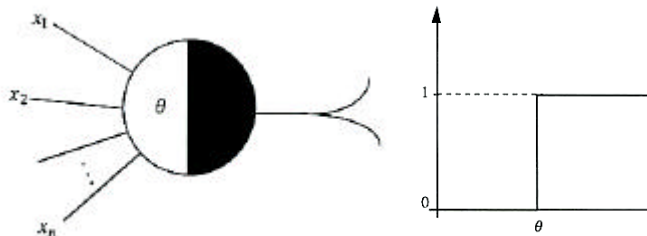
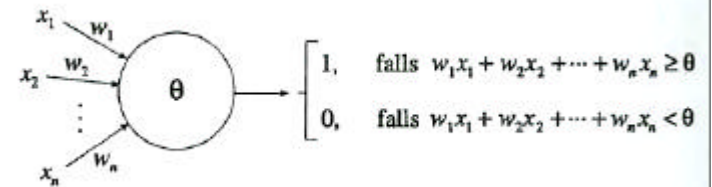


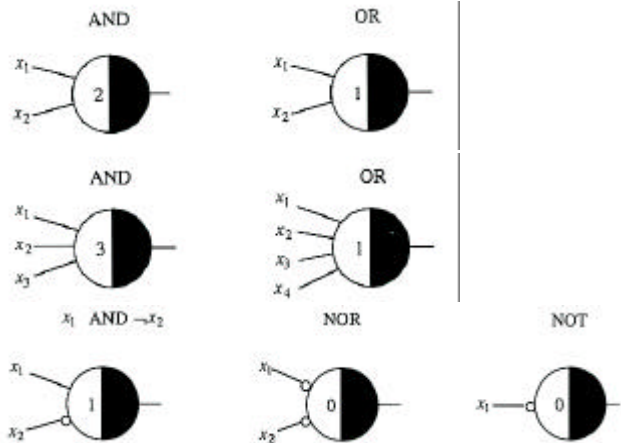
McCulloch-Pitts-Neuron



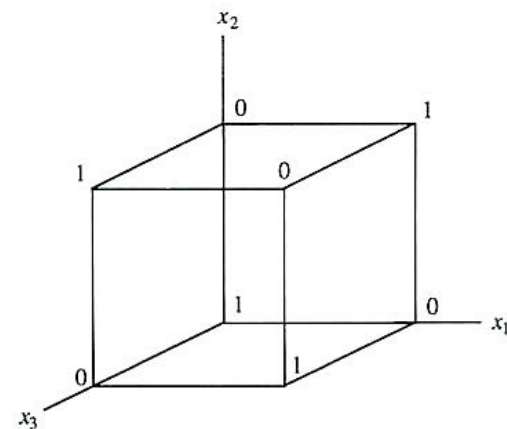
McCulloch-Pitts-Neuronen zum Aufbau logischer Funktionen



McCulloch-Pitts-Neuronen zum Aufbau logischer Funktionen



McCulloch-Pitts-Zellen: geometrische Interpretation



McCulloch-Pitts-Zellen: geometrische Interpretation

A B C D E F

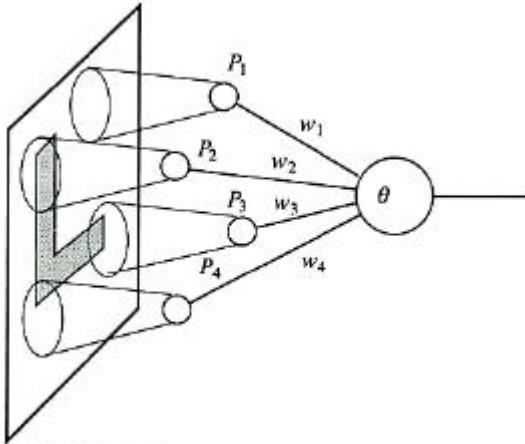
Frank Rosenblatt, 1957: Perceptron

The diagram illustrates the Perceptron model. On the left, a box labeled 'S-Units' contains numerous small circles representing sensory input units. Lines connect these S-Units to a vertical column of six circles labeled 'Input' (part of the A-Units). These 'Input' units are then connected to a vertical column of six circles labeled 'Output' (part of the R-Units). Below the diagram, three arrows indicate the flow of information from left to right, labeled 'S-Units', 'A-Units', and 'R-Units' respectively.

