: Sokrates ist ein Mensch.

R: Sokrates ist sterblich

$P \wedge Q \rightarrow R$

Das ist keine aussagenlogische Folgerung!

Prädikatenlogik:

M(x): „x ist ein Mensch“
S(x): „x ist sterblich“.
x: Variable für einen beliebigen Menschen
s: Konstante Sokrates

P: $\forall x\, M(x) \rightarrow S(x)$
Q: $M(s)$

R: $S(s)$

„$\forall$x“ ist ein „Allquantor“: „für alle x“
„$\exists$x“ ist ein „Existenzquantor“: „es existiert ein x“

Logische Grundlagen — Gottlob Frege (1848-1925)

Erstes vollständiges System der Aussagen- und Prädikatenlogik ohne Beschränkung auf einstellige Prädikate.

Aufbau der Logik als eigenständige Disziplin, die zwar zwischen Mathematik und Philosophie steht,

- weder Teil der Mathematik
- noch Teil der Logik ist
- und zu einem wichtigen Analysemittel
- sowohl für die Mathematik
- als auch für die Philosophie
- und andere Wissenschaften wird.

GOTTLOB FREGE

(Institute for Mathematical Logic and Foundational Research, Münster University)

Prädikatenlogik

Die für die Syllogistik grundlegenden Aussageformen lassen sich im Prädikatenkalkül folgendermaßen darstellen:

A	Allgemein bejahendes Urteil	• Alle S sind P.	$\forall x\ (S(x) \rightarrow P(x))$
E	Allgemein verneinendes Urteil	• Kein S ist P.	$\forall x\ (S(x) \rightarrow \neg P(x))$
I	Partikulär bejahendes Urteil	• Einige S sind P.	$\exists x\ (S(x) \wedge P(x))$
O	Partikulär verneinendes Urteil	• Einige S sind keine P.	$\exists x\ (S(x) \wedge \neg P(x))$

Prädikatenlogik — Modi der ersten Figur der Syllogistik

*Barbara (**AAA**)*

$\forall x\ (M(x) \rightarrow P(x)$
$\underline{\forall x\ (S(x) \rightarrow M(x)}$
$\forall x\ (S(x) \rightarrow P(x)$

*Celarent (**EAE**)*

$\forall x\ (M(x) \rightarrow \neg P(x)$
$\underline{\forall x\ (S(x) \rightarrow M(x)}$
$\forall x\ (S(x) \rightarrow \neg P(x)$

*Darii (**AII**)*

$\forall x\ (M(x) \rightarrow P(x)$
$\exists\underline{\ x\ (S(x) \wedge M(x)}$
$\exists\ x\ (S(x) \wedge P(x)$

*Ferio (**EIO**)*

$\forall x\ (M(x) \rightarrow \neg P(x)$
$\exists\underline{\ x\ (S(x) \wedge M(x)}$
$\exists\ x\ (S(x) \wedge \neg P(x)$

Aussagenlogische Funktoren

Wahrheitswerte der Elementaraussagen		Wahrheitswerte der zusammengesetzten Aussagen				
		Negation	UND	ODER	Implikation	Äquivalenz
A	B	¬ A	A ∧ B	A V B	A → B	A ↔ B
W	W	F	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	F
F	W	W	F	W	W	F
F	F	W	F	F	W	W

Claude Elwood Shannon (1916-2001)

1938: *A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits*

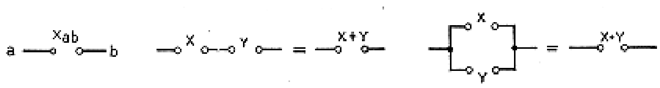


Figure 1 (left). Symbol for hindrance function

Figure 2 (middle). Interpretation of addition

Figure 3 (right). Interpretation of multiplication

Table I. Analogue Between the Calculus of Propositions and the Symbolic Relay Analysis

Symbol	Interpretation in Relay Circuits	Interpretation in the Calculus of Propositions
X	The circuit X	The proposition X
0	The circuit is closed	The proposition is false
1	The circuit is open	The proposition is true
$X + Y$	The series connection of circuits X Y	The proposition which is true if either X or Y is true
XY	The parallel connection of circuits X and Y	The proposition which is true if both X and Y are true
X'	The circuit which is open when X is closed, and closed when X is open	The contradictory of proposition X
=	The circuits open and close simultaneously	Each proposition implies the other

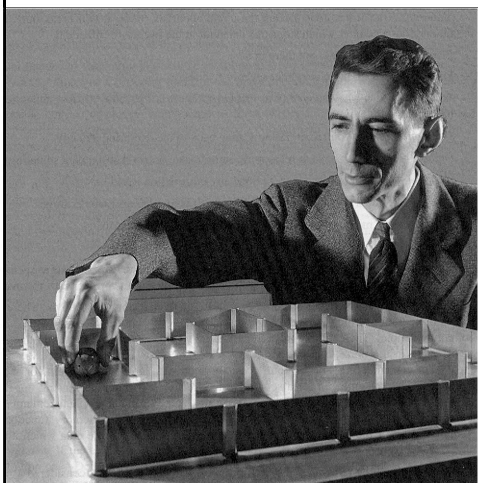
Claude Elwood Shannon, 1938

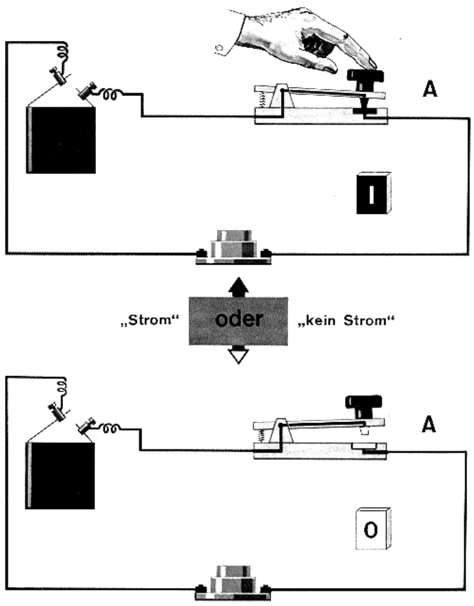
Postulates

1.	a.	$0 \cdot 0 = 0$	A closed circuit in parallel with a closed circuit is a closed circuit.
	b.	$1 + 1 = 1$	An open circuit in series with an open circuit is an open circuit.
2.	a.	$1 + 0 = 0 + 1 = 1$	An open circuit in series with a closed circuit in either order (i.e., whether the open circuit is to the right or left of the closed circuit) is an open circuit.
	b.	$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$	A closed circuit in parallel with an open circuit in either order is a closed circuit.
3.	a.	$0 + 0 = 0$	A closed circuit in series with a closed circuit is a closed circuit.
	b.	$1 \cdot 1 = 1$	An open circuit in parallel with an open circuit is an open circuit.

4. At any given time either $X = 0$ or $X = 1$.

Claude Elwood Shannon, 1938





Logik und Schaltungen

	Wahrheitswerte	Konjunktion (UND)	Disjunktion (nicht-ausschließendes ODER)	Negation (NICHT)
	falsch wahr			
Schreibweise der Aussagenlogik		$a \wedge b$	$a \vee b$	$\neg a$
Schreibweise der Booleschen Algebra	0 1	$a \cdot b$	$a + b$	$-a$