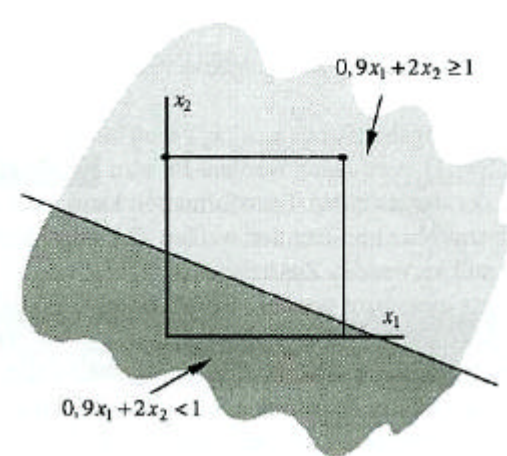
Frank Rosenblatt, 1957: Perzeptron

The diagram illustrates the Perceptron model's architecture. It begins with a large circle on the left labeled 'Retina'. From the Retina, three curved lines connect to a column of three smaller circles labeled 'Abbildungsregion' (mapping region). These connections are labeled 'Feste deterministische Verbindungen' (fixed deterministic connections) with an upward-pointing arrow. From the 'Abbildungsregion', three curved lines connect to a column of three smaller circles labeled 'Verknüpfungsregion' (linking region). These connections are labeled 'Stochastische Verbindungen' (stochastic connections) with a downward-pointing arrow. Finally, from the 'Verknüpfungsregion', three curved lines connect to a column of three smaller circles labeled 'Reaktionen' (reactions).

Frank Rosenblatt, 1957: Perzeptron



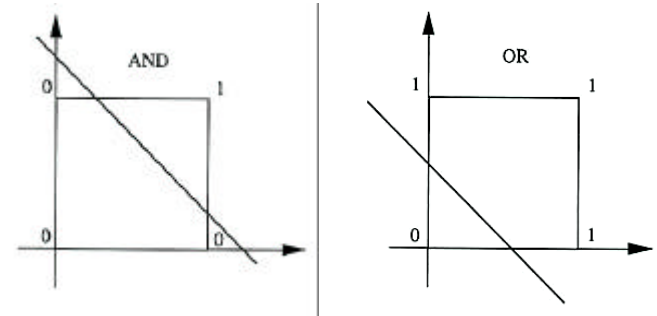
Perzeptron; geometrische Interpretation



Logische Funktionen

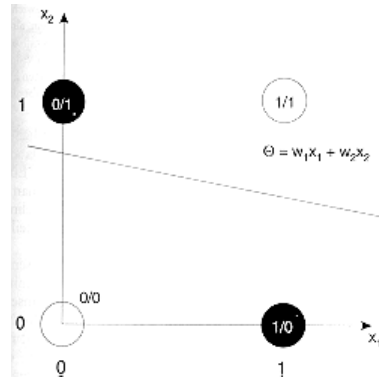
x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Logische Funktionen



XOR-Problem

x_1	x_2	$x_1 \text{ XOR } x_2$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0



XOR-Problem

$$\Theta = w_1 x_1 + w_2 x_2, \quad \text{woraus folgt:}$$

$$x_2 = - (w_1 / w_2) x_1 + (\Theta / w_2)$$

Auf der einen Seite der Geraden gilt:

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 > \Theta, \quad \text{d. h. Neuron ist aktiv.}$$

Auf der anderen Seite der Geraden:

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 < \Theta, \quad \text{d. h. Neuron ist nicht aktiv.}$$

XOR-Problem

$x_1 = 0$ und $x_2 = 1$: y soll 1 sein. D. h.: $w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 1 \geq \Theta$, d. h. aktiv!
 $x_1 = 1$ und $x_2 = 0$: y soll 1 sein. D. h.: $w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 0 \geq \Theta$, d. h. aktiv!
 $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$: y soll 0 sein. D. h.: $w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 0 < \Theta$, d. h. inaktiv!
 $x_1 = 1$ und $x_2 = 1$: y soll 0 sein. D. h.: $w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 < \Theta$, d. h. inaktiv!

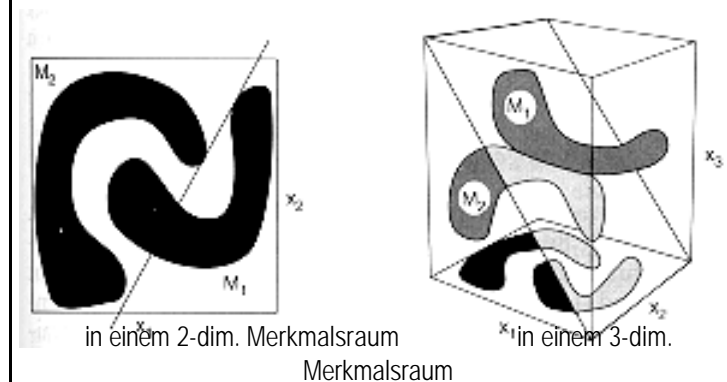
Addieren der beiden ersten Ungleichungen ergibt: $w_1 + w_2 \geq 2\Theta$,
 Aus den letzten beiden Ungleichungen folgt:

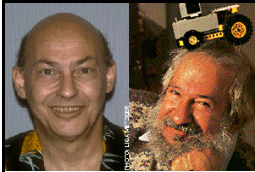
$$\Theta > w_1 + w_2 \geq 2\Theta, \quad \text{also } \Theta > 2\Theta.$$

Das gilt aber nur für $\Theta < 0$.