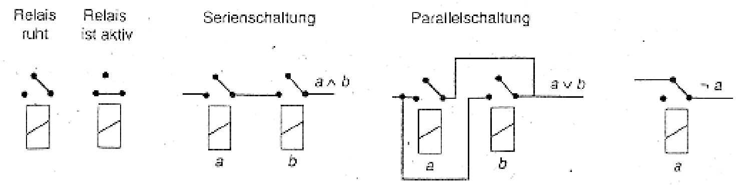
Definition durch Tabellen

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

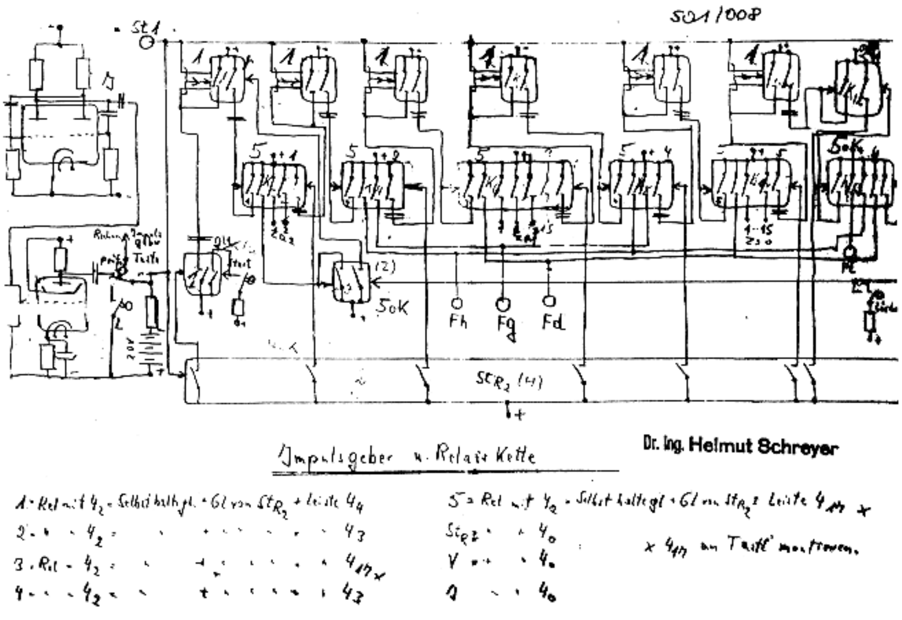
a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	$\neg a$
0	1
1	0

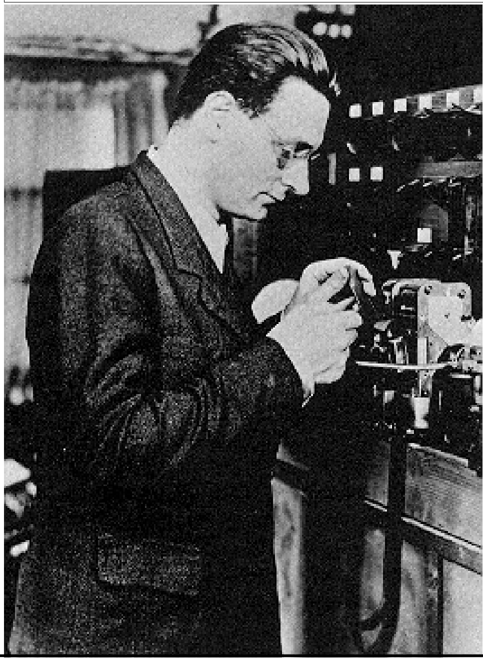
Realisierung durch Relaisschaltungen

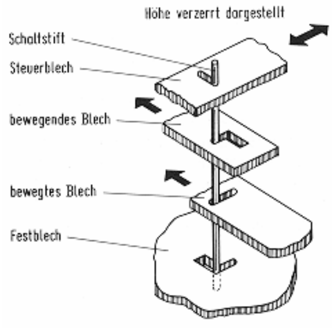


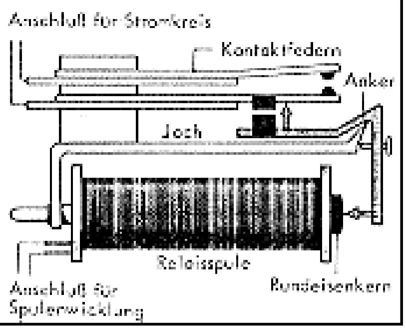
Schaltbild mit Relais, Helmut T. Schreyer, 1943



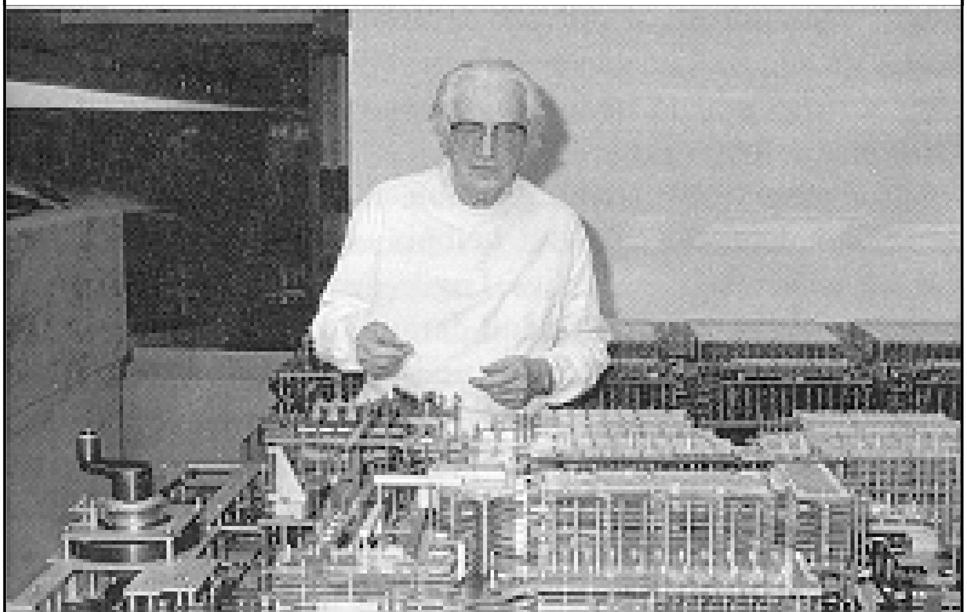
Konrad Zuse (1910-1995)



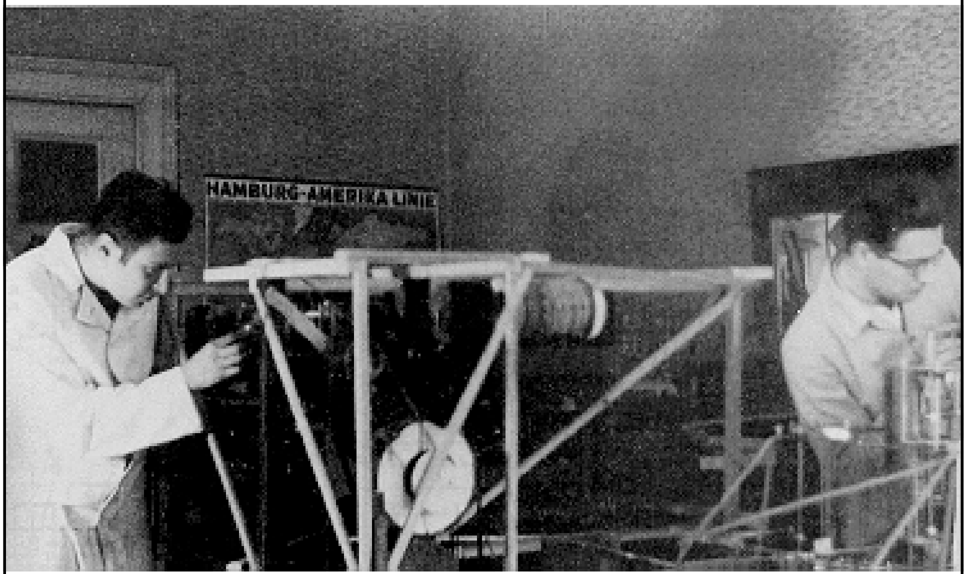




Konrad Zuse vor dem Nachbau seines Z1



Zuse und Schreyer bei der Arbeit an der Rechenmaschine Z1



Zuses elektro-mechanische Rechenmaschine Z3 (1941)