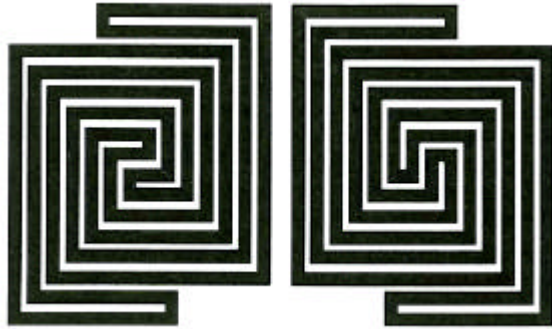
Dies steht im Widerspruch zu $w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 0 < \Theta$.

Zwei nicht linear trennbare Muster





Marvin Minsky und Seymour Papert 1969



L. A. Zadeh, 1963:

Optimality and Non-Scalar-Valued Performance Criteria

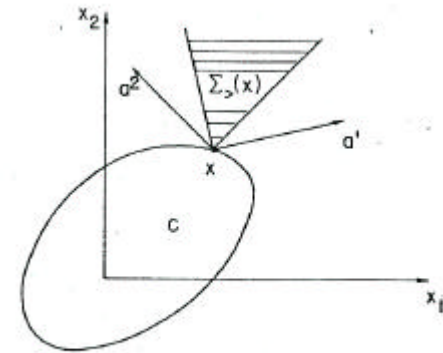


Fig. 1—Illustration of the significance of C and $\Sigma_{>}(x)$.



L. A. Zadeh, 1963:

Optimality and Non-Scalar-Valued Performance Criteria

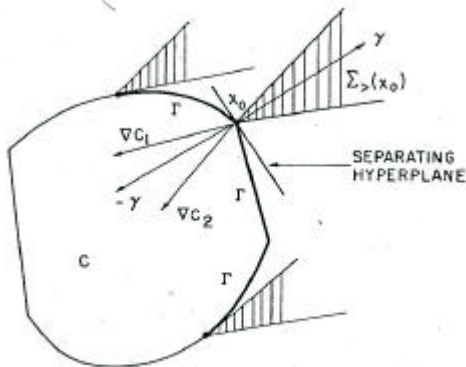


Fig. 2—The set of noninferior points on the boundary of C .

Konvexe Fuzzy Sets

Gewöhnliche Mathematik:

V sei ein Vektorraum, $C \subseteq V$ heißt *konvex*, wenn gilt:

$$\{(1-l)f + lg \mid 0 \leq l \leq 1\} \subseteq C.$$

Fuzzy Sets: *Convex Combination* of A , B and L :

$$(A, B; L) = L A + L' B, \quad (L' \text{ ist das Komplement von } L)$$

Für die Zugehörigkeitsfunktionen bedeutet das:

$$f_{(A,B;L)}(x) = f_A(x)f_A(x) + [1-f_A(x)]f_B(x)$$

Konvexe Fuzzy Sets

Für *convex combinations* für fuzzy sets gilt:

$$A \cap B \subset (A, B; L) \subset A \cup B, \quad \text{für alle } L$$

Dies folgt aus den Ungleichungen ($x \in X$):

$$\min [f_A(x), f_B(x)] \leq \lambda f_A(x) + (1-\lambda) f_B(x) \leq \max [f_A(x), f_B(x)],$$

Konvexe Fuzzy Sets

A ist *konvex* $\Leftrightarrow \Gamma_\alpha = \{x \mid f_A(x) \geq \alpha\}$ ist konvex für alle $\alpha \in (0,1]$
oder dazu äquivalent:

$$A \text{ ist konvex} \Leftrightarrow f_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \min [f_A(x_1), f_A(x_2)], \quad \forall x_1, x_2 \in X, \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

A ist *beschränkt* $\Leftrightarrow \Gamma_a = \{x \mid f_A(x) \geq a\}$ ist beschränkt $\forall a > 0$,

das heißt: $\forall a > 0 \exists$ ein endliches $R(a)$ so, daß $\|x\| \leq R(a) \quad \forall x \in \Gamma(a)$.

Wenn A also beschränkt ist, dann existiert für jedes $\epsilon > 0$ eine Hyperebene H , so daß für alle die x , die auf derjenigen Seite von H liegen, die nicht den Nullpunkt enthält, gilt: $f_A(x) \geq \epsilon$

Konvexe Fuzzy Sets

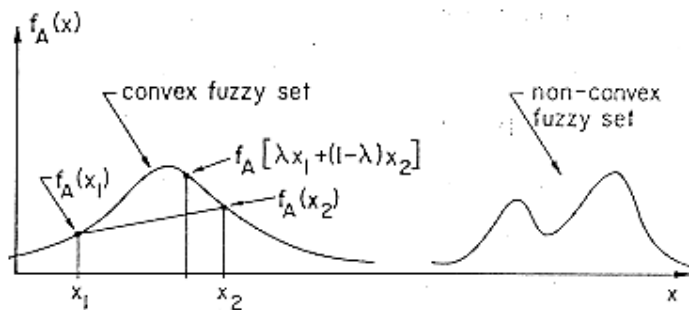


FIG. 4. Convex and nonconvex fuzzy sets in E^1

Gewöhnliche konvexe Mengen A und B lassen sich leicht trennen, weil sie disjunkt sind; es existiert eine separierende Hyperebene H , auf deren einer Seite die Menge A , auf deren anderer Seite B liegt.

Erweiterung für Fuzzy Sets: Verzicht auf Disjunktheit.

A und B seien beschränkte fuzzy sets, H sei Hyperfläche in E^n , definiert durch $h(x) = 0$.

Alle Punkte x , mit $h(x) \geq 0$ liegen auf deren einer Seite, und auf der alle Punkte x , für die gilt $h(x) \leq 0$ liegen auf der anderen Seite. Abhängigkeit von H existiert eine Zahl K_H , so daß auf der einen Seite von H gilt: $f_A(x) \geq K_H$, und auf der anderen Seite $f_A(x) \leq K_H$.

Das Infimum dieser K_H sei M_H und dessen Komplement $D_H = 1 - M_H$ heißt der *Grad der Separation* von A und B durch H .

Problem:

Finde diejenige Hyperfläche aus $\{H_I\}$ die den höchstmöglichen Separationsgrad realisiert.

Spezialfall: H_I im euklidischen Raum E^n , 1 Laufvariable darin;

Separationsgrad von A und B:

$$D = 1 - M, \quad \text{wobei } M = \inf_H M_H$$

Erweiterung des Separationstheorems für konvexe fuzzy sets:

Theorem:

Der höchste mit einer Hyperebene im euklidischen Raum E^n erhaltliche Separationsgrad zweier konvexer fuzzy sets A und B entspricht dem Komplement des maximalen Grades im Durchschnitt $A \cap B$.

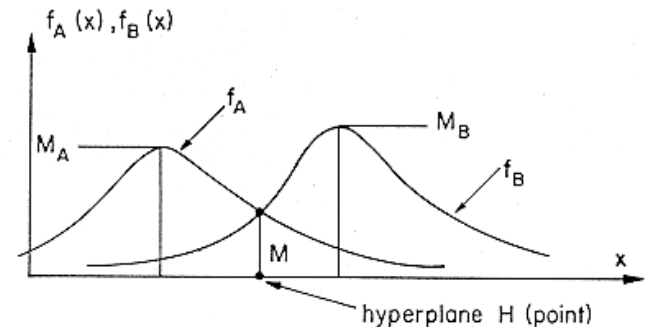
Separation Theorem for Fuzzy Sets

FIG. 5. Illustration of the separation theorem for fuzzy sets in E^1

Erste Dissertationen zu Fuzzy Sets

<p>Fuzzy Sets and Pattern Recognition</p> <p>By Chin-Liang Chang</p> <p>Grad. (Taiwan Prerential Taipei Institute of Technology) 1958 M.S. (Lehigh University) 1964</p> <p>DISSERTATION</p> <p>Submitted in partial satisfaction of the requirements for the degree of DOCTOR OF PHILOSOPHY</p> <p>In Engineering</p> <p>In the GRADUATE DIVISION</p> <p>of the UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY</p> <p>Approved: _____ _____ Committee in Charge</p> <p>Degree conferred..... DEC 14 1967 Date</p>	<p>Categories of Fuzzy Sets: Applications of Non-Cartesian Set Theory</p> <p>By Joseph Andrew Goguen, Jr.</p> <p>A.B. (Harvard University) 1963 M.A. (University of California) 1966</p> <p>DISSERTATION</p> <p>Submitted in partial satisfaction of the requirements for the degree of DOCTOR OF PHILOSOPHY</p> <p>In Mathematics</p> <p>In the GRADUATE DIVISION</p> <p>of the UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY</p> <p>Approved: _____ _____ Committee in Charge</p> <p>Degree conferred..... JUN 1968 Date</p>
---	---